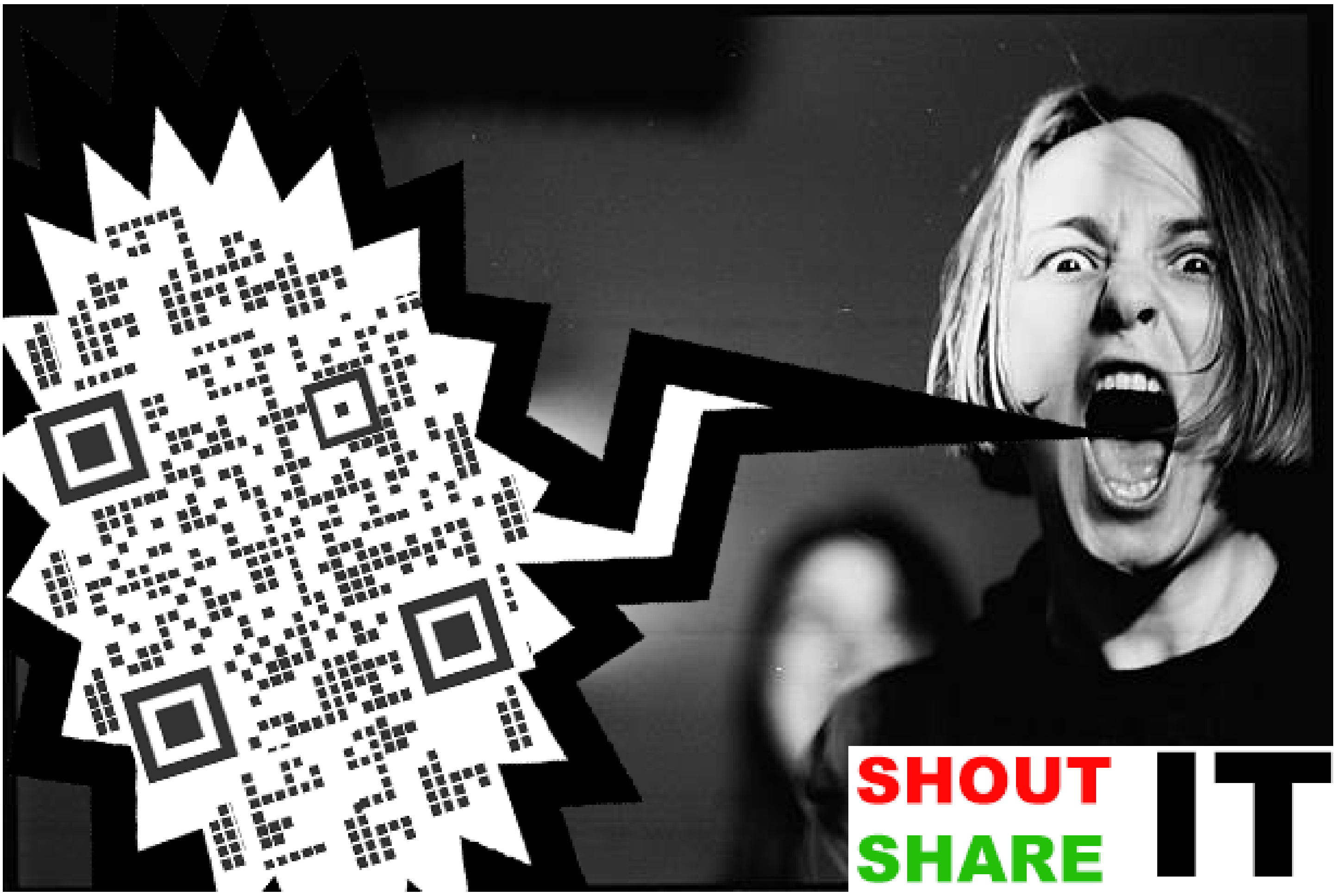

SHOUT
SHARE
IT

S. 1142. A

MEMORIE
DI
MATEMATICA E FISICA
DELLA
SOCIETÀ ITALIANA
TOMO II. PARTE II.

SEMPER
EADEM

VERONA
PER DIONIGI RAMANZINI
MDCCLXXXIV.

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY

NUOVA TEORIA

INTORNO AL MOVIMENTO DE' NAVIGLI A REMI

Del Sig. CAVALIERE LORGNA.

SArei ben alieno dal riprodurre queſt' argomento ſotto gli occhi de' dotti, ſe altro non aveſſero fruttato le mie meditazioni ſuorchè un nuovo metodo di maneggiarlo, e una perfetta conformità con le ricerche altrui ne' finali riſultamenti. Non è già perchè non debba talora averſi in conto anche queſto profitto, e ne' caſi ſingolarmente in cui o la ſtrada onde giugnere al medeſimo fine è più breve, oppure, ſe qualche pratica vi ſi attenga, rieſce ella più ſemplice e più naturale; ma qualche volta e in alcuni caſi potrebbe giudicarſi abuſo del tempo il rifare le coſe fatte non con altro merito, che di averle rifatte in altra guiſa. Ma avendo riconoſciuto da gran tempo, che le indagini inſtituite ſino a' dì noſtri intorno alla navigazione a remi non erano ancor giunte a ſcoprire e mettere in chiaro tutti i ſegreti del remigare, mi ſono ad altri principj appigliato, combinando la teoria col fatto, e facendo obbedire il calcolo al ragionamento e alle oſſervazioni, come nelle ſcienze fiſico-matematiche dee farſi. Il che tutt' altro eſſendo che rifare il fatto, vo' ben credere, che non giudicheranno i Geometri immeritevole totalmente della loro attenzione queſta nuova ricerca, la quale col ridurre l' argomento alla ſua legittima condizione, toglie di mezzo ogni oſcurità e controverſia, in cui reſtava tuttora involta queſta finiſſima parte della ſcienza del moto.

CAPITOLO I.

Introduzione.

§. 1. Attribuiſce *Plinio* nel Lib. 7. Cap. 56 l' invenzione de' remi agli abitanti di due città della Beozia, oggi detta *Stramulipe* , i quali a ſuo dire diedero al remo il nome di κώπη , e alla pala, ch' è la parte larga, che percuote l' acqua, quello di πλάτη. Ma vuol ragione non men di *Plinio* autorevole, che ſi creda contemporaneo il remo al primo avventurarſi degli uomini a diſcorrere su' galleggianti per fiumi e laghi , e pel mare coſta a coſta , molto prima che foſſe chiamato in ſoccorſo il vento; eſpediente più tardo, il quale ſuppone già abituati gli uomini ne' primi cimenti del remigare , men periglioſi dell' andar a vela . V' ha qualche popolo ancora nella ſua originaria rozzezza, il quale facendo di sè puntello, rema con le pale nelle mani ſenza appoggiare il remo all' orlo della barca.

§. II.

Ma per quanto antica ſia queſt' arte di navigare , non ſo che prima di *Ariſtotele* ſi avviſaſſe alcun filoſofo d' inveſtigare i principj ſu cui è fondata , e il modo di calcolare l' economia delle forze , che agiſcono in quella mirabile operazione. Il vulgo s' accheta nel travvedervi delle manovelle ordinarie in azione; quando realmente non s' ingeriſce tal natura d' ordigno, ove non ha luogo un punto fiſſo, l' ipomoclio per la leva. E queſta è la ſorte ordinaria d' un' infinità di fenomeni familiari, in cui la dimeſtichezza coll' effetto fa credere triviale la cauſa, che lo produce; ed è poi ella da indagarſi più ardua e difficile, che non ſi eſtima. Ma l' illuſione giunge bene ſpeſſo a imporre anche agli uomini illuminati, finchè una fortunata rifleſſione non iſquarcia il velo, e laſcia ſcoprire la verità . In fatti troviamo nella 4. Quiſt. de' Meccan. , che *Ariſtotele* parlando dell' operar de' remi dice *hypomoclion fit ſcalmus, ſtat enim ille ; pondus vero mare eſt , quod propellit remus ; vectem autem movens ipse eſt remex* . Prende egli dunque il remo come un vette di primo genere , che non può eſſere; poichè ſarebbe neceſſario, che ſe ne ſteſſe immobile il navilio , affinchè agitandoſi dal rematore il remo ad un capo , e ſervendogli d' appoggio il navilio, aveſſe coll' altro a farſi l' impulſione dell' acqua , che ſecondo lui è il peſo da moverſi. Nè con maggior felicità ſono riuſciti a ſviluppare queſta quiſtione coloro, che hanno preteſo di ravviſarvi un vette di ſecondo genere, come ſe l'acqua faceſſe figura di punto fiſſo, il che pure non è, non eſſendo ella altramente immobile, ancorchè reſiſta di continuo all'impulſione del remo. Ma ſe vuol eſſere meſſo da parte il comune de' Meccanici, che ſi ſono facilmente creduti fuor d' impaccio col ridurre all' azione delle leve l' atto del remare, merita riguardo e commemorazione ciò che n' hanno ſcritto alcuni de' più dotti e valenti uomini di queſto ſecolo, in cui è aſceſo al più alto grado lo ſtudio delle Meccaniche.

§. III.

Dopo il Sig. *Bouguer*, il quale nel ſuo eccellente libro, che ha per titolo *Traitè ſur le Navire*, verſa ſu queſta materia con molta penetrazione, preſe a farne ſingolar trattazione il Sig. *Eulero* nelle Mem. della Reale Società di Berlino per l'anno 1747. Sembrando a queſt' illuſtre Geometra incerte ed oſcure le azioni de' rematori, imperfetta la teoria di *Bouguer*, e non manifeſta la forza, con cui il navilio è promoſſo immediatamente, abbandona ogni conſiderazione propria e peculiare della coſa, e tutto ſi rivolge alle prime leggi della Dinamica. Con queſte cerca prima di ſtabilire la relazione tra lo ſpazio percorſo nel moto accelerato, cominciando dalla quiete, e la velocità acquiſtata finalmente, in modo però aſtratto sì che l' operar de' remi non v' entra per alcun conto. Paſſa quindi, dopo molte diſcuſſioni e rettificazioni, a trattare del moto uniforme del navilio. Di due equazioni, a cui ſi riduce, una è legittimamente dedotta. Ma intorno all' altra può ragionevolmente dubitarſi, ſe ſia lecito il prendere per punto fiſſo la ſponda del navilio, che non è aſſolutamente, e ch' egli medeſimo rigetta nell' Introduzione; mentre l' uguagliare ch' ei fa nel moto uniforme (§. XXI. pag. 195.) il momento della forza intorno a queſto punto col momento della reſiſtenza al centro della pala, abilita il punto in queſtione tacitamente a far figura d' ipomoclio. Ad ogni modo è piena quella Memoria di belliſſime conſiderazioni, e vi ſi ſcorge ad ogni paſſo l' ingegno ſommo del Geometra in lotta con le difficoltà graviſſime dell' argomento. Non è a mia cognizione, che dopo di lui ſia ſtata preſa queſta materia da' ſuoi principj, e affrontata in tutte le ſue parti, come l' indole della coſa il richiede. Ne parlò per incidenza e alla sfuggita ne' ſuoi Opuſcoli il celebre Sig. d' *Alembert*, e riportoſſi alla Memoria ſopraddetta del Sig. *Eulero*. Nel 1753 fu coronata dall' Accademia Reale di Parigi una Memoria dell' illuſtre Sig. Daniele *Bernoulli* intorno alla maniera la più vantaggioſa di ſupplire all' azione del vento con un nuovo artifizio di remigare, come il trovo accennato dal Sig. *Krafft* nel Vol. XX. de' nuovi Comment. di Pietroburgo; ma non avendo quell' opera in potere non poſſo rendere al celebre Autore di lei la giuſtizia, che può meritarſi. Intraprende il Sig. *Krafft* a richiamare queſta nuova maniera ai primi principj della Meccanica, e a paragonarla con l' ordinaria e fondamentale, ſecondo ciò che n' ha ſcritto il Sig. *Eulero*, di cui precedentemente. Ma di nuovo non avendo innanzi agli occhi, come ho detto, quella Memoria, nè avendo potuto formarmene chiara idea da ciò, che ne dice il Sig. *Krafft*, non poſſo neppure far incontro de' calcoli di queſto, e delle conſeguenze che ne ricava. Si può per altro non ſenza fondamento aſſerire, che il meccaniſmo de' remi è tutt' altro da quello, con cui ſi ſpinge l' acqua direttamente con appoſiti ordigni, come par che qui ſi faccia, ſopra di che ha dottiſſimamente trattato aſſai prima del Sig. *Krafft* il Sig. Gio: Alberto *Eulero* negli Atti di Berlino per l' anno 1764. Di modo che reſta tuttavia dovuta l' intima diſcuſſione di quello al Sig. Leonardo *Eulero*. Eſſendo aſſai grande il numero delle conſiderazioni, da cui dipende una tale ricerca, *& celles qui ſont connues*, dice egli alla pag. 182 §. 3., *étant melèes avec les inconnues, on ne ſera plus ſurpris pourquoi cette matière a étè négligèe jusqu' ici, & combien il eſt difficile de n' y tomber point dans l' erreur*. E molto più apparirà vero il ſentimento di lui, ſe potrà queſta mia indagine meritare di eſſer letta attentamente.

CAPITOLO II.

Principj del remigare.

§. IV.

Qualunque volta nel maneggiare un argomento aſtruſo di Dinamica non ſi offre agevolmente e ſta recondita l' intima legge de' movimenti, che vi ſi fanno, non è conſiglio riprovato il ricorrere a' principj generali, e talora a certe cauſe finali, ſecondo le quali è ſtato oſſervato regolarſi Natura coſtantemente, come ſono la conſervazione delle forze vive; il minimo o delle azioni, o del tempo; le vie breviſſime, e ſimili leggi. Ma ſuole avvenire non di rado, che diſcoperti finalmente i principj naturali e proprj del ſoggetto, biſogna rinunciare alle teorie anche luminoſe, ch' eranſi ſtabilite per l' innanzi o come troppo diſcordanti dalle vere, o come per sè inſufficienti ad eſaurire la materia. E accade ancora, che ſvanendo tutte le difficoltà, che traevano più che dalla coſa origine dall' improprio modo di trattarla, ſi ſoſtituiſcono felicemente a' mezzi di ragione elementi più ſicuri, e al fatto non contrarj; il che quanto contribuiſca all' avanzamento delle ſcienze non v' ha per avventura chi non lo conoſca. L' ho toccato con mano non ha molto nel meditare intorno al moto de' liquidi, dopo un lungo eſercizio di oſſervazioni e ſperienze fatte ſull' acque correnti. Ho luſinga, che la teoria, che n' ho tratto, introduca molto migliori aperture che non abbiamo in quell' oſcuriſſima ſcienza; del che farò parte alla *Società*, allorchè abbia menato a termine il lavoro. Mi fo intanto a dare qui un ſaggio di queſta verità nel preſente argomento intorno al moto de' navigli a remi, movendo i paſſi dalla coſa, piuttoſto che dagli aſtratti lontaniſſimi principj della Dinamica.

§. V.

Cominciamo pertanto dall' eſaminare l' azione del remo. Il remo offre tre ſituazioni notabili da conſiderarſi; la prima è quella ove il rematore applica la ſua forza ; la ſeconda è la ſponda del navilio ſu cui poſa il remo ; e la terza è nella pala o parte più larga del remo, da cui è ſcacciata l'acqua. Diſtinguendo bene l' azione muſcolare del rematore dal peſo di lui, nella quale conſiſte propriamente la forza , che agita il remo, mentre il peſo dell' uomo entra in maſſa col navilio, e fa parte del peſo che debbe eſſer meſſo in moto, non è più una circoſtanza complicata (Mem. della Soc. R. di Berlino 1747. pag. 181.) l' eſſere contenuta la forza del rematore , e il trovarſi ella in azione nel navilio medeſimo . Di modo che la forza reale applicata al remo è come ſe foſſe immateriale o diſgiunta dall' uomo, il quale come corpo peſante va tutto a carico del navilio; e va pure a carico di lui, ſiccome vedremo, la preſſione, che ſi fa dal rematore nel puntellarviſi, onde promovere il remo; il che non va confuſo con la forza muſcolare, ch' egli eſercita ſul remo medeſimo. Fatto queſto primo paſſo per riſpetto al punto principale del remo , mettiamoci a conſiderare l' uffizio di lui nell' altre due ſituazioni . E quanto alla ſeconda , altro è l' adoperare una leva entro il navilio poſto altronde in movimento; nel qual caſo il moto comune non turba altramente la legge della leva; e tutt' altro è il caſo del remo, che opera egli ſteſſo pel movimento del navilio , sì che non può mai conſiderarſi la ſponda, ſu cui inſiſte il remo, come un punto fiſſo moſſo soltanto di moto comune al remo e al navilio, mentre è l' azione ſteſſa del remo , che produce un tal moto. Non è dunque applicato il remo al navilio come ad un ipomoclio , ſiccome con *Ariſtotele* han creduto parecchi altri, ma sì bene ad una reſiſtenza da vincere, ad un oſtacolo da ſmovere, ch' è il navilio medeſimo. Ma nè pur l' acqua, a cui s' applica la pala, non può averſi in conto d' ipomoclio, perchè il remo diventi un vette omodromo , avvegnachè la pala è in continuo movimento e cangiamento di ſito , e non ne ha ella alcuno a cui corriſponda ſtabilmente un punto fiſſo nell' acqua agitata, come richiede la legge di un tal vette. E' dunque anche l' acqua un' altra reſiſtenza da vincere , un altro oſtacolo da ſmovere col remo . Ed eccoci intanto con queſta diſcuſſione giunti a ſtabilire

Che il remo è realmente un ordigno interpoſto tra due oſtacoli da muovere contemporaneamente in parti oppoſte, ſtando ad un capo di lui applicata la forza motrice.

E come ogni reſiſtenza ſi miſura con un peſo, poſſiamo intanto per facilità far rappreſentare da due maſſe peſanti il navilio ſpinto, e il volume dell' acqua ſmoſſa dalla pala; di modo che ſe la verga infleſſibile *AP* (*fig. I.*) rappreſenti il remo, la maſſa *V* il navilio, la maſſa *A* l' acqua, e abbiavi in *P* una forza deſtinata a dar moto al ſiſtema in un dato piano con la direzione *PB*, la legge di queſto moto è preciſamente quella del remigare. Queſta prima importantiſſima verità mette a ſuo luogo la quiſtione nelle Meccaniche, e laſcia vedere come di natura ſua voglia eſſere trattato l' argomento.

§. VI

E' facile da vederſi primieramente, ch' è neceſſaria una certa proporzione tra i peſi *V*, *A* e la potenza motrice *P*, affinchè prenda moto tutto il ſiſtema. Imperciocchè, ſe foſſe invincibile l'oſtacolo *A*, diventando la verga una leva di ſecondo ordine, dovrebbe la potenza *P* al peſo *V* avere pel movimento ragione maggior di quella, che ha l' intervallo *VA* all' intervallo *PA*; e ſe il foſſe l' oſtacolo *V*, diverrebbe la verga una leva di primo ordine, e dovrebbe avere maggior ragione la potenza al peſo *A*, che non ha l' intervallo *VA* all' intervallo *VP*. Ma eſſendo l' uno e l' altro un appoggio mobile, mentre reſiſte l' oſtacolo *V* alla verga *PA*, perchè il peſo *A* ſi muova verſo *n*, e l' oſtacolo *A* reſiſte alla medeſima verga, perchè il peſo *V* ſi mova verſo *m*, cede continuamente l' uno e l' altro alla ſollecitazione, e tutto il ſiſtema ſi muove diverſamente da quello che farebbeſi, ſe quegli oſtacoli ſteſſero a vicenda immobili un iſtante. Dovendo pertanto muoverſi *V*, ed *A* contemporaneamente in parti contrarie, ſe ſia (*fig. II.*) *AA'* la traſpoſizione iſtantanea di *A*, *VV'* quella di *V*, e *PP'* il viaggio della forza motrice, avrà la verga *PA* preſo neceſſariamente la poſizione *P'V'A'*, e vi ſarà un punto come *M* tra *V* ed *A*, che nella comune traslazione de' peſi, e della potenza non s' è punto nè poco moſſo dal ſuo ſito. Il punto *M* è dunque come un punto fiſſo, un centro ſpontaneo di moto, intorno a cui ſi ſono contemperati in quell' iſtante i movimenti dell' intero ſiſtema. Ed ecco riſultarci un punto nel remigare che in ogni impulſione del remo ſta fermo ed immobile in aria, mentre il navilio avanza effettivamente, il qual punto non è coſtituito nè nel navilio, nè nell' acqua, ed è il reale centro del moto, che ho detto ſpontaneo, intorno al quale ſi bilanciano l' azione della potenza, e la reſiſtenza del navilio e dell' acqua.

§. VII.

E perchè una medeſima potenza *P* dee mettere in movimento entrambe le maſſe *V*, *A* contemporaneamente, forz' è, che la reſiſtenza totale ſi divida in modo che ognuna di eſſe reſiſta alla potenza con egual momento, perchè la più grave ſi mova meno della men grave, ſiccome conviene. In tal guiſa la quantità del moto della potenza avrà una medeſima ragione alla quantità del moto di ciaſcheduna maſſa. Ed ecco un altro principio in queſta teoria, per cui ſi viene in cognizione, che il punto fiſſo, intorno a cui ſi fa il moto iſtantaneo nel remare, interpoſto tra la ſponda del navilio e l' acqua, è preciſamente il centro comune di gravità delle maſſe *A* ed *V* (*fig. I.*), equivalente l' una alla reſiſtenza dell' acqua ſcacciata colla pala, e l' altra alla reſiſtenza del navilio. Imperciocchè ſe ſia *M* centro comune di gravità de' peſi *A* ed *V* (*fig. II.*), ſaranno tra di sè uguali i momenti $A \,.\, AM$, $V.\, VM$, e nel moto avrà $P.\, PP'$ una ſteſſa ragione alle uguali quantità $A \,.\, AA'$, $V.\, VV'$, eſſendo tra di sè gli archi AA', VV', PP' deſcritti col centro *M* come i raggi MA, MV, MP.

§. VIII.

Trovato il centro ſpontaneo del moto *M*, tutto ci ſi appiana nell' inveſtigazione della legge, con cui opera il remo. Imperciocchè facendo il punto *M* uffizio d' ipomoclio, dovrà ſtare per l' equilibrio la potenza in *P* all' oſtacolo in *V* come *MV* a *PM*, e la potenza in *P* all' oſtacolo in *A* come *MA* a *PM*; e però eſſendo uguali i momenti $V.\,VM$, $A.\,AM$, dovrà eſſere per l' equilibrio, combinando inſieme le reſiſtenze che controagiſcono ſimultaneamente alla potenza P, il momento $P.\ PM$ doppio del momento $V.\ VM$, oppure del momento $A.\ AM$; riſultamento importantiſſimo di cui ſaremo uſo a ſuo luogo. Quindi appariſce, che oltre all'eſſere improprio il collocamento dell'ipomoclio sì alla ſponda del navilio che nell'acqua per le ragioni, che abbiamo addotto al §. 11, incorre l'uno e l'altro nel difetto eziandio di far naſcere più movimento, che non v'è realmente per l'azione d'una ſteſſa potenza. Per vederlo in fatto s'inſtituiſca l'analogia, come PA a PM, così l'angolo PMP' all'angolo PAC, il quale ſia ſotteſo dall'arco PC deſcritto col centro A e coll'intervallo AP. Di nuovo inſtituita l'analogia, come PV a PM così l'angolo PMP' all'angolo PVQ, col centro V, e coll'intervallo PV ſi deſcriva l'arco PQ ſottendente l'angolo ritrovato PVQ. Siccome prendendo in cerchj diſuguali angoli reciprocamente proporzionali ai raggi dei cerchj, rieſcono tra di sè uguali gli archi, che a quegli angoli ſono ſotteſi, riſulta da queſta coſtruzione eſſere l'uno e l'altro arco PC, PQ uguale all'arco PP'. Ciò premeſſo, eſſendo l'arco PP' il viaggio fatto dalla potenza intorno al centro del moto M, mentre il navilio ha percorſo l'archetto VV', e il punto A della pala l'archetto AA', ſe foſſe ſtata appoggio fermo l'acqua in A, mentre la potenza aveſſe percorſo uno ſteſſo ſpazio PC di prima, deſcritto col centro A l'arco VD, ſarebbe ſtato VD il viaggio del navilio maggiore di VV'; e ſe foſſe ſtato appoggio fermo il navilio in V, mentre aveſſe percorſo la forza lo ſpazio di prima PQ, ſarebbe il punto A della pala pervenuto in B facendo un movimento maggiore del vero AA'. E qui ſi riſchiara maggiormente l'oſſervazione fatta intorno alla teoria del Sig. *Eulero* (§. III.). Non eſſendo altramente nel punto V nè appoggio, nè centro di moto, ma unicamente il ſito d'una maſſa da moverſi, a cui è applicato il remo, non può ivi in alcun caſo cadere conſiderazione di momenti, nè bilanciamento di quantità di moto. E però toſto che non può avervi intorno ad V l'uguaglianza de' momenti aſſunta da quell'immortale uomo al §. XXI. non può nè pure aver luogo l'equazione che ne deduce; il che turba non poco la teoria di lui.

CAPITOLO III.

Del moto accelerato del navilio a remi

§. IX.

Premeſſo il vero e naturale principio, ſu cui è appoggiata la navigazione a remi, cominciamo a farne l'applicazione convenevole. E primieramente conſiderare e diſtinguere dobbiamo i differenti ſtati del navilio in movimento, così ſopra un'acqua ſtagnante, come a ritroſo, o a ſeconda d'un'acqua corrente. Imperciocchè dall'un canto principia egli ſempre il ſuo moto dalla quiete, e va accelerandoſi per gradi ſucceſſivamente, condizione cui biſogna ſvolgere e conoſcere intimamente; e dall' altro il fatto giornaliero dimoſtra, che il rematore dopo un breve intervallo di tempo dal principio del remare, prende e mantiene una certa equabilità e uguaglianza di azione, sì che il movimento del navilio ſi fa ſenſibilmente uniforme; altro ſtato eſſenziale, in cui biſogna neceſſariamente internarſi, giacchè ſi comprende agevolmente, che quell' accelerazione prima ha un limite, perchè la reſiſtenza dell' aria e dell' acqua diviene ſempre più energica quanto più la celerità s' aumenta. Quindi è che impreſſo al navilio un certo grado di velocità finale, con queſta velocità conceputa ſi conſerva, e perſevera la navigazione. Conſidereremo pertanto, ch' ella ſi faccia in acqua ſtagnante, e non ſarà poi difficile il traſportarla per ogni verſo anche ſull' acque correnti. E procedendo con ordine tratteremo prima del movimento difforme, cioè del movimento primo del navilio partendo dalla quiete, da cui paſſar debba al movimento equabile finale da mantenerſi in appreſſo.

§. X.

E' fuor di dubbio, che movendo dalla quiete, e dovendo per gradi accelerarſi il navilio, la potenza applicata al capo del remo dee metter in moto la maſſa del navilio e quella del remo; vincere lo sfregamento alla ſponda; ſuperare la reſiſtenza dell' acqua, quella dell' aria, e per ſin l' inerzia della parte di materia propria del rematore meſſa in moto con le braccia. Rappreſentiſi dunque il remo con la retta PR (*fig. III*) e ſia in R il centro della pala, ove ſi riuniſcono le reſiſtenze, in P la forza motrice, in V la ſponda del navilio, che dee in un con eſſo eſſere promoſſa dal remo. Conſidereremo qui come concentrato il navilio in V, come ſe il moto della ſponda V foſſe il moto ſteſſo di lui, riſerbandoci a fare in appreſſo la debita ſeparazione di queſti moti, che non vanno altramente confuſi, come s'è fatto ſinora. E intanto ſi faccia

PV	a
VR	b
La forza motrice in P	F
L' inerzia della forza motrice	ω
La maſſa del navilio	M
La maſſa del remo	N
La potenza equivalente allo sfregamento coſtituita in p	P
La ſuperficie anteriore del navilio, che fende l' acqua	f^2
La ſuperficie del remo concentrata in R	g^2
L' altezza da cui ſcendendo un grave verticalmente acquiſta infine della diſceſa la velocità adattata a queſto ſiſtema di elementi del navilio	Z
L' altezza ſimile dovuta alla velocità della pala	y
Lo ſpazio, che dee percorrere il navilio di moto accelerato prima di giungere a quella velocità finale	S
Il tempo, che vi deve impiegare	T

S' intenda ora fatto dal ſiſtema un piccolo movimento dalla quiete, sì che la forza motrice giunga in P', il navilio in V', il centro della pala in R'. Sarà M il centro ſpontaneo di rotazione. Ed è certo, che non eſſendo le reſiſtenze in V, R controagenti, ma puramente da metterſi in moto, ſi avrà l' accelerazione angolare dividendo il momento della forza motrice pe' momenti delle reſiſtenze, che debbono rivolgerſi intorno ad M. Ora in V l' intero oſtacolo è compoſto della maſſa inerte del navilio M, e della reſiſtenza dell' acqua all' eſſere feſſa dalla prora, la qual reſiſtenza ſi miſura pel ſolido $f^2 (VV')^2$; e l' oſtacolo in R viene dalla reſiſtenza, che fa l' acqua all' eſſere ſmoſſa dalla pala, di cui è miſura il ſolido $g^2(RR')^2$. E poichè i momenti di queſti oſtacoli debbono eſſere uguali tra di sè intorno al punto fiſſo M, dovrà eſſere $N+f^2(VV')^2 : g^2(RR')^2 = MR : MV$, e componendo $M+f^2(VV')^2+g^2(RR')^2 : g^2(RR')^2 = VR\,(=b) : MV$, e però ſarà $MV = \frac{g^2 b\,(RR')^2}{M+f^2(VV')^2+g^2(RR')^2}$, e ſimilmente $MR = \frac{b\,(M+f^2(VV')^2)}{M+f^2(VV')^2+g^2(RR')^2}$. Ma eſſendo VV', RR' archi ſimili deſcritti col centro M, e co' raggi MV, MR ſarà

$MV : MR = VV' : RR'$ cioè

$g^2(RR')^2 : M+f^2(VV')^2 = VV' : RR'$, ed eſſendo VV' l' elemento dello ſpazio S, ſarà

$g^2(RR')^3 = dS\,(M+f^2dS^2)$, e $RR' = \sqrt[3]{\frac{dS}{g^2}(M+f^2dS^2)}$

che faremo intanto $=\mathfrak{Q}$

Dunque $MV = \frac{g^2 b\mathfrak{Q}^2}{M+f^2dS^2+g^2\mathfrak{Q}^2}$, $MR = \frac{b(M+f^2dS^2)}{M+f^2dS^2+g^2\mathfrak{Q}^2}$ e l' intervallo PM dal punto di applicazione della forza motrice al centro M ſarà $= a + \frac{g^2b - \mathfrak{Q}^2}{M+f^2dS^2+g^2\mathfrak{Q}^2}$, e il momento della forza ſarà

$$(F-p)\left(a+\frac{g^2b+\mathfrak{Q}^2}{M+f^2dS^2+g^2\mathfrak{Q}^2}\right) = A$$

Determinato il numeratore della frazione che dee eſprimere l' accelerazione momentanea del remo, fa d' uopo definire il compleſſo de' momenti pel denominatore. E primieramente eſſendo ω l' inerzia della forza motrice, la quale è coſtretta a muoverſi con la ſteſſa velocità della forza intorno al punto M, ſarà il ſuo momento $\omega . \overline{PM}^2$; e per l' inerzia poi del remo, dovendo tutti i punti di lui rotarſi intorno ad M, converrà moltiplicare ogni particella materiale del remo pel quadrato di ſua diſtanza dal punto M, onde averne il momento totale, e raccogliere in ſomma queſti prodotti. E poichè queſta ſomma può rappreſentarſi dal prodotto di N, che è la maſſa del remo, nel quadrato d' una retta linea K, ſarà il momento d' inerzia del remo NK^2. E poichè la reſiſtenza dell' acqua dee vincerſi con lo ſteſſo moto rotatorio intorno ad M, con cui dee pure promuoverſi la maſſa del navilio M, e vincerſi la reſiſtenza della prora, ſarà il momento pel punto $V = (M + f^2 dS^2)\,\overline{MV}^2$, e il momento pel punto $R = g^2 \mathfrak{Q}^2 \overline{MR}^2$. Laſciando dunque da parte la reſiſtenza dell' aria, come coſa piccola in queſto movimento, l' univerſale momento, che coſtituir debbe il denominatore, ſarà

$$\omega . \overline{PM}^2 + NK^2 + (M + f^2 dS^2)\,\overline{MV}^2 + g^2 \mathfrak{Q}^2\, \overline{MR}^2 = B$$

e però $\frac{A}{B}$ ſarà l' accelerazione iniziale del remo intorno ad M. Se dunque ſi moltiplichi queſt' eſpreſſione per MV, ſarà $\frac{A . MV}{B}$ l' accelerazione angolare del navilio in V. Ora eſſendo Z l' altezza dovuta alla celerità finale, che dee acquiſtare il navilio in fine dello ſpazio S, ſarà pe' principj della Meccanica

$$BdZ = AdS . MV$$

e integrando $Z = \int \frac{AdS . MV}{B} +$ coſt., in cui $\frac{AdS . MV}{B}$ è funzione di dS, e coſtanti unicamente.

§. XI.

Queſta è l' eſpreſſione della relazione tra lo ſpazio S, e l' altezza dovuta alla celerità finale, che avrà il navilio, percorſo che abbia di moto accelerato un tale ſpazio partendo dalla quiete, nella qual eſpreſſione non ſi è nè fatta alcuna ſuppoſizione forzata, nè mendicato alcun principio ſtraniero. Ma daremo qui un' altra ſoluzione di queſto problema, la quale ci ſarà ſtrada a determinare il tempo T impiegato a percorrere lo ſpazio S agevolmente. Se tutti gli oſtacoli diſtribuiti, e applicati a diverſe parti del remo foſſero coſtituiti nello ſteſſo punto P della forza motrice F, ſarebbe la forza acceleratrice aſſoluta eſpreſſa per una frazione avente F per numeratore, e le ſomme degli oſtacoli per denominatore. Ma importando conoſcere la forza acceleratrice al punto V, ov' è il navilio, ſi traſporti in V la forza motrice, facendo $MV : MP = F : \frac{F . MP}{MV}$, e ſarà $\frac{F . MP}{MV}$ la forza motrice che ſolleciterà il navilio immediatamente in V, cioè $(F-p)\,MP : MV$, diminuendo la forza F per conto dello ſfregamento (§. X.). Eſſendo pertanto accompagnata la forza F inſeparabilmente dalla propria inerzia ω, ſarà ella primamente uno degli oſtacoli da ſollecitarſi dalla forza in V. A queſto ſi aggiunga la maſſa del navilio, e la reſiſtenza dell' acqua, l' aggregato delle quali abbiamo trovato eſſere $M+f^2dS^2$, e ſia di più N' l' inerzia del remo ridotta al punto V. In conſeguenza avremo intanto in V il compleſſo $\omega+M+f^2dS^2+N'$. Reſta che vi riduciamo la reſiſtenza, che fa l' acqua al centro della pala.

Dovendo eſſere per natura del centro ſpontaneo M uguali i momenti delle reſiſtenze coſtituite in V ed R intorno ad M, torna lo ſteſſo per una potenza applicata in P il ſollecitare nello ſteſſo tempo l' oſtacolo in V, e la reſiſtenza attuale al punto R, ovvero la reſiſtenza in V raddoppiata da muoverſi intorno al punto M. E però invece di ridurre in V la reſiſtenza della pala baſta duplicare la reſiſtenza $M+f^2dS^2$ propria del punto V, sì che il compleſſo di tutti gli oſtacoli ridotti in V ſarà

$$\omega+2M+2f^2dS^2+N'$$

Se dunque ſi divida la forza motrice $\dfrac{(F-p)\,MP}{MV}$ per tutto queſt' aggregato di oſtacoli, ſarà $\dfrac{(F-p)MP}{MV(\omega+2M+2f^2dS^2+N')}$ la forza acceleratrice aſſoluta coſtituita in V. E ſe di nuovo ſi divida queſta forza acceleratrice per la diſtanza VM, ſarà $\dfrac{(F-p)\,MP}{\overline{MV}^2(\omega+2M+2f^2dS^2+N')}$ la forza acceleratrice angolare, con cui l' angolo VMV' va creſcendo, cioè mettendovi i valori di PM, VM ſarà queſta forza eſpreſſa dalla formula

$$\frac{(F-p)(M+f^2dS^2+g^2\mathcal{Q}^2)(aM+af^2dS^2+(a+b)g^2\mathcal{Q}^2)}{b^2g^4q^4(\omega-2M+2f^2dS^2+N')}$$

cui faremo per brevità $=C$.

Eſſendo dunque Z l' altezza dovuta alla velocità finale acquiſtata dopo percorſo di moto accelerato lo ſpazio S, e pe' principj Dinamici ſtando $dZ:dS=1$: alla forza acceleratrice, avrà neceſſariamente luogo l' equazione $dZ=\frac{dS}{C}$, e integrando $Z=\int\frac{dS}{C}+$ coſt. Come poi pe' medeſimi principj è $dS:\sqrt{Z}=dT$, ſarà integrando $T=\int\frac{dS}{\sqrt{Z}}+$ coſt., ch' è il tempo impiegato a percorrere lo ſpazio S.

§. XII.

Siamo pertanto paſſati col navilio dalla quiete al conſeguimento della velocità, che dee da eſſo conſervarſi equabilmente in appreſſo. Ma l' equazione è unica, e due ſono le variabili, ch'ella abbraccia, sì che, ſe altronde non ſi pervenga a conoſcere o lo ſpazio S, o la velocità acquiſtata, tutto è indeterminato.

Sarebbe certamente far forza alla verità il trarſi d' impaccio per vie tortuoſe, mentre quella, che ci viene indicata da Natura, è diritta e piana. Giacchè dunque ſiamo uſciti dall' accelerazione del moto, ed abbiamo conſeguito la relazione tra lo ſpazio percorſo di moto accelerato e la velocità finale, che dee mantenerſi, ricorrere dobbiamo allo ſteſſo moto uniforme del navilio, introducendo per la velocità di lui quella ſteſſa, ch'è dovuta all'altezza incognita Z; e come le leggi di queſto moto uniforme ſono ben diverſe da quelle del moto accelerato, per mezzo di eſſe verremo in cognizione del valore Z, fermi tutti gli altri elementi ſuppoſti nel navilio. Allora ſarà facile lo ſvolgere la formula precedente, e il trovare sì lo ſpazio S percorſo di moto accelerato, e sì ancora il tempo impiegato, onde pervenire a quella tal velocità determinata. Per ora dunque laſceremo eſpreſſi così, come ſono generalmente, gli elementi di forze, inerzie ecc. differendo l' appropriar loro più adattate eſpreſſioni, ed applicazioni immediate al caſo di concretare la teoria, in cui faremo le correzioni convenienti alle formule poc' anzi trovate, onde avvicinarle al preciſo operare della Natura. E non ſenza ragione mi ſono aſtenuto dal farlo qui ſul bel principio, ſiccome quelle, che avrebbero reſa ſommamente inviluppata l'inveſtigazione del moto accelerato.

CAPITOLO IV.

Del movimento equabile del navilio a remi.

§. XIII.

Or poi che il navilio ha conſeguita la velocità finale dovuta all' altezza Z, ed è per conſeguenza ceſſata ogni accelerazione, il moto impreſſo alle maſſe perſevera, ſi perpetua per sè ſteſſo, e proſeguirebbe uniformemente, ſe la reſiſtenza dell' acqua, e dell' aria non vi foſſe. Biſogna dunque, che la forza motrice diſtrugga continuamente l' effetto di sì fatte reſiſtenze, nelle quali non reſta altramente perpetuato il movimento. Ma non ſono queſte ſole le reſiſtenze, nelle quali non reſta egli perpetuato, e che ſuſſiſtono a carico di lei anche nel moto uniforme. E' vero, che nel traſporto del navilio vien pure traſportata la maſſa del rematore, e quella del remo. Ma il moto comune non diſtrugge le accidentalità e le proprietà de' moti particolari, che ſi fanno nel navilio medeſimo, sì che ſe la ſponda regge il peſo del remo, il rematore tuttavia nell' agitarlo entro la barca non viene ſollevato in queſto moto comune dal diſpendio di forza, che dee impiegare nel moverlo. Lo ſteſſo accade dell' inerzia del rematore ſteſſo, la quale nella traslazione comune non ceſſa di rapire per sè una parte della forza motrice. Tutti queſti oggetti vanno meſſi in conto, e convien farne eſtimazione a parte a parte. Intanto mi ſo lecito di negligere la reſiſtenza dell' aria eſtremamente piccola in confronto di quella dell' acqua; e dell' altre faremo parola ſucceſſivamente. Queſto è il caſo in cui ha luogo il grande principio di tutte le macchine ſuſcettibili di riduzione a moto uniforme, cioè che la forza neceſſaria per conſervarvi il moto è uguale preciſamente a quella, ch' è neceſſaria per l' equilibrio, ſia poi comunque ſi vuole celere o tardo il moto impreſſo; e perciò poſſiamo accignerci direttamente a queſta ſeconda indagine, non avendo d' uopo che de' principj comuni della Statica per farlo.

lo. Ma ſe non abbiamo per queſto verſo gravi difficoltà da ſuperare, è ben malagevole aſſunto il depurare la materia da ogni ſuppoſizione, e non ammettere nella teoria che coſe di fatto, e quelle realmente, che ſono immediatamente proprie della navigazione a remi. Il vedremo qui appreſſo.

§. XIV.

Il primo oggetto pertanto che ci ſi offre da conſiderare ſi è l' obbliquità variabile del remo nell' azione, obbliquità che affetta continuamente e modifica l' energia della potenza motrice. In fatti ſe ſia *PMR* (*fig. III.*) la ſituazione del remo in atto di eſſere immerſo con la pala nell' acqua, è certo, che in ogni iſtantaneo moto di lui, per cui paſſi nella ſituazione *pMr*, varia la direzione della forza in *P* per riſpetto al remo, e varia pure l' angolo ſotto di cui vien fatta con la pala l' impreſſione nell' acqua; il che rende mutabili ad ogni iſtante i momenti riſpettivi relativamente al punto fiſſo *M*. Ma come il rematore agiſce ſempre parallelamente alla chiglia; così l' angolo variabile, che fa la direzione di lui col remo, è l' angolo ſteſſo che fa il remo ad ogni iſtante con la chiglia; il qual angolo a mezzo la palata incirca è retto, e devia poi di qua e di là dal retto con tal legge, che ſe l' energia del rematore va creſcendo dal principio dell' immerſione fino a mezza la rivoluzione PP', di là prende ella coſtantemente a decreſcere per uguali gradi, finchè torna alla condizione di prima. Ora perchè la intera rivoluzione PP' è piccola, e di poco s' allontana dalla perpendicolarità con la chiglia la direzione del remo anche nella maggior declinazione, aſſumeremo ſenza timore di errare un certo angolo ϕ non molto minore di un retto, quaſi foſſe egli la coſtante direzione del remo con la chiglia nell' intera rivoluzione. Prendendo pertanto l' unità per raggio, e facendo $1 : \text{ſen.}\ \phi = F : F\,\text{ſen.}\,\phi$, ſarà non già F la forza motrice, ma $F\,\text{ſen.}\,\phi$. E parimenti eſſendo per angoli obbliqui non molto minori del retto l' impulſione che riſulta dall' urto obbliquo d' un fluido contro un piano, in compoſta ragione del piano, che la ſoſtiene, del quadrato della velocità, e del quadrato del ſeno dell' angolo d' incidenza, ſarà la reſiſtenza che incontra la pala non già g^2y, ma g^2y ſen.$^2\phi$.

§. XV.

Ciò premeſſo, un articolo ben più dilicato ci ſi fa innanzi da ſvolgere; a torto non avvertito da chicheſſia, intorno alla direzione del moto indotto nel navilio da' remi. L' eſperienza giornaliera il dimoſtra, ſe la teoria noſtra da per sè non lo paleſaſſe con la ſcoperta che abbiamo fatto di un centro ſpontaneo di rotazione ſuor del navilio, che ſi verifica nel remare, che eſercitandoſi il remo naturalmente e ſenza artifizio del rematore da una ſola parte del navilio, queſto andrebbe realmente in giro, ben lontano dal prendere una direzione per linea retta, come gratuitamente ſi ſupponeva; al che non s' è fatto mai attenzione, quaſi foſſe per sè retto il movimento, che non è, ſenza l' ajuto di artifizj particolari che alla rettitudine il coſtringono. Sempre e in tutti i caſi camminando per retta linea un navilio a' remi, egli è di moto compoſto, che ſi fa queſto movimento retto. Imperciocchè ſe il navilio ha timone, e ſe ſieno i rematori diſpoſti da una parte, rettificaſi da lui il cammino ad ogn' iſtante, ſi che tiene una via di mezzo il navilio tra due sforzi coſpiranti. E ſe non v' abbia timone, ſuſſiſtendo i rematori da una ſola parte, eſſi non remigano continuamente a palata diſteſa e naturale, per cui andrebbe aſſolutamente in giro il navilio, ma sì bene torcono e rettificano eſſi medeſimi il deviar del navilio dalla retta col ricevere deſtramente l' impreſſione ſpontanea dell' acqua ſu la pala, perchè rivolgaſi a deſtra la chiglia, ſe il deviamento di lei naturale foſſe a ſiniſtra, e per converſo; di modo che fanno con le pale continuamente le veci del timone. Che poi vada il navilio di moto compoſto allorchè è ſollecitato da uguali sforzi di rematori collocati a deſtra e ſiniſtra, ella è coſa sì evidente, che non ha biſogno di dimoſtrazione. Queſta realtà di moto compoſto non è poi sì indifferente, che meſſa in lume non porti un eſſenziale cangiamento nell' eſtimazione del viaggio del navilio, che ci allontana da tutto ciò, che i Geometri citati qui innanzi ci hanno laſciato ſcritto ſu queſto particolare. Sia pertanto V l'altezza da cui ſcendendo un grave di moto accelerato acquiſta in fine la velocità conveniente al punto V. E' certo che queſta velocità appropriata al punto della ſponda V, ove non è coſtituita che una delle forze laterali del ſiſtema, non può mai attribuirſi al navilio, nè può ad eſſo aſſegnarſi il movimento ſolo dipendente dall' impulſione obbliqua alla chiglia, ch' ei riceve in V, dovendo quello riſultare in ogni caſo dalla combinazione di queſt' impulſione con un' altra, perchè il navilio s' incammini, e mantengaſi nella voluta direzione. La velocità dunque di lui non eſſendo dovuta ad V, ma ad una funzione di V, che abbiamo detto Z, facciamoci a rintracciarla. Per farlo adeguatamente conſidereremo ſempre il navilio promoſſo dalla combinazione di due remi collocati alle due ſponde, potendo a due remi ridurſi il ſiſtema di quanti remi ſi vogliano combinati come vedremo. E come abbiamo per facilità aſſunto il ſimbolo φ per eſprimere un certo angolo coſtante, che vuolſi ſupporre fatto col remo sì dalla forza motrice, che dall' impreſſione dell' acqua in ogni palata; così prenderemo la lettera μ per denotare l' angolo che fa in V con una retta perpendicolare alla chiglia la direzione del moto del punto V nel navilio, mentre il ſiſtema dall' una e dall' altra parte fa nel remigare una rivoluzione intorno al riſpettivo centro ſpontaneo, ch'è fuori del navilio. Condotta perciò una retta AB (*fig. IV.*) per V perpendicolare alla chiglia, rappreſentando PR, $P'R'$ le prime ſituazioni de' remi laterali, ſieno $CV'A$, DVB gli angoli aſſunti μ; e prolungando le direzioni VC, VD sì che concorrano in Q ſi eſpongano le Qb, Qc tra di sè uguali, le quali rappreſentino le velocità $\sqrt{V}$ de' punti V', V del navilio. Condotte cN bN parallele a Qb Qc, e tirata la diagonale QN, ſarà ella la direzione, e velocità compoſta del navilio, com' è manifeſto. Condotta bd perpendicolare a QN, ſarà l' angolo $Qbd = QVA$, e però con la Trigonometria ſi troverà $Qd = \text{ſen.}\ \mu \sqrt{V}$; quindi $QN = 2Qd = 2\ \text{ſen.}\ \mu \sqrt{V}$ ſarebbe l' aſſoluta velocità del navilio, ſe non doveſſe ella incontrare altronde alcuna alterazione, di che nel paragrafo ſeguente.

§. XVI.

Non è poſſibile, che ſi renda efficace l'azione del rematore applicato al punto *P* del remo, ſe non v'abbia un punto fiſſo, che gli ſerva di appoggio. In fatti nell' atto di ſpinger oltre il remo ſi puntella egli co' piedi al navilio, e con quanta forza ſpinge il remo, con altrettanta reſpinge indietro il navilio medeſimo. Il Sig. *Eulero* alla pag. 196. lin. 12. eſtima queſta reſpinta all'indietro uguale all'intera forza del rematore, che per verità è molto maggiore del dovere. Imperciocchè ſi oſſervi attentamente il meccaniſmo del remare, e ſi vedrà che il rematore inclina il corpo all' innanzi, sì che nel puntellarſi non opera tutta la forza di lui direttamente nel far retrocedere il navilio. Rappreſenti *AB* (*fig.* V.) l' inclinazione del rematore nel promuovere il remo con le braccia, e ſi conduca la verticale *AC*, e l' orizzontale *BC*. Una parte della reazione ſi eſercita ſecondo la verticale *AC*, e l' altra *BC* rappreſenta la retroceſſione del navilio direttamente oppoſta al ſuo cammino ſecondo la chiglia. Secondo *AC* naſce un'immerſione momentanea del navilio nell'acqua, percettibile anche al ſenſo e reale, per cui creſce la ſuperficie f^2, che intendiamo eſſer diretta a ſolcar l'acqua. Se dunque vorremo nel computo traſcurare queſt' immerſione, non ſarà però lecito il far dare indietro il navilio ſecondo tutta la forza del rematore impiegata nello ſpingere il remo. Ma di più è contrario al fatto il ſupporre parallelo alla chiglia il moto indotto dal remo nel punto *V*, per il che abbiamo qui innanzi detto μ l' angolo obbliquo che fa quivi la direzione del moto con la perpendicolare alla chiglia; e però, qualunque ſiaſi la forza che reſpinge, eſſendo il moto che ne riſulta realmente nella direzione della chiglia, biſogna ſottrarlo non dal movimento obbliquo del punto *V*, ma sì bene dal moto diretto ſecondo la chiglia, che viene indotto dalla coſpirazione delle forze laterali. Intanto ſe *AB* rappreſenti la forza F ſen. ϕ (§. XIV.) applicata al remo, e ſi chiami Δ l' angolo *ABC*; ſarà la forza *BC* che fa dar indietro il navilio ſecondo la chiglia $= F$ ſen. ϕ coſ. Δ, la quale pongaſi $= f^2 M$; e però $2 f^2 M$ ſarà la forza reſpingente per conto de' due remi laterali, cioè uguale ad un volume d' acqua avente per baſe la ſuperficie f^2 del navilio, e per altezza $2M = \frac{2}{f^2}(F\,\text{ſen.}\,\phi\,\text{coſ.}\,\Delta)$. In conſeguenza la forza aſſoluta, che dee eſſere uguale e contraria alla reſiſtenza, reſta di altrettanto debilitata, oppure a detta forza aſſoluta ſi aggiunge da vincere altrettanto di reſiſtenza, quanto è quella forza, con cui è reſpinto il navilio. Ora eſſendoſi trovato (§. XV.) $2\,\text{ſen.}\,\mu\sqrt{V}$ per l' eſpreſſione della velocità del navilio per un pajo di remi, ſarà la reſiſtenza di lui diretta e perpendicolare, indipendentemente dall' oggetto qui conſiderato, uguale a $f^2 4V\,\text{ſen.}^2\mu$; alla quale dando queſto nuovo aumento, ſe vogliaſi non fare alcun diffalco dalla forza aſſoluta, ſarà manifeſtamente la reſiſtenza totale $= f^2\left(4V\,\text{ſen.}^2\mu + \frac{2F\,\text{ſen.}\,\phi\,\text{coſ.}\,\Delta}{f^2}\right)$.

Al qual paſſo non giungo a comprendere, come ſi voglia poi (Mem: di Berlino ſopraccitate al §. XXV.) che, mentre il remo è in aria, poſſa aumentarſi il movimento del navilio, ſtante che, mentre il remo è in aria, progrediſce il navilio col moto impreſſogli mentre il remo è in acqua, moto in cui è già fatta la detrazione retrograda, e ch' è propriamente moto reſiduo; nè può altronde il navilio ricevere verun promovimento oltre a quello che ha già conceputo, eſſendo piuttoſto diſpoſto a ritardarſi, come vedremo qui appreſſo, mentre il remo è in aria, ſe la nuova impreſſione non rimetteſſe preſtamente in vigore, e rianimaſſe il movimento.

§. XVII.

Abbiamo avvertito nel §. XIII, che non è la ſola reſiſtenza dell' acqua alla prora, cui debba ſuperare la forza motrice nel moto uniforme, negletta quella dell' aria, avendovi pure l' inerzia del rematore, o una certa quantità di materia propria da muovere; e in oltre la reſiſtenza per conto del remo da agitare. Ma quanto è ſtata ragionevole coſa il conſiderare la prima nel moto accelerato, come realmente abbiamo fatto col ſimbolo ω, una ſola rifleſſione perſuaderà che nel moto uniforme dobbiamo aſtenerci dal tenerne conto. Imperciocchè è incontraſtabile, che l' equilibrio dipende dalla ſola quantità delle forze impellenti, e niente fa al caſo, che le forze ſollecitanti ſieno o nò accompagnate dall' inerzia. Ma appunto il moto uniforme non con altra forza ſollecitante ſi mantiene, che con quella, ch' è neceſſaria per l' equilibrio (§. xiii.), in conſeguenza l' inerzia di lei come in queſto così nel moto uniforme del navilio non vuol eſſere conſiderata. Siccome dunque faremo nell' ultimo Capitolo un' eſtimazione convenevole della forza motrice, adattata all' uomo, poſſiamo qui ommettere ogni altra di lei modificazione continuando a laſciarla ſotto il ſimbolo F. Reſta dunque, che veggiamo qual reſiſtenza provenga dal canto del remo. Ma è sì dilicato per mio avviſo queſt' argomento, che non poſſiamo diſpenſarci dall' entrare per conto di lui in una più lunga diſcuſſione. Fatto ſta primieramente che nella palata diverſi ſono gli accidenti del remo, e l' un dall' altro diſtinti sì nella poſizione, che nel movimento. Ma quanto a ciò di cui andiamo in traccia, ch' è l' impreſſione ſul navilio, è certo che tutto ſi riferiſce a quell' iſtante in cui riceve egli l' impulſo effettivo dal remo, e che gli altri ſono in certa guiſa ſtranieri all' oggetto principale, e puramente concomitanti. In un tempo tutto il remo è in aria; in un altro egli è tutto in acqua. Di queſti tempi non v' ha che una porzione ſola del ſecondo in cui ſi eſercita l' atto momentaneo dell' impulſione contro la ſponda V; il reſto vi conduce, ma non opera attualmente. Compreſa bene queſta diſtinzione, a cui avremo occaſione di ritornare in queſto medeſimo Capitolo, non poſſiamo confondere l' un con l' altro gli accidenti proprj di ogni intervallo, eſſendo ſucceſſivi non ſimultanei, sì che altro è l' eſercizio della medeſima forza motrice allorchè agita il remo in aria, l' attuffa nell' acqua, e dall' acqua il ritrae in ſeparati tempi. Ma ancora dobbiamo riflettere a due particolari, cioè che il remo primamente è portato dalla ſponda, e di più che il di lui centro di gravità cade ne' contorni dell' appoggio; il qual bilanciamento non fa l' ultima cura de' buoni coſtruttori de' remi. In conſeguenza per eſtimare adeguatamente la reſiſtenza del remo ſi dee prima ben conoſcere in che ella conſiſta, indi come ne' diverſi tempi della palata operi contro la forza motrice. Conſiſte ella dunque nell' opporre l' inerzia da ſuperare, e l' attrito ſu la ſponda. Imperciocchè eſſendo le parti del remo per coſtruzione ſenſibilmente in equilibrio intorno all' appoggio, non v' ha forza ſenſibilmente controagente, come ſarebbe ſe il centro di gravità ricapitaſſe a diſtanza notabile dalla ſponda; per la qual coſa l' inerzia ſola entra a reſiſtere, e lo sfregamento, come s' è detto. Ma l' una e l' altro debbono computarſi non adoperare altramente contro la forza motrice nel piccolo tempo dell' impulſione reale, ſpiegandoſi ſolamente in tutte le altre agitazioni del remo concomitanti, che abbiamo da quella accuratamente diſtinto. In fatti non è che in quel ſolo momento, che ſi verifica lo ſtato dell' equilibrio, ceſſata già ogni accelerazione, per la conſervazione del moto equabile, come ſe non vi aveſſe moto; e però quello eſſendo l' accidente iſolato, che dobbiamo eſtimare, ceſſa ogni conſiderazione sì per parte dell' inerzia, che per conto dell' attrito, quaſi in quel momento ſteſſe quieto il remo; e l' una e l' altro poi riaſſumono il loro vigore in tutti gli altri intervalli precedenti e ſucceſſivi, ne' quali non ha luogo la contemplazione dell' equilibrio, e dee il rematore maneggiare effettivamente il remo come corpo inerte, ſtriſciarlo ſull' appoggio, girarlo, il che non fa al caſo noſtro, non entrando queſte azioni del rematore, ſeparate da quella, nelle noſtre formule, in cui non ſi valuta, che l' eſercizio neceſſario per la conſervazione del moto equabile. Depurato pertanto queſt' articolo, e conoſciuta la parte, che hanno queſte reſiſtenze nella palata, reſta nel moto equabile da metterſi a calcolo quelle ſole reſiſtenze che fa l' acqua per oppoſti verſi alla prora, e alla pala, negletta l' aria, come faremo.

§. XVIII.

Ma ſe non è lo sfregamento del remo contro la ſponda un nodo in linea di attrito, uno ve n' ha, di cui non s' è fatto mai parola, il quale è ben altra coſa da quello, ed influiſce nelle eſtimazioni de' moti eſſenzialmente. Il navilio nell' avanzare fa un ſolco più o men profondo ſecondo l' immerſione di lui nell' acqua, per cui ſi divide ella e ſtriſcia ai fianchi, e pel fondo. Non è egli queſto il caſo di un vero attrito, che coſtituiſce una giunta di reſiſtenza da vincere per la forza motrice, che non dovrebbe traſcurarſi? Egli ha luogo e a remi, e a vela, e in qualunque modo ſi faccia la navigazione. Veramente ne hanno fatto cenno gl' illuſtri Signori d' *Alembert*, *Condorcet*, *e Boſſut* nell' eccellente libro pubblicato del 1777, che ha per titolo *Nouvelles Experiences ſur la reſiſtence des Fluides*, ma non ne hanno intrapreſo alcun valutamento. Il ſolo che abbia affrontato il quiſito dopo quell' epoca, cioè nel 1778, è ſtato il Sig. *Eulero*, come può vederſi nelle Memorie della Real Società di Parigi di quell' anno. Ma non è l' opera di lui che un poſſente tentativo di mano maeſtra, e la materia vuol eſſere reagitata sì per le ſomme difficoltà, che l' accompagnano, e sì ancora perchè non è riſtretta al caſo de' navigli in moto, ma s' attiene in generale alla reſiſtenza, che ſoffrono i corpi tutti nel muoverſi pe' fluidi. Se non mi foſſi propoſto di ſvolgere queſta teoria in modo, onde poterne fare immediata applicazione alla pratica, non ſarebbe ſtato difficile l' introdurre nell' eſpreſſione precedente della reſiſtenza un appropriato ſimbolo di più per queſto conto. Ma ſia permeſſo il preſcindere per ora da queſta particolare affezione de' navigli, ſinchè non meno la teoria di lei, che una delicata ſerie di eſperienze n' abbia meſſo in chiaro lume l' eſtenſione, e il vero valore. Sopra di che non laſcierò con le mie ſcarſe forze di adoperarmi in appreſſo, ſiccome ho fatto non ſenza frutto nell' indagine ſul moto oſcuriſſimo de' liquidi, che ho accennato nel principio del II. Capitolo di queſta Memoria.

§. XIX.

Ora ci biſogna definire la quantità dello ſforzo neceſſario in V, V', onde ſuperare la reſiſtenza del navilio. Si ripigli pertanto la fig. IV, e rappreſenti QN la forza aſſoluta uguale e contraria alla totale reſiſtenza di lui che abbiamo determinato al §. XVI. Eſſendo bQ, cQ le direzioni delle forze uguali applicate in VV' concorrenti in Q, ed eſſendoſi detto μ l' angolo QVA, compiuto il parallelogrammo $QcNb$, e condotta bd normale a QN, poichè

$\mathcal{Q}N = f^2 \left(4V \text{ſen.}^2 \mu + \frac{2F \,\text{ſen.}\, \phi \,\text{coſ.}\, \Delta}{f^2} \right)$, ſe ſi faccia

$$\text{ſen.}\, \mu : \text{ſen.}\, T \left(= 1 \right) = \mathcal{Q}d \left(= \frac{\mathcal{Q}N}{2} \right) : \mathcal{Q}b$$

ſi troverà che la formula (*A*)

$$(A) \ldots\ldots f^2 \left(2V \text{ſen.}\, \mu + \frac{F \,\text{ſen.}\, \phi \,\text{coſ.}\, \Delta}{f^2 \,\text{ſen.}\, \mu} \right)$$

è la parte di reſiſtenza totale , che va a peſo di ognuno ugualmente de' punti VV', ove ſono applicati i remi . La ſi faccia per brevità $= \mathcal{Q}$.

§. XX.

E qui per ultimo ci rimane da conſiderare un articolo importantiſſimo , prima di comporre gli elementi determinati qui innanzi . Certo è , che tanto nel moto accelerato quanto nell' uniforme , di cui trattiamo preſentemente , eſſendo eſſenzialmente diſtinto in ordine al promuovere il navilio , l' operar del rematore nelle diverſe azioni di un' intera palata , efficace ſoltanto in parte , ſopra di che abbiamo ragionato diffuſamente al §. XVII , ſi vede manifeſtamente che non è continua l' impulſione di lui ; e però qualche coſa avvi di aſcoſo in queſto , che merita dilucidazione , e che neceſſariamente importerà qualche modificazione ne' ſuddetti elementi . Io la concepiſco in queſta guiſa . Fatta l' impreſſione del remo alla ſponda del navilio , e laſciato queſto a sè ſteſſo , prende egli neceſſariamente a muoverſi come un corpo lanciato in un mezzo reſiſtente , perdendo ad ogni iſtante una particella di ſua velocità , sì che , come il fatto giornaliero il comprova , paſſando per tutti i gradi di moto ritardato tornerebbe alla quiete di prima , ſe nuova forza non ſopraggiugneſſe a rimetterlo in movimento . Quanto più dunque è lungo l' intervallo inefficace , che paſſa tra un' effettiva impulſione ed un' altra , cioè quanto è più tardo il rematore nel rimettere in azione impulſiva il remo , tanto più perde di ſua celerità il navilio , e vie maggior impulſo ſi richiede per fargliela ripigliare . E parimenti quanto è più durevole e continuata l' impreſſione che fa la pala nell' acqua , relativamente a detto intervallo inefficace o di neſſuna ſollecitazione, tanto meno ſi ritarda il navilio da un' impulſione all' altra, ovvero tanto più creſce l' effetto della forza motrice. In conſeguenza, ſe ſi chiami T il tempo dell' inefficacia da un' impulſione all' altra, t quello della durata di un' impulſione effettiva, ſecondo la ragione di t a T andrà eſtimata l' energia della ſorza contro una reſiſtenza data, o l' energia della reſiſtenza contro una forza data. Di modo che, ſe ſia F la forza, $\frac{t}{T}F$ potrà eſprimere l' azione continuata nel ſollecitare la reſiſtenza, oppure, eſſendo Q la reſiſtenza, $\frac{T}{t}Q$ ſarà quello che diventa detta reſiſtenza, mentre operi ſenza interruzione la ſorza F. Ed ecco che o moltiplicando la reſiſtenza per la ragione $\frac{T}{t}$, o la forza per $\frac{t}{T}$, ſi ſuppliſce all' interruzione, e torna lo ſteſſo, come ſe l' impreſſione della pala foſſe continua, e non reſtaſſe mai abbandonato a sè ſteſſo il navilio. Convien dunque mettere ovunque nelle formule noſtre $\frac{t}{T}F$ in luogo di F, oppure anche F', poſto $\frac{t}{T}F = F'$; e ſarà perpetuamente F' la forza del rematore ridotta a continuità. Per queſta via ſempliciſſima ſi rimedia ad un' irregolarità, ch' è inevitabile nel movimento de' navigli a remi, e che contemplata ſott' altro aſpetto potrebbe involgere in gravi difficoltà il maneggio delle formule.

§. XXI.

Premeſſo tutto queſto, facciamoci a conſiderare, che tre ſono le incognite quantità principali, che dobbiamo determinare in queſta teoria, cioè l' altezza Z dovuta alla velocità del navilio, l' altezza V dovuta alla velocità del punto V, e la corriſpondente altezza y per la velocità della pala. E quanto alla prima, non è difficile coſa il vedere, che eſſendoſi trovata (§. XVI.) l' eſpreſſione della reſiſtenza diretta e perpendicolare del navilio $=f^2(4V\,\text{ſen.}^2\mu+\frac{2F'\,\text{ſen.}\,\phi\,\text{coſ.}\,\Delta}{f^2})$ cioè uguale ad un volume d'acqua avente la ſuperficie f^2 del navilio per baſe, e $4V\,\text{ſen.}^2\mu+\frac{2F'\,\text{ſen.}\,\phi\,\text{coſ.}\,\Delta}{f^2}$ per altezza, ſarà manifeſtamente proporzionale queſt' altezza al quadrato della velocità con cui ſi muove il naviglio; e però ſi avrà toſto l' equazione

$$(B)\ldots\ldots 4V\,\text{ſen.}^2\mu+\frac{2F'\,\text{ſen.}\,\phi\,\text{coſ.}\,\Delta}{f^2}=Z$$

§. XXII.

Queſta ci fa ſtrada ad un' altra agevolmente, ſiccome quella ſenza di cui non era poſſibile l' eſprimere la vera velocità del centro della pala. E' vero che abbiamo eſpreſſa queſta velocità in iſtato aſſoluto per $\sqrt{y}$; ma conviene riflettere, che in tanto può eſſere attiva ſul navilio queſta velocità in quanto è maggiore di quella, con cui il navilio medeſimo è incamminato, non eſſendo queſto il caſo del principiarſi il moto dalla quiete. E' meſtieri dunque che l' effettiva velocità della pala ſia

$$\sqrt{y}-\sqrt{\left(4V\,\text{ſen.}^2\mu+\frac{2F'\,\text{ſen.}\,\phi\,\text{coſ.}\,\Delta}{f^2}\right)}=B$$

Non può pertanto eſprimerſi la reſiſtenza dell' acqua alla pala per $g^2y\,\text{ſen.}^2\phi$ (§. XIV.), ma sì bene per la formula $g^2B^2\,\text{ſen.}^2\phi$. Poſto ciò ſi ripigli il principio noſtro fondamentale (*Cap. II.*); e poichè M (*fig. III.*) è il centro ſpontaneo, intorno a cui conſideriamo farſi in ogni palata il movimento contemporaneo in parti oppoſte del navilio da V verſo V', e del centro della pala da R verſo R', il qual centro di moto è pur neceſſariamente centro di gravità degli oſtacoli o delle reſiſtenze coſtituite in V ed R (*ivi*), è manifeſto che dette reſiſtenze dovranno eſſere tra di sè in reciproca ragione delle velocità contemporanee de' punti V ed R. In conſeguenza eſſendo $\sqrt{V}$ la velocità del punto V, B

la velocità del punto R, ſarà $\mathcal{Q} : g^2 B^2 \,\text{ſen.}\,^2\phi = B : \sqrt{V}$, e però $g^2 B^3 \,\text{ſen.}\,^2\phi = \mathcal{Q}\sqrt{V} \ldots\ldots (\Delta)$. Soſtituendo pertanto in queſt' equazione i valori di B e $\mathcal{Q}$ ſi avrà l' equazione (C)

$$(C) \ldots\ldots f^3 \sqrt{V}(2f^2V \,\text{ſen.}\,^2\mu + F' \,\text{ſen.}\,\phi \,\text{coſ.}\,\Delta) - g^2 \,\text{ſen.}\,^2\phi \,\text{ſen.}\,\mu$$

$$\left(f\sqrt{y} - \sqrt{(4f^2V \,\text{ſen.}\,^2\mu + 2F' \,\text{ſen.}\,\phi \,\text{coſ.}\,\Delta)}\right)^3 = 0$$

§. XXIII.

Ottenute due equazioni reſta, che determiniamo la terza perchè col mezzo di tre equazioni tutta, ſiccome è evidente, poſſiamo ſvolgere e maneggiare la teoria, che abbiamo per mano. Ricorrendo pertanto al principio generale delle macchine pervenute al moto uniforme, di cui nel §. XIII, cioè che la forza neceſſaria per mantenerlo è quella preciſamente che è neceſſaria per l' equilibrio, e combinandolo col noſtro rifletteremo, che non avendo la forza motrice nel moto equabile del navilio a ſuperare, come s' è detto, che la reſiſtenza dell' acqua alla prora e alla pala per oppoſti verſi, non abbiamo che ad eguagliare il momento della forza a quello delle reſiſtenze per l' equilibrio. Intanto eſſendo (§. XIV.) $F' \,\text{ſen.}\,\phi$ l' eſpreſſione della forza motrice applicata in P (*fig. III.*), ſarà il momento di queſta forza

$$F' . PM \,\text{ſen.}\,\phi = F' \,\text{ſen.}\,\phi\,(a + MV).$$

Si è poi trovato eſſere $\mathcal{Q}$ l' eſpreſſione (§. XIX.) della reſiſtenza parziale contro cui dee agire la forza motrice col mezzo del remo in V; e però ſarà $\mathcal{Q} . MV$ il momento di queſta reſiſtenza. Ma dovendo diſtribuirſi la forza così nel vincere queſta reſiſtenza, come nel ſuperare la reſiſtenza dell' acqua al centro della pala, e ciò contemporaneamente; per il che ſi è dimoſtrato eſſere il centro ſpontaneo M in ſituazione, onde rendere uguali tra di sè i momenti di queſte reſiſtenze; è manifeſta coſa, che per l' equilibrio dovrà uguagliarſi il momento della forza motrice ad entrambi queſti eguali momenti intorno ad M, oppure al doppio di uno qualunque di eſſi. In conſeguenza biſognerà che ſia per l' equilibrio, cioè pel caſo del moto equabile del navilio il momento della forza $F \,\text{ſen.}\,\phi\,(a + MV) = 2\mathcal{Q} . MV$. Ora per trovare il valore di MV, eſſendo diviſa $VR = b$ in M in reciproca ragione delle reſiſtenze ſituate in V ed R, ſe ſi faccia $\mathcal{Q} + g^2B^2 \,\text{ſen.}\,{}^2\phi : g^2B^2 \,\text{ſen.}\,{}^2\phi = b : MV$, ſarà $MV = \dfrac{bg^2B^2 \,\text{ſen.}\,{}^2\phi}{\mathcal{Q} + g^2B^2 \,\text{ſen.}\,{}^2\phi}$. Soſtituendo dunque nell' equazione precedente il valore di MV, e mettendo $\dfrac{\mathcal{Q}\sqrt{V}}{B}$ in luogo di $g^2B^2 \,\text{ſen.}\,{}^2\phi$ (§. XXI.), ſi avrà l' equazione (D)

$$(D) \ldots\ldots F' \,\text{ſen.}\,\phi \left(aB + (a + B)\sqrt{V}\right) - 2b\mathcal{Q}\sqrt{V} = 0,$$

ch' è la terza ricercata

§. XXIV.

Ma non è un ſolo il rematore, che può al medeſimo remo applicarſi; e può a' remi collocati in diverſe ſituazioni del navilio applicarſi diverſo numero di rematori. Si chiami dunque n il numero totale de' rematori da una parte del navilio, n' il numero de' remi; è evidente che tutto può ridurſi ad un ſol remo concependolo afferrato da n rematori, e concentrando nella pala di lui un numero n' di ſuperficie g^2. In conſeguenza per rendere generale la ſoluzione biſogna adattare le formule a tutti i caſi, e però convien mettere da per tutto nF' in luogo di F', $n'g^2$ in luogo di g^2, sì che le equazioni noſtre generali, rimeſſi i valori, ſaranno

$$(\mathrm{I}) \ldots\ldots \frac{1}{f^2}\left(4f^2V \,\text{ſen.}\,{}^2\mu + 2nF' \,\text{ſen.}\,\phi \,\text{coſ.}\,\Delta\right) - Z = 0$$

$$(\mathrm{II}) \ldots f^3 \sqrt{V}\left(2f^2V \,\text{ſen.}\,{}^2\mu + nF' \,\text{ſen.}\,\phi \,\text{coſ.}\,\Delta\right) - n'g^2 \,\text{ſen.}\,{}^2\phi \,\text{ſen.}\,\mu \left(f\sqrt{V} - \sqrt{\left(4f^2V \,\text{ſen.}\,{}^2\mu + 2nF' \,\text{ſen.}\,\phi \,\text{coſ.}\,\Delta\right)}\right)^3 = 0$$

$$(\mathrm{III}) \ldots anF' \,\text{ſen.}\,\phi \,\text{ſen.}\,\mu \left(f\sqrt{y} - \sqrt{\left(4V \,\text{ſen.}\,{}^2\mu + 2nF' \,\text{ſen.}\,\phi \,\text{coſ.}\,\Delta\right)}\right) + fnF' \,\text{ſen.}\,\phi \,\text{ſen.}\,\mu\,(a + b)\sqrt{V} - 2bf\left(2f^2V \,\text{ſen}\,{}^2\mu + nF' \,\text{ſen.}\,\phi \,\text{coſ.}\,\Delta\right) = 0$$

§. XXV.

In queſte tre equazioni abbiamo la ſoluzione completa della quiſtione, e in tutto il rigore matematico, che può eſſere compatibile con l' eſtrema complicazione de' fiſici elementi, che vi ſono meſcolati neceſſariamente. Prima pertanto di paſſare ad alcuna eſtimazione aſſoluta de' ſimboli introdotti, giova che ci fermiamo alquanto ſu la riſoluzione generale di queſte equazioni. E primieramente quanto alla velocità aſſoluta della pala dovuta all' altezza y poſſiamo agevolmente ricavarla dall' equazione (D) (§. XXIII.). Imperciocchè eſſendo da queſta equazione

$$B = \frac{2b\mathfrak{Q} - (a+b)F'\,\text{ſen.}\,\phi}{aF'\,\text{ſen.}\,\phi}\;\sqrt{V} = \sqrt{y} - \sqrt{(4V\,\text{ſen.}^3\mu}$$

$$+ \frac{2F'\,\text{ſen.}\,\phi\,\text{coſ.}\,\Delta}{f^2})$$

(§. XXII.) ſoſtituendo il valore di $\mathfrak{Q}$, e generalizzando la forza ſecondo un numero n di rematori ſarà

$$\sqrt{y} = \frac{f\sqrt{V}(4bf^2V\,\text{ſen.}^2\mu + 2bnF'\,\text{ſen.}\,\phi\,\text{coſ.}\,\Delta - n(a+b)F'\,\text{ſen.}\phi\,\text{ſen.}\mu)}{afnF'\,\text{ſen.}\,\phi\,\text{ſen.}\,\mu}$$

$$+ \frac{anF'\,\text{ſen.}\,\phi\,\text{ſen.}\,\mu\sqrt{(4Vf^2\,\text{ſen.}^2\mu + 2nF'\,\text{ſen.}\,\phi\,\text{coſ.}\,\Delta)}}{afnF'\,\text{ſen.}\,\phi\,\text{ſen.}\,\mu}$$

valore, il quale dipende dalla velocità $\sqrt{V}$, ſiccome è naturale, come da eſſa pure dipende la determinazione della velocità $\sqrt{Z}$ del navilio (§. preced.), e dagli altri valori aſſunti. Dobbiamo dunque rivolgerci a ricavare dalle equazioni precedenti l' equazione in V, che ci biſogna. Si ripiglino pertanto le equazioni (Δ) (§. XXII.), e (D) (§. XXIII.), che più agevolmente poſſono maneggiarſi, e non difficilmente, ſcacciando la lettera B, ſi perverrà all' equazione ſeguente

$$g^2V(2b\mathfrak{Q} - (a+b)F'\,\text{ſen.}\,\phi)^3 = a^3F'^3\,\mathfrak{Q}\,\text{ſen.}\,\phi$$

ſoſtituendo in queſta il valore di $\mathfrak{Q}$ (§. XIX.); e ponendovi il ſimbolo ſecondo il numero n de' rematori, e il numero n' de' remi, ſi avrà l' equazione finale in V della forma (R)

$$(R)\ldots n'g^2V(4bf^2V\,\text{ſen.}^2\mu + 2bnF'\,\text{ſen.}\,\phi\,\text{coſ.}\,\Delta$$

$$-(a+b)nF'\,\text{ſen.}\,\phi\,\text{ſen.}\,\mu)^3 - a^3n^3F'^3\,\text{ſen.}\,\phi\,\text{ſen.}^2\mu(2f^2V\,\text{ſen.}^2\mu$$

$$+ nF'\,\text{ſen.}\,\phi\,\text{coſ.}\,\Delta) = 0$$

ed eccoci pervenuti alla finale equazione, dalla cui riſoluzione dipende lo ſviluppamento dell' intera teoria ſiccome il vedremo ne' ſeguenti Capitoli.

CAPITOLO V.

Rettificazione degli elementi aſſunti nel moto accelerato del navilio.

§. XXVI.

Ci atterremo alla ſoluzione, che abbiamo dato di queſto queſito al §. XI. cui biſogna qui ripigliare con la fig. III. Ed in primo luogo dobbiamo conſiderare il punto V come ſponda del navilio, a cui è applicato il remo, ſeparando, ſiccome abbiamo fatto nel Cap. precedente, il movimento di queſta da quello di lui ch' è compoſto (§. XV.) di due combinati inſieme. E però cominceremo dal modificare la forza motrice F operante ſul remo in P coll' angolo di direzione ϕ, sì che intendendo di ridurla al punto V, diverrà $\frac{MP}{MV}.F\,\text{ſen.}\,\phi$ la vera forza ſollecitante il navilio in V immediatamente; ma non dobbiamo qui tralaſciare di debilitare queſta forza per conto dell' attrito del remo alla ſponda, come s' è fatto nel §. XVII, perchè non ha luogo la conſiderazione nè del moto equabile ivi contemplato, nè quella dell' equilibrio equivalente, e però ſarà ella $\frac{MP}{MV}(F-p)\,\text{ſen.}\,\phi$, cioè $\frac{MP}{MV}(F'-p)\,\text{ſen.}\,\phi$, ridotta a continuità (§. XX.). Ma come s' è fatto della forza motrice, così fa d' uopo determinare, e ridurre in V il compleſſo di tutti gli oſtacoli diſtribuiti per diverſe parti del remo, dandolo ivi a carico della forza; di modo che dividendo queſta per tale compleſſo ſi abbia la forza acceleratrice aſſoluta coſtituita in V. L' inerzia intanto inſeparabile dalla forza motrice, ch' è l' uomo, il quale dee muovere una parte di sè ſteſſo, s' è detta ω, ed accompagna in V la forza nel traſporto di lei dal punto P; nè poſſiamo traſcurarla come nel caſo del moto equabile (§ XVII.). Ma non poſſiamo neppure traſcurare l' inerzia del remo, cui abbiamo detto N, e però riducendola al punto V, ſe foſſe queſto punto ſenſibilmente diſtante dal centro di gravità di lui, la ſi denomini N', sì che $\omega + N'$ ſarà l' aggregato di queſte due reſiſtenze in V. Reſta da mettervi la maſſa, e le reſiſtenze del navilio alla prora, e alla pala nel cacciar l' acqua. Ma come abbiamo neceſſariamente aſſunto il ſiſtema di due remi uno a deſtra, e l' altro a ſiniſtra della direzione della chiglia (*fig IV.*), non può darſi a carico di ciaſcheduna delle forze in V, V', che la metà della maſſa M del navilio; e però di nuovo per conto di un remo ſarà $\omega + N' + \frac{M}{2}$ il compleſſo degli oſtacoli in V, non computate ancora le reſiſtenze dell' acqua.

§. XXVII.

Quanto dunque alla reſiſtenza per parte della pala, ſarà ella nel centro $R = g^2\,\text{ſen.}^2\phi\,(RR')^2$ (§. X. *fig. III.*). Ma facendo $VM : MR = g^2\,\text{ſen.}^2\phi\,(RR')^2$: ad un quarto proporzionale, ſarà $\frac{MR}{VM} \cdot g^2\,\text{ſen.}^2\phi\,(RR')^2$ l' eſpreſſione di detta reſiſtenza traſportata in V. E quanto alla reſiſtenza per parte del navilio dobbiamo definire la parte, che cade a carico di un remo nel punto V. Per ciò fare eſattamente dobbiamo conſiderare, che lo ſpazio iniziale dS percorſo dal punto V in un tempetto infinitamente piccolo può aſſumerſi come fatto di moto uniforme. Per la qual coſa ripigliando il ragionamento fatto nel §. XIX del Cap. precedente, e rifacendo la coſtruzione ivi eſpoſta pel moto uniforme finito, ſi troverà pel piccolo moto uniforme iniziale del navilio, che ſe eſprimaſi con lo ſpazio iniziale dS la velocità del punto V, la velocità del moto compoſto di lui in quel medeſimo tempetto ſarà $2\,\text{ſen.}\,\mu\, dS$, e però $f.^2 4\,\text{ſen.}^2\mu\,(dS)^2$ la reſiſtenza di lui perpendicolare e diretta. Ma torna lo ſteſſo o ſi detragga dalla forza, che dee vincere queſta reſiſtenza, quell' azione che ſi eſercita nel far retrocedere co' piedi il navilio, di che s' è parlato nel §. XVI, o ſi aggiunga altrettanto di reſiſtenza a peſo di detta forza, quant' è l' azione con cui è reſpinto to il navilio; e però eſſendoſi trovato (§. XVI.) eſſere la forza reſpignente per conto di due remi $2F'\,\text{ſen.}\,\phi\,\text{coſ.}\,\Delta$, ſarà ella in queſto caſo $n(F'-p)\,\text{ſen.}\,\phi\,\text{coſ.}\,\Delta$, e però

$$f^2\left(4\,\text{ſen.}^2\mu\,(dS)^2+\frac{2\,(F'-p)\,\text{ſen.}\,\phi\,\text{coſ.}\,\Delta}{f^2}\right)$$ ſarà la reſiſtenza totale del navilio nel primo moto elementare. Facciamo pertanto, che QN (*fig. IV.*) rappreſenti, come prima, queſta reſiſtenza totale. Operando come nel §. XIX. troveremo, che la formula

$$f^2\left(2\,\text{ſen.}\,\mu\,(dS)^2+\frac{(F'-p)\,\text{ſen.}\,\phi\,\text{coſ.}\,\Delta}{f^2\,\text{ſen.}\,\mu}\right)=R$$

rappreſenta la reſiſtenza parziale del navilio, che va a carico di ognuno de' punti laterali V, V' ove ſono applicati i remi.

§. XXVIII.

In conſeguenza la ſomma di tutti gli oſtacoli traſportati in V ſarà

$$\omega+N+\frac{M}{2}+\frac{MR}{VM}\cdot g^2\,\text{ſen.}^2\,\phi\,(RR')^2+R=L.$$

Dividendo pertanto la forza motrice $(F'-p)\,\text{ſen.}\,\phi\,.\,\frac{MP}{VM}$ per queſto aggregato, ſarà $\frac{MP\,(F'-p)\,\text{ſen.}\,\phi}{VM.L}$ la forza acceleratrice aſſoluta coſtituita in V. E ſe di nuovo ſi divida queſta forza acceleratrice per la diſtanza VM, ſarà $\frac{(F'-p)\,\text{ſen.}\,\phi\,.\,MP}{\overline{VM}^2\,.L}$ la forza acceleratrice angolare. Reſta dunque, che ſi determinino le MR, MP, VM, RR' in valori della quiſtione. E' certo pertanto, che dovendo eſſere intorno al centro ſpontaneo M uguali i momenti delle reſiſtenze coſtituite in V ed R, dovrà la linea VR, che abbiamo detta b, intenderſi diviſa in M in reciproca ragione di dette reſiſtenze. E però, eſſendo $g^2\,\text{ſen.}\,\phi\,(RR')^2=I$ la reſiſtenza in R, e $\frac{M}{2}+f^2(2\,\text{ſen.}\,\mu$

$(dS)^2 + \frac{(F' - p)\,\text{ſen.}\,\phi\,\text{coſ.}\,\Delta}{f^2\,\text{ſen.}\,\mu}) + N' = H$ il compleſſo delle reſiſtenze parziali del navilio concentrate in V, laſciando ſuſſiſtere in P la forza accompagnata della ſua inerzia ω, ſe ſi faccia

$$H + I : I = b : VM$$
$$H + I : H = b : MR$$

ſarà $VM = \frac{bI}{H + I}$, $MR = \frac{bH}{H + I}$, e

$$VM : MR = I : H = VV' : RR' = dS : RR'$$

e però $I . RR' = H . dS = g^2\,\text{ſen.}^2\phi\,(RR')^3$, e $RR' = \sqrt[3]{\frac{H . dS}{g^2\,\text{ſen.}^2\phi}}$. Se dunque ſi ponga nell' eſpreſſione I il valore di RR', diverrà ella

$$\sqrt[3]{H^2\,dS^2 g^2\,\text{ſen.}^2\phi} = I'$$

Quindi $VM = \frac{bI'}{H + I'}$, $MR = \frac{bH}{H + I'}$, e $MP = VM + PV = a + \frac{bI'}{H + I'} = \frac{aH + aI' + bI'}{H + I'}$. Poſti tutti queſti valori nell' eſpreſſione antecedente L, diverrà ella $\omega + 2N' + M + 2R$, e l' eſpreſſione della forza acceleratrice angolare ſarà

$$\frac{(F' - p)\,\text{ſen.}\,\phi\,MP}{\overline{VM}^2 . L} = \frac{(F' - p)\,\text{ſen.}\,\phi\,(aH + aI' + bI')(H + I')}{bI'(\omega + 2N' + M + 2R)} = K$$

funzione di dS, e quantità invariabili del queſito. Ora Z è l' altezza dovuta alla velocità finale acquiſtata dopo che ſia percorſo dal navilio lo ſpazio S; ed è pe' principj di Dinamica $\frac{dS}{dZ}$ uguale alla forza acceleratrice K. Dunque ſi avrà l' equazione $\frac{dS}{dZ} = K$, e $\frac{dS}{K} = dZ$, e integrando

$$(P) \ldots\ldots Z = \int \frac{dS}{K} + \text{coſt. arb.}$$

§. XXIX.

Se dunque ſia come prima n il numero de' rematori, n' il numero de' remi da una parte del navilio, e ſi metta nel valore di K $n(F'-p)$ in luogo di $F'-p$, $n'g^2$ invece di g^2, e vi ſi mettano gli altri valori di H, I', ed R, sì che K diventi K', dopo tutte queſte ſoſtituzioni ſarà

$$(P') \ldots\ldots Z = \int \frac{dS}{K'} + \text{coſt. arb.}$$

l' equazione di relazione tra S e Z. In conſeguenza (§. XI.) il tempo finito impiegato nel percorrere queſto ſpazio ſi trarrà dall' equazione

$$T = \int \frac{dS}{\sqrt{Z}} + \text{coſt. arb.}$$

§. XXX.

Ed ecco riſoluta in tutta la ſua eſtenſione anche la parte di queſta teoria, che riſguarda il principio del moto del navilio a remi principiando dalla quiete. Imperciocchè avendo ſeparato queſta dall' altra, in cui il navilio prende e conſerva il moto uniforme con la velocità acquiſtata in fine della primitiva accelerazione, e avendole trattate entrambe co' principj proprj, non reſta che a collegarle inſieme per mezzo del comune elemento $\sqrt{Z}$, che è la velocità finale acquiſtata dal navilio dopo percorſo di moto accelerato lo ſpazio S, e diventa poi la velocità coſtante nel ſucceſſivo moto uniforme. Ma il valore di Z è ſempre in pronto dall' equazione (I) del §. XXIV, in cui dietro alla riſoluzione dell' equazione (R) del §. XXV ſiasi ſoſtituito il valore di V, e però non ſi avrà che a integrare la funzione differenziale $\frac{dS}{K'}$ della ſola variabile S, onde avere in quantità cognite lo ſpazio S; e toſto poi anche il valore del tempo T.

CAPITOLO VI.

Riduzione della teoria al fatto, e applicazione alla pratica.

§. XXXI.

Sciolti i nodi più complicati intorno al movimento de' navigli a remi, or ci biſogna venire al fatto, e avvicinare la teoria a ciò che realmente accade in queſta ſorta di navigazione. E primieramente è meſtieri che ad alcuni ſimboli delle noſtre formule ſi dia un conveniente valore aſſoluto per tutti i caſi, laſciando indeterminati gli altri, sì che ſieno ſuſcettibili di valore diverſo ſecondo i diverſi caſi. Ripigliamo pertanto l' equazione (*R*) (§. XXV.)

$$
\begin{aligned}
(R)\ldots\; n'g^2\,(&4bf^2V\,\text{ſen.}^2\mu + 2bnF'\,\text{ſen.}\,\phi\,\text{coſ.}\,\Delta \\
&-(a+b)\,nF'\,\text{ſen.}\,\phi\,\text{ſen.}\,\mu)^3 \\
&-a^3n^3F'^3\,\text{ſen.}\,\phi\,\text{ſen.}^2\mu\,(2f^2V\,\text{ſen.}^2\mu \\
&+nF'\,\text{ſen.}\,\phi\,\text{coſ.}\,\Delta) = 0
\end{aligned}
$$

ch' è finalmente il cardine di tutta la teoria, e veggiamo in primo luogo di ſoſtituire numeri aſſoluti in luogo de' ſimboli ϕ, μ, Δ. E quanto alla lettera ϕ, eſprime ella l' angolo, che fa la direzione del remo con la chiglia (§. XIV.), il quale realmente è variabile, come ſi è detto. Ma avendo fatto oſſervazione accurata ſull' eſcurſione del capo interno di un remo in azione in una Veneta Galera, mi ſono accertato che non arriva mai il remo alla ſua maſſima e più forzata obbliquità a fare un angolo con la chiglia maggiore di 70 gradi; e però ſe per un medio coſtante ſi aſſuma un angolo di 80, ſaremo più vicini al vero, che non avverrebbe pigliando la direzione di lui ſempre perpendicolare (Mem. di *Berl.* pag. 197.), sì che eſſendoſi preſa l' unità per raggio potrà pigliarſi $\text{ſen.}\,\phi = \frac{49}{50}$. Quanto poi all' angolo μ che fa in *V* (*fig. IV.*) la direzione del moto del punto *V* nel navilio con la retta *AB* perpendicolare alla chiglia, ſi rifletta, che tendendo il punto *V* a muoverſi intorno al centro ſpontaneo *M* (*fig. III.*) è giuſto che ſi pigli per la direzione di lui la tangente *DV* all' arco ch' egli prende a deſcrivere, la quale è perpendicolare al remo *PR* in *V*. In conſeguenza prolungando *RP* ſinchè s' incontri con la chiglia *TS* in *S*, ſarà l' angolo $DVT = \text{ang.}\, TSV$, cioè $\mu = \phi$. E come queſto ſi aſſume coſtantemente di 80°, potrà pure quello pigliarſi di tal valore, e però ſarà anche $\text{ſen.}\,\mu = \frac{49}{50}$ ſenza timore di errore.

Reſta dunque il ſolo $\text{coſ.}\,\Delta$ da definirſi (§. XVI.). Ho voluto ſu queſto pure inſtituire qualche oſſervazione in queſto modo. Vedendo che l' angolo Δ era ſommamente variabile, dipendendo dal più o meno d' inclinazione che fa di sè l' uomo nel diſtenderſi col corpo ſpingendo il remo, preſi a riconoſcere la relazione tra le due linee (*fig. V.*) *AC*, *BC* calando un perpendicolo dall' eſtremità delle mani ſteſſe del rematore in azione ſino al pavimento del navilio, e trovai avere la *AC* or maggiore, or minor ragione alla *BC* ſecondo le varie, e non determinabili circoſtanze sì del navilio, che del remare. Quindi è che ſenza alcuno ſcrupolo aſſumeremo quelle per eguali, e Δ per un angolo ſemiretto in via di angolo medio coſtante. Sarà dunque $\text{coſ.}\,\Delta = \frac{7}{10}$ proſſimamente. Soſtituendo queſti valori nell' equazione (*R*), ſi otterrà un' equazione non contenente, che gli elementi naturali e proprj del navilio, ſecondo il caſo; equazione che alla maſſima generalità uniſce tutto il rigore poſſibile in sì fatta materia.

§. XXXII.

Ma eſſendomi propoſto di ſvolgere diverſi caſi di queſta teoria, a ſolo titolo di ſchiſare l' inutile fatica di lunghe numeriche calcolazioni, ſupporremo per facilità negli eſempj, che gli angoli di direzione ϕ, μ ſieno retti, e ſia $\Delta = 60°$. L' equazione (*R*) ſi traſformerà nell' equazione (*S*)

$$(S) \ldots\ldots\; 128b^3f^6n'g^2V^4 - 96ab^2f^4nF'n'g^2.V^3$$
$$+ 24a^2bf^2n^2F'^2n'g^2.V^2 - (2a^3n^3F'^3n'g^2$$
$$+ 4a^3n^3F'^3f^2)V - a^3n^4F'^4 = 0$$

che è più trattabile, eſſendo ſempre in pronto l'equazione (R) per l'ultima eſattezza ne' caſi di vera occorrenza per la pratica.

§. XXXIII.

Molte importantiſſime conſiderazioni ci ſi porgono da fare nel maneggio di queſta equazione. Tutto vi può far figura di coſa indeterminata, e tanti ſono i problemi, che poſſono riſolverſi, quanti ſono i ſimboli aſſunti. Baſterà qualche eſempio per conoſcere il buon uſo che ſe ne può fare, ſenza che infruttuoſamente ſi vadano ſvolgendo diverſi caſi, che involgono la ſola fatica del calcolo. Ma sarà però utile coſa e neceſſaria, che ſi facciano alcune dichiarazioni, le quali aprono la via di fare ogni ſorta di eſperimento intorno alle formule trovate in tutte le particolari occorrenze della pratica. Nel trattare l'equazione precedente due vie poſſono prenderſi per l'omogeneità; una è quella d' introdurvi de' peſi aſſoluti, l' altra di procedere per miſure lineari. Volendo introdurre per la forza motrice un peſo equivalente in libbre ſarebbe neceſſario di ſoſtituire per tutte le quantità di queſta forma f^2R, g^2Q il peſo in libbre, che ha un priſma regolare d' acqua avente f^2, g^2 per baſe, ed R, Q per altezza. Ma trattando tutto con miſure lineari, come di piede e parti di piede, può la lettera F' eſprimere l' altezza, da cui cadendo liberamenre un grave acquiſta in fine della caduta la celerità, con cui muove le ſue braccia il rematore nel remare: miſura, a cui non è difficile il trovare un peſo equivalente. In queſto modo diventa pure omogeneo con V il valore di F', e con tutti gli altri. A queſto modo io m' atterrò in appreſſo laſciando la libertà a chi piaceſſe di far uſo dell' altro. Poſto ciò, è d' uopo conſiderare, che tanto è minore la forza dell' uomo, quanto è più grande la velocità con cui dee eſercitarla; e che però con una data velocità non potrà egli eſercitare, che una data quantità di forza. Se dunque ſi chiami A il peſo maſſimo, che può da un uomo eſſere tenuto ſoſpeſo lungamente con le braccia ſenza grave ſtento, purchè non gl' imprima alcun moto, e $\sqrt{B}$ la maſſima velocità di cui ſono capaci le braccia d' un uomo, ſe abbia a muoverle in aria ſenza alcuna ſtraniera reſiſtenza da vincere, è certo che detta A' la forza delle braccia d' un uomo, $\sqrt{F'}$ la velocità con cui dee muoverle in un caſo particolare, ſe ſia $A'=A$, l' uomo non può con le braccia eſercitare alcun movimento, eſſendo tutta la forza di lui impiegata nel reggere il peſo; e ſe ſia $B=F'$, non può egli eſercitare altra forza A', eſſendo tutto il ſuo sforzo meſſo nel muovere sè ſteſſo con quella maſſima velocità. Per verità non poſſono sì facilmente definirſi nè A, nè B per la grande variabilità loro, e non una ſolamente è la funzione con cui queſte alternative poſſono eſprimerſi adequatamente. Pure poſſiamo in via di eſempio afferrare qualche coſa, e prendendo per eſpreſſione generale col Sig. *Eulero* la formula $A'=A\left(1-\frac{\sqrt{F'}}{\sqrt{B}}\right)^2$ può ella ſoddisfare al biſogno; mentre poſto $F'=0$, diventa $A'=A$, poſto $B=F'$ diventa $A'=0$, e poſto F' minore di B, A' ha un valore ſempre minore di A, e più o men grande ſecondo ch' è minore o maggiore la ragione $\sqrt{F'}$ a $\sqrt{B}$. In queſto modo poſſiamo ridurre a peſo la forza dell' uomo, che ſi foſſe eſpreſſa per via di velocità, e per converſo, come vedremo, ſtabilito che ſiaſi il valore di A, e di B. Aſſumiamo, che non è fuor de' limiti, $A=$ libb. 50, $\sqrt{B}=8$ piedi del Reno in un minuto ſecondo, eſſendo il piè del Reno a quel di Parigi come 1000:1034,93. La noſtra formula diverrà $A'=50\left(1-\frac{\sqrt{F'}}{8}\right)^2$, e biſognerà eſprimere $\sqrt{F'}$ in piedi da percorrerſi uniformemente in un minuto ſecondo, il cui numero ſia m, e però la formula ſarà $A'=50\left(1-\frac{m}{8}\right)^2$. Se dunque foſſe $m=4$ piedi, ſarà la forza dell'uomo equivalente a libb. $12\frac{1}{2}$; e ſe foſſe neceſſario il valore di libb. 16 per la forza dell'uomo, non potrà la ſua velocità eſſer maggiore di piedi $3\frac{1}{2}$ per ſecondo. Avendo pertanto deſtinato di miſurare per queſto verſo la forza che ho detto F nelle formule precedenti, e diventando F' l'altezza dovuta alla velocità con cui debbono muoverſi le braccia del rematore, ſarà agevole il ridurre la forza motrice a un peſo conoſciuto.

§. XXXIV.

Per ciò fare, e perchè anche gli altri ſimboli V, Z, y entrano ne' noſtri computi ſotto figure di altezze dovute a certe velocità, è bene che ſi riducano le eſpreſſioni a forme trattabili. E' noto che un grave nel cadere liberamente dalla quiete per l'altezza di piedi 15,625 del Reno non impiega che un minuto ſecondo, e che con la velocità acquiſtata in fine di queſta caduta percorrerebbe nello ſteſſo tempo di moto uniforme piedi 31, 25. Ciò preſuppoſto, ſia in generale m il numero di piedi del Reno, che percorre di moto uniforme nel tempo t un grave con la velocità dovuta all'altezza F', ſarà

$$t = \frac{m}{\sqrt{F'}} = \frac{\sqrt{15,625}}{31,25} \cdot \frac{m}{\sqrt{F'}} = \frac{125m}{31,25\sqrt{1000F'}}$$

$$= \frac{4m}{\sqrt{1000F'}},$$ e però, fatto $t = 1''$, ſarà $\sqrt{1000F'} = 4m$, e

$$F' = \frac{16m^2}{1000} = \frac{2m^2}{125},$$ sì che dato il numero di piedi del Reno m percorſi uniformemente in un ſecondo, ſi avrà in piedi corriſpondenti l'altezza F', cui tale velocità è dovuta, e per converſo; il che è di comodità ne' calcoli indicibile, valendo per tutte le altezze, come ſono le aſſunte V, Z, y. Ciò premeſſo rivolgiamoci agli eſempj.

I. Eſempio

Trovare la velocità d' un navilio ſpinto uniformemente a remi, in cui 24 ſono i rematori, ed altrettanti i remi; la ſuperficie f^2 preſa alla maſſima ampiezza della prora di 6 piedi quadrati; di $\frac{1}{4}$ di piede quadrato la ſuperficie g^2 della pala, che s' immerge; di piedi quattro la parte interna a del remo, e di piedi 7 l' eſterna b. Sarà $n = n' = 12$.

Si ſoſtituiſcano queſti valori nell' equazione (S); e la relazione tra la forza motrice F', e l' altezza V dovuta alla celerità del punto, ſu cui poſa il remo nel navilio, ſarà

$$(\mathcal{Q}) \ldots 7^3.9V^4 - 6.9F'V^3 + 18.36F'^2V^2 - 360F'^3V - F'^4 = 0$$

Eſſendo documentati al §. XXXIII, che conviene economizzare la forza dell' uomo, sì che prenda colle braccia una velocità minore di 8 piedi all' m'', ſia la velocità dovuta all' altezza F' di ſoli piedi 2 per ſecondo. Si troverà (§. preced.) eſſere $F' = \frac{8}{125}$, e corriſpondere (§. XXXIII.) al peſo di libb. 28. circa. Soſtituito queſto valore per F' e riſoluta l' equazione ſi troverà, che una delle radici di lei è proſſimamente $V = \frac{1}{375}$. Determinato queſto valore per V ſi ripigli (§. XXIII.) la formula

$$(I)\ \frac{1}{f^2}(4f^2V \text{ſen.}^2\mu + 2nF' \text{ſen.}\,\phi \text{ coſ.}\,\Delta) -- Z = 0$$

e ſoſtituendovi i valori ſen. μ, ſen. ϕ, coſ. Δ (§. XXXII.), ſi avrà $Z = 4V + \frac{nF'}{f^2}$; e finalmente fatto $F' = \frac{8}{125}$, $f^2 = 6$, $V = \frac{1}{375}$, $n = 12$, ſi troverà $Z = \frac{18}{125}$. Dunque dovrà eſſere $\frac{18}{125} = \frac{2m^2}{125}$ (§. XXXIV.), e $m = 3$; e però la velocità del navilio ſarà di tre piedi per minuto ſecondo.

II. Eſempio.

Pigliamo per ſecondo eſempio il caſo del Sig. *Chazelles* riferito nelle Mem. della Real Soc. di Parigi per l' anno 1702: caſo preſo in conſiderazione così dal Sig. Daniele *Bernoulli* come dal Sig. *Eulero*. Oſſervò il Sig. *Chazelles*, che una palata con 26 remi per ogni lato, e cinque rematori per remo non faceva che 72 pertiche per minuto primo a voga forzata, cioè piedi $7\frac{1}{2}$ del Reno circa per minuto ſecondo. La parte interna del remo era di 12 piedi, e di 24 l' eſterna. Calcola egli, che la ſuperficie d' ogni pala operativa nel cacciar l' acqua foſſe di piedi quadrati $2\frac{1}{2}$. Non eſſendo lecito il ſupporre, che la ſuperficie reſiſtente alla prora foſſe di tale o di tal altra dimenſione, il che laſcerebbe un ragionevole ſoſpetto, che la ſi adattaſſe alla teoria, io mi limito a cercarla direttamente, giacchè non ne fa alcun cenno il Sig. *Chazelles*, in queſto modo. Dovendo eſſere Z l' altezza dovuta alla propoſta celerità della Galera, ſarà $Z = \frac{2m^2}{125} = \frac{2(7\frac{1}{2})^2}{125}$ (§. XXXIV.) $= \frac{9}{10}$; e poichè $n = 130$, ſoſtituendo queſti valori nell' equazione $Z = 4V + \frac{nF'}{f^2}$, ſi troverà $V = \frac{9f^2 - 1300\,F'}{40\,f^2}$. E qui prima d' inoltrarci forz' è definire un valore per F'. De' cinque rematori l' ultimo a capo del remo è più in azione di tutti, e confeſſa il Sig. *Chazelles*, che *celui qui eſt le plus près du point d' appui ne fait preſque point de force ni de mouvement*. Riflettendo che il primo rematore faceva in queſta voga forzata ſei piedi in $\frac{5}{6}$ di minuto ſecondo, come appunto calcola il Sig. *Bernoulli*, poſſiamo aſſai ragionevolmente attribuire ad ognuno de' cinque rematori tre piedi per ſecondo di velocità ragguagliata e continua (§. XX.); e però dovendo eſſere $\frac{2m^2}{125} = F'$, ſarà $F' = \frac{18}{125}$, e però $V = \frac{45f^2 - 936}{200f^2}$. Si ripigli ora l'equazione (S), e vi ſi ſoſtituiſcano i valori $n = 130$, $n' = 26$, $g^2 = 2\frac{1}{2}$, $F' = \frac{18}{125}$, e il valore trovato per V; e perchè cinque ſono i rematori, che tengono afferrato il remo diſugualmente lontani dal centro ſpontaneo, ſi aſſuma l'intervallo $a = 10$ piedi, e l'intervallo $b = 20$ piedi. Ma ſenza fare altre ſoſtituzioni nell'equazione (S), che quella di $V = \frac{45f^2 - 936}{200f^2}$, oſſervo, che ſi può trovare il valore di f^2 immediatamente, convertendoſi toſto l'equazione (S) nell'equazione (T)

$$(T) \ldots\ldots 128b^3f^6n'g^2\left(\frac{45f^2 - 936}{200f^2}\right)^4$$

$$-96ab^2f^4nF'n'g^2\left(\frac{45f^2 - 936}{200f^2}\right)^3$$

$$+24a^2bf^2n^2F'^2n'g^2\left(\frac{45f^2 - 936}{200f^2}\right)^2$$

$$-(2a^3n^3F'^3n'g^2 + 4a^3n^3F'^3f^2)\left(\frac{45f^2 - 936}{200f^2}\right) - a^3n^4F'^4 = 0.$$

Se ſi faccia pertanto la ſuperficie $f^2 = 20\frac{4}{5}$ piedi quadrati, i primi quattro termini ſvaniſcono, e rimane l'ultimo termine negativo. E ſol che ſi faccia $f^2 = 20\frac{7}{9}$ piedi quadrati, i quattro primi termini rieſcono tutti poſitivi, e preſi inſieme molto maggiori dell'ultimo termine negativo. In conſeguenza una delle radici dell'equazione determinata (T), in cui f^2 è l'incognita, è maggiore di $20\frac{7}{9}$, e minore di $20\frac{4}{5}$. E però la ſuperficie reſiſtente della Galera ſperimentata dal Sig.

Chazelles era tra queſti limiti coſtituita. Per queſta via ſi troverebbe, che non aſſegnando di velocità ragguagliata e continua (§. XX.) ad ogni rematore, che 2 piedi per ſecondo, cioè ponendo $F' = \frac{8}{125}$, avrebbe dovuto eſſere la ſuperficie f^2 tra $9\frac{11}{45}$, e $9\frac{10}{45}$ piedi quadrati. Si viene quindi reciprocamente in cognizione, che perchè poteſſe aver luogo la ſuppoſizione di $f^2 = 16$ piedi quadrati fatta dal Sig. *Eulero* (pag. 204. §. XXX.) per la ſuperficie di queſta medeſima Galera, avrebbe dovuto eſſere proſſimamente $F' = \frac{14}{125}$; e perciò la velocità di ogni rematore quaſi di $2\frac{3}{4}$ piedi per ſecondo; e ſarebbe ſtato in conſeguenza (§. XXXIII.) di libb. 21 creſcenti il peſo equivalente allo sforzo eſercitato da ognuno di loro; riſultamenti che ſe foſſero provenuti dalla teoria, come i noſtri, baſterebbero a far fede ampliſſima della bontà di lei; ma è dovuta ſolamente alla ſagacità dell' incomparabile Sig. *Eulero* la diſcreta ſuppoſizione, ch' ei fa della ſuperficie in quiſtione di 16 piedi quadrati, che dal calcolo non ſarebbe mai proceduta direttamente.

III. *Eſempio*.

Si dimanda qual ſorza avrebbe dovuto impiegare ogni rematore nella Galera del Sig. de *Chazelles*, perchè la velocità di lei foſſe di 10 piedi per ogni minuto ſecondo. Nella formula $\frac{2m^2}{125}$ (§. XXXIV.) ſi faccia $m = 10$; ſarà $Z = \frac{8}{5}$, e però nell' eſpreſſione $Z = 4V + \frac{nF'}{f^2}$ (*I. Eſempio*) ſi ponga $n = 130$, $f^2 = 20$ piedi quadrati, $Z = \frac{8}{5}$; ſi troverà $V = \frac{16 - 65F'}{45}$. Queſt' eſpreſſione è ſommamente comoda, ſiccome quella, che ſoſtituita nell' equazione (S), come abbiamo fatto nell' eſempio precedente, ci diſpenſa dalla riſoluzione dell' equazione. In fatti meſſo per V in (S) il valore trovato, abbiamo

$$128b^3f^6n'g^2\left(\frac{16-65F'}{45}\right)^4 - 96ab^2f^4nF'n'g^2\left(\frac{16-65F'}{45}\right)^3$$

$$+24a^2bf^2n^2F'^2n'g^2\left(\frac{16-65F'}{45}\right)^2$$

$$-(2a^3n^3F'^3n'g^2+4a^3n^3F'^3f^2)\left(\frac{16-65F'}{45}\right)-a^3n^4F'^4=0$$

Se pertanto ſia $F'=\frac{16}{65}$, tutto ſvaniſce fuorchè l'ultimo termine negativo; e ſe ſia $F'=\frac{17}{65}$, tutti i termini fuorchè l'ultimo diventano poſitivi, e di eſſo maggiori preſi inſieme. Di modo che una delle radici F' è coſtituita tra i limiti $\frac{16}{65}$, $\frac{17}{65}$. In conſeguenza, preſo il limite minore per la radice, ſarà $F'=\frac{16}{65}=\frac{2m^2}{125}$, e proſſimamente $m=4$ piedi. Converrebbe dunque, che con le braccia prendeſſe ogni rematore quaſi quattro piedi per ogni minuto ſecondo di velocità ragguagliata e continua (§. XX.), ſe prima ne aveva tre percorrendo il navilio nello ſteſſo tempo $7\frac{1}{2}$ piedi del Reno; la qual velocità è troppo grande. Imperciocchè eſſendo $F'=\frac{16}{65}=\frac{t}{T}F$ (§. XX.), per quanto celeremente poſſano i rematori trar dall' acqua, e rimettere in acqua il remo, perchè pochiſſimo ſtia in aria, è aſſai difficile, che ſia $t:T=1:2$; per il che il Sig. *Bernoulli*, e il Sig. *Eulero* aſſumono coſtantemente $t:T=1:3$, ragione pure non eſatta, come ho cercato di accertarmene poſſibilmente nella voga forzata di molti navigli; e però pigliando la ragione $T:t$ un po' più che dupla, e un po' men che tripla, cioè come $5:2$ per eſempio, dovrebbe eſſere $F' = \frac{16T}{65t} = \frac{5.16}{2.65} = \frac{2m^2}{125}$ (§. XXXIV.), e $m = 6$ piedi creſcenti per ſecondo, ch' è una velocità ragguagliata troppo forte per le braccia de' rematori, giacchè importa una celerità di ben nove piedi per ſecondo a carico del primo rematore, che non è ſoffribile.

§. XXXV.

E' inutile, che più mi diffonda in eſempj, potendo ognuno riſolvere da sè tutte le quiſtioni più importanti, che poſſono farſi intorno alla navigazione a remi col mezzo delle formule noſtre, sì per definire il movimento de' navigli nel principio, allorchè partono dalla quiete, come in appreſſo nel moto uniforme ch' eſſi prendono, e mantengono ſucceſſivamente. Così può conoſcerſi col beneſizio di loro qual ſia la ſuperficie g^2 da darſi al remo, quale il numero di eſſi n', quale il numero n de' rematori, e ſimili elementi, onde obbligare il remigante a moderato sforzo nelle lunghe navigazioni, e ſare con un navilio di data coſtruzione il maggior viaggio, che può eſſere conceduto. E ſimilmente potrebbero intraprenderſi diverſe ſoluzioni ricercando il maſſimo o il minimo negli elementi a piacere; ma non vo' abuſare del tempo, contentandomi di avere ſvolto nel modo che ho potuto migliore la teoria, e di avere ſomminiſtrato i mezzi di farlo non difficilmente. Un ſolo oggetto dimanda ancora una ben ſeria diſcuſſione, prima di dar fine, da cui m' aſterrei volentieri, ſe non poteſſe attribuirmiſi a colpa il tacere ſu coſa, che ſa tanta parte della Memoria del Sig; *Eulero*, e ſpezialmente delle ſue finali concluſioni in queſta materia. L' oggetto riſguarda la proporzione tra la parte eſterna e l' interna del remo, dal punto del navilio, ſul qual eſſo ripoſa: proporzione, cui quel grande Geometra cerca per ogni verſo di bene ſtabilire, e ſu cui ſonda l' eſſenziale di queſta navigazione. Non ne abbiamo fatto cenno in alcun luogo, per trattarne qui in fine, come la dignità della coſa richiede. Or poi che ſiamo certi eſſere il remo *PR* (*fig. III.*) una verga interpoſta tra due oſtacoli da muovere in contrarie parti, uno de' quali è il navilio medeſimo ſu cui poſa il remo; e che nella palata mentre il capo del remo dal punto P ſi trasferiſce in P', la ſponda del navilio V in V', il centro della pala da R in R', v' ha un punto immobile, come M fuor del navilio, che ho detto centro ſpontaneo, intorno al quale ſi fanno tutti queſti movimenti; è manifeſto che cangia aſpetto la coſa, e il punto V non è più che un ſito, ov' è applicato il remo PR ad una delle reſiſtenze del ſiſtema, sì che le lunghezze PV, VR vanno conſiderate diverſamente, che non facevaſi per l' innanzi, allorchè pareva che il punto V faceſſe altra funzione. Fa d' uopo pertanto conſiderare la quiſtione ſotto due differenti aſpetti, ch' ella può avere di ſpeculazione, e di pratica. Altro è in fatti l' aſſumere una verga immateriale PR pel remo ſteſa ſopra un piano, e la forza motrice P aſtratta e diſgiunta dal rematore; e tutt' altro il caſo d' una forza, che dee eſercitarſi in un tal modo dalle braccia d' un uomo ſopra un remo reale, ch' è un corpo peſante applicato alla ſponda di un navilio. Eſaminiamo per un poco l' una e l' altra condizione, e vedremo poi a quali concluſioni ci condurrà queſt' eſame. Nel primo caſo ſia la verga infleſſibile cogli oſtacoli in V ed R coſtituita in un medeſimo piano con la direzione pure della forza immateriale poſta in P. Dicaſi M la reſiſtenza in V, R la reſiſtenza in R, e tuttavia $PV = a$, $VR = b$. Per la natura del centro ſpontaneo M (§. VII.) ſi troverà $VM = \frac{bR}{M+R}$, $MR = \frac{bM}{M+R}$,

e $P.PM = P(PV + VM) = P.\frac{aM+(a+b)R}{M+R} = 2M.\frac{bR}{M+R}$

per l' equilibrio, cioè pel caſo del moto uniforme nella navigazione a remi, e però ſarà

$$aPM + aPR + bPR - 2MbR = 0$$

cioè $P = \frac{2bMR}{aM+aR+bR}$. Sia b moltiplice di a, come ſarebbe $b = na$, eſſendo n numero maggiore dell' unità. Soſtituendo queſto valore per b riſulta la formula $P = \frac{2nMR}{M+(n+1)R}$, da cui ſi rileva, che quanto maggiore del ſegamento PV ſarà il ſegamento VR, tanto più di forza P ſi richiederà per l' equilibrio co' medeſimi oſtacoli M ed R. Ciò ſi fa maggiormente chiaro dal ricavarſi ancora dalla formula ſuperiore

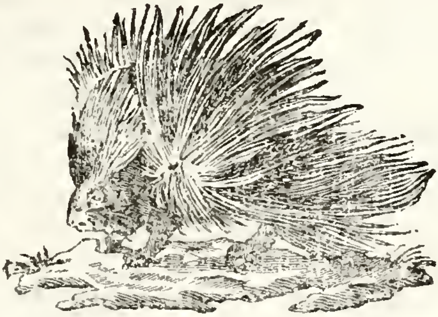
$$\frac{a}{b}=\frac{R(2M-P)}{P(M+R)}$$

mentre quanto maggior ragione la parte interna a della verga avrà all' eſterna b, tanto più ſarà $R(2M-P)>P(M+R)$, e però vie minore potrà eſſere la potenza P della quantità $\frac{2MR}{M+2R}$. Ciò è interamente contrario non ſolamente a quanto riſulta dalla teoria del Sig. *Eulero*, ma eziandio all' eſperienza comune. Ma ecco il vero ſciolgimento di queſto nodo; e per queſto ho detto, che biſognava conſiderare queſto articolo e dal canto ſpeculativo, e dal pratico inſieme. E' fuor di dubbio, che contemplato il ſuggetto in via aſtratta, non può avervi Meccanico, il quale, interpoſta una verga PR ſopra un piano tra due oſtacoli da muoverſi V, R per oppoſti verſi da una potenza in P, non riconoſca ſubito la realtà del centro ſpontaneo M, che abbiamo indicato, e non trovi pure reale il vantaggio per la potenza, che l' intervallo PV ſia maggiore dell' intervallo VR. E queſto inconcuſſo vantaggio è pure reale nella navigazione, ma non può eſſere atteſo in pratica per le ſeguenti ragioni. La potenza motrice in pratica è un uomo di altezza determinata PZ (*fig.* VI.), il quale dee poſare ſul pavimento del navilio. Il navilio ha neceſſariamente una ſponda coſtituita a qualche altezza FV dalla ſuperficie dell' acqua, ſu cui dee appoggiarſi il remo. Che giova, ſe, eſſendo per l' altezza dell' uomo determinato il ſito dell' applicazione in P, e per la poſizione data della ſponda V determinata pure dal più al meno la lunghezza eſterna del remo VR, inſegni la teorica, che vie maggior vantaggio avrebbe la potenza quanto maggiore dell' eſterna foſſe la lunghezza interna VP', mentre repugna, che poſſa il rematore collocarſi in P'? Ed ecco come, e perchè, fermo il riſultamento vero e giuſto della teoria, è coſtretta la pratica a rinunciare al beneficio, che quella le indica, adattandoſi alla ſtruttura dell' uomo, alla forma del navilio, e all' altezza della ſponda dal pelo dell' acqua; e per quello ancora che creſce coll' allungarſi del remo il peſo da maneggiare, l' inerzia

da

da vincere, e la reſiſtenza del ſoffregamento alla ſponda, mentre il remo è fuor d'acqua, come abbiamo accennato (§. XVII). Quindi è che per ſoddisfare a tutte queſte condizioni inſeparabili dal meccaniſmo del remare, s' adotta in pratica or una or altra proporzione, ſecondo i caſi, tra le parti del remo entro e fuori del navilio. Non è dunque lecito il fiſſare a piacere la ragione $\frac{a}{b}$, o ſecondo i dettami della teoria, dovendo ella adattarſi alle circoſtanze ſopraddette. E un altro oggetto finalmente biſogna appagare eſſenzialiſſimo, quello cioè di bilanciare il peſo delle due parti PV, VR, sì che il centro di gravità del remo cada ne' contorni di V, affinchè nel maneggiarlo fuor d' acqua abbiaſi la maggior poſſibile facilità il rematore, di che abbiamo parlato al §. XVII.

Non mi trattengo di più ſu queſto argomento, avendolo meſſo, per quanto mi pare, nel ſuo vero lume, e avendo moſtrato che non è da ſondarſi molto ſu la proporzione migliore di quelle parti ſecondo i principj della teoria per indi dedurre il moto più o meno vantaggioſo del navilio, non potendo la pratica adattarviſi per alcun conto, obbligata alle condizioni ſopraeſpreſſe non ſoggette all' arbitrio del Geometra.



MEMORIA

SECONDA ED ULTIMA

Sopra la riproduzione della Teſta nelle Lumache terreſtri (*).

Del Sig. Ab. LAZARO SPALLANZANI Regio Profeſſore di Storia Naturale nell' Univerſità di Pavia.

INTRODUZIONE.

NOn ſaprei dire ſe a giorni noſtri ſiavi ſtato fenomeno naturale, che per la ſua novità, e apparente ſtranezza fatto abbia tanto romore nel Mondo fiſico, dato abbia origine a tante eſperienze, e tutt' inſieme a riſultati sì diverſi, sì contrarianti, come il riproducimento del capo nelle lumache terreſtri. Dopo la pubblicazion del mio *Prodromo*, e le Traduzioni fatte di eſſo in lingua franceſe, tedeſca, ed ingleſe, è incredibile quante migliaja di queſti rettili vennero decollate, parte da alcuni che dando in ſeguito ſuora i lor Saggi ſu le lumache, hanno reſi per la prima volta conſapevoli i dotti di loro eſiſtenza; parte da Fiſici comunali, od anche di qualche celebrità, ma poco meno che inetti per le ſperienze; e parte in fine da Fiſici illuſtri, e che nell' arte dello ſperimentare godono d' una ſtabilita riputazione. Una sì grande diverſità di uomini ſperimentatori come non doveva produrre una conſiderabile diſcrepanza nei riſultati? Quindi egli è avvenuto di fatti, che alcuni ben lontano dall' ottenere la riproduzione del capo in queſti teſtacei, ne hanno avuta la morte; e ciò ha fornita loro occaſione di combat-

---

(*) La prima Memoria ſu lo ſteſſo argomento è ſtampata nel Tomo I. della *Società* Italiana.

tere , e rigettare la mia ſcoperta , giudicandola più preſto immaginaria, che veritiera. Altri conſeguito avendo ſoltanto un principio di riproducimento , l' hanno accagionata per non verace del tutto, ma eſagerata anzi che no. Altri in fine con l' avere ottenuto l' intiero capo rigenerato , l' hanno confermata compiutamente.

Dopo l' avere io nella prima Memoria narrati i principali riſultati di mie eſperienze relativi al preſente ſoggetto , mi rimane in queſta ſeconda , a compimento del medeſimo , di narrare gli altrui, eſponendo con amica imparzialità così quelli che favoriſcono la mia cauſa , come gli altri che le ſono contrarj. Debbo qui ſolo avvertire, che tanto in prò , quanto in contro io non farò parola che di quelle eſperienze , che a mia notizia per le ſtampe ſi trovan già note , o che inedite ſono ſtate a me comunicate da Fiſici inſigni. Imperocchè quantunque ſu d'un tal punto v'abbiano altre eſperienze, e queſte non poche, e inſtituite anche in parte da uomini di non languida fama; pure io non le reputo degne di ſtoria, per non eſſere ſtate notate dai loro Autori , i quali ſoprappreſi dalla novità e ſtranezza del fatto, non hanno avuto altro in mira (bene o male) che di ripeterlo , nulla curandoſi poi di affidarne alla carta i riſultati , e molto meno di renderli pubblici. A procacciar poſcia al preſente ſcritto luce e buon ordine, ſia bene il dividerlo in tre Articoli ; il primo de' quali verſerà intorno a quegli eſperimenti che impugnano la mia ſcoperta ; il ſecondo comprenderà quegli altri che la confermano ; e il terzo abbraccerà diverſe Rifleſſioni, che ho creduto adattate a togliere gli equivocamenti , e a porre in maggior lume la verità.

ARTICOLO I.

Si riferiſcono le ſperienze contrarie.

Si può dire che l' *Avant-coureur*, Foglio ebdomadario che che ſi ſtampa in Parigi, ſia ſtato per un tempo il campo di battaglia, dove hanno combattuto più Autori così a favore che contra il rinnovamento del capo nelle decollate lumache. La prima oppoſizione che qui ſi trova è del Sig. *Wartel* , ſotto li 4 Luglio del 1768, eſpoſta ne' ſeguenti termini.

„ Il Sig. *Wartel* , Canonico Regolare dell' Abbazia di S. „ Eloi, e della *Società* Letteraria di Arras, ha oſſervato che „ le lumache vivono lunghiſſimo tempo ſenza alcune di quel„ le parti, che ſembrano eſſenziali alla vita. Sul finire di „ Ottobre del 1767 ei reciſe il capo a molte lumache, che „ ſi rinchiuſero ſubito ne' loro guſci, e che ne otturaron la „ bocca, come ſe ſtate foſſero intere, e con ſorpreſa le vide „ nel meſe di Maggio del 1768 uſcire dalle loro caſe, pie„ ne di vita, ma ſenza teſta. Il Sig. *Wartel* non crede poſ„ ſibile nelle lumache la riproduzione della teſta, concioſſia„ chè dopo le ſue eſperienze neſſuna l' ha riſatta; anzi „ non hanno rifatti tampoco i corni alcune di eſſe, alle „ quali gli aveva reciſi „.

Analogo a queſto fatto ſi è l' altro del Padre *Cotte* , Prete dell' Oratorio, riferito dallo ſteſſo Giornale li 29 Maggio del 1769, che per eſſere diffuſamente eſpoſto riporterò compendiato.

Udita che ebbe a Parigi quel Religioſo la mia Oſſervazione, preſo il deſtro di un' abbondante pioggia caduta in Giugno, fece con affilata forbice ſaltare in aria tante teſte, quante lumache per la ſopravvenuta pioggia erano uſcite del guſcio. Furono in ſeguito ripoſte in luogo, dove ſovente egli potea viſitarle. Spirati otto giorni, di 12 lumache ch' egli avea decapitate, quattro eran morte. Le altre periron dopo, fuori di una ſola, che dopo un anno viveva ancora, ma ſenza la più picciola apparenza di riproduzione.

Gli 11. dello ſteſſo meſe il Padre *Cotte* decapitò altre 12 lumache, e ſi accorſe che due o tre, a cui credeva di aver fatta a dovere l' operazione, moſtravano ancora intere le corna, le quali ſoltanto ſpogliate apparivano della pelle, che le ricopre. Dal che conclude quel Religioſo, che la lumaca ha qualche volta il tempo, nel momento che ſente l' azion della forbice, di ritirare la teſta in guiſa, che non ne reſta tagliato che l' invoglio, o la pelle che la ricopre. Ora egli è certo, ſoggiugne queſto Naturaliſta, che le lumache poſſono riprodur queſta pelle, e far credere di avere acquiſtata una nuova teſta a un oſſervatore, che non ſia a lume della loro aſtuzia. Ma per conto di quelle lumache, che non ſono sì pronte nel ritirare la teſta, egli è più che perſuaſo che, receſa loro che ſi abbia una volta, non la ricuperano più mai.

Queſte ſperienze furono ripetute dal Padre *Cotte* ſu di un numero prodigioſo di lumache ne' ſeguenti anni 1770. 1771. 1772. 1773, e i riſultati tornarono preſſo a poco gli ſteſſi come appariſce dal Giornale di Fiſica dell' Abbate *Rozier*, dove ſta regiſtrata queſta lunga ſerie di novelle eſperienze. Le lumache adunque per lui decapitate in progreſſo di tempo periron tutte, ſenza che alcuna riproduceſſe la teſta; che anzi ſe invece di mutilarle così, la ſorbice non veniva a levare che la pelle del capo, neppur queſta rigeneravaſi. Di più ſe invece del capo venivan loro levate le corna, neppur queſte, come oſſervò egli, ſi rifacevano.

Nell' anno ſteſſo 1769 che nel *Avant-coureur* fece imprimere le ſue prime eſperienze intorno alle lumache il Padre *Cotte*, nel Giornale di *Berna* li 4 Febbrajo pubblicò le ſue ſul medeſimo ſoggetto il Signore *Valmont* di Bomare, come coſta dalle ſeguenti parole.

„ Si ricorderà che il Dottore *Spallanzani* Naturaliſta di
„ Modena nel meſe di Giugno dell' anno 1768 annunziò la
„ ſcoperta della riproduzione della teſta nelle lumache. Il
„ Sig. *Valmont* di Bomare, Oſtenſore di Storia Naturale, di
„ cui ha dato fuori un Dizionario, ha ripetuto le ſue eſpe-
„ rienze intorno a queſta materia l' autunno del 1768 a
„ *Chantilly* in compagnia del Signor *Borie*, Speziale del Prin-
„ cipe di *Condé*. Hanno oſſervato che le lumache, a cui bruſ-
„ camente tagliato avevano la teſta, ſono morte, eſalando
„ un odore fetidiſſimo. Di 52, che avevano decapitato, non
„ ve ne ſono ſtate che 9, che eſſi veduto abbiano ſtriſciare
„ in capo a 24 ore, ed erano unicamente quelle, che erano
„ ſtate mutilate, appoggiando debilmente tra le corna e le
„ parti della generazione il taglio di un coltello, male affi-
„ lato. Veggonſi allora ſenſibilmente rientrar le corna nell'
„ interno dell' animale, a cui non è ſtata tagliata che la
„ pelle, e la maſcella ſuperiore. Quindi ricomparendo l' ani-
„ male, fa vedere le corna mutilate „.

Preſſo a poco le ſteſſe coſe ridice queſto Franceſe nel ſuo Dizionario di Storia Naturale all' Articolo *Limaçon*, aggiungendo di aver ripetuto nel 1769 i medeſimi tentativi ſu molte altre lumache, ma col medeſimo infelice ſucceſſo.

Da queſti tre Naturaliſti, che in virtù delle loro eſperienze negata hanno del tutto la riproduzione del capo nelle lumache, non denno andar diſgiunti due altri, cioè a dire li Sigg. *Argenville*, e *Schröter*. Sebbene per conto del primo, non avendo io potuto vedere il ſuo libro, malgrado le diligenze da me uſate per rinvenirlo, dovrò contentarmi di riferire quel poco che nelle ſeguenti parole ne accenna il Sig. *Murray* in una ſua Memoria relativa al preſente ſoggetto, della quale dovrò parlare più ſotto. *Maxime vero ab affirmantium parte recedit Argenville, ex centenis (cochleis) 25 modo in diem poſterum vixiſſe referens*. Per ciò poi che riſguarda il Naturaliſta Tedeſco, nel ſuo *Saggio d' un Trattato Siſtematico ſopra le Conchiglie terreſtri* (*a*) impiega egli quaſi un' intiera Sezione nel raccontare i numeroſi ſuoi cimenti ſu le lumache. E ſiccome tante morirono, quante furono quelle che decollò (e queſte giunſero a più centinaja), quindi ſi crede autorizzato abbaſtanza per negare in tai rettili la rinnovazion della teſta. Che anzi non avendo eſſi tampoco rifatte le corna reciſe, nè la coda, nega egli del pari la poſſibilità della rigenerazione di queſte parti.

Rimane ora a parlare di quegli Autori, i quali quantunque con le loro eſperienze non combattano in tutto le mie, in quanto che non negano eſſi qualunque riproducimento del capo, vogliono però che tal riproducimento non ſia mai dell' intiero capo, ma d' una parte ſoltanto, o appartenenza di eſſo. Tre a mia notizia ſono queſti, cioè il teſtè citato *Murray*, *Adanſon*, e *Preſciani*. E per rifarmi ſul primo, egli nell' accennata ſua Memoria (*b*) dopo l' avere eſpoſto con lungo apparato di erudizione gli eſperimenti di quelli, che confermata hanno la mia ſcoperta, e di quegli altri che l' hanno impugnata, diſcende in fine a darci conto de' ſuoi tentativi, che in tutto riduconſi a due. Aggiraſi il primo ſu quella ſpecie di lumaca detta *helix pomatia* da' Siſtematici. Due pertanto di queſte vennero da lui mutilate in guiſa, che la teſta fu

---

(*a*) Verſ. e. Syſtem. Abhandl. über d. Erdconchylien. Berl. 1771.

(*b*) *Joan. Andr. Murray* &c. de Redintegratione Partium Cochleis, Limacibuſque præciſarum diſſerens &c. Gottingæ 1776.

ſpiccata dal collo dietro alla baſe delle corna poſteriori. Una di queſte dopo una ſettimana morì. Non così avvenne all' altra, la quale anzi riproduſſe: la riproduzione però conſiſtè in poco, cioè a dire in un corno anteriore, e queſto anche fatto a ſtento, e quaſi che diſſi a diſpetto della natura, sì perchè trovoſſi più breve, e più groſſo del conſueto, sì perchè la ſua ſommità non andava fornita di quel punto nero, tenuto comunemente per l' occhio della lumaca. Tale in iſcorcio è il primo tentativo, cui tien dietro il ſecondo, che è queſto. Preſe avendo il Sig. *Murray* dieci lumache d' altra ſpecie (*helix nemoralis*), alcune di queſte furono condannate a perder la teſta congiuntamente alle quattro corna; altre la porzione anteriore della teſta inſieme a due corna; altre la metà della teſta unitamente alle quattro corna. Taluna poi non fu privata che delle quattro corna, e tale altra che di due ſole. L' eſito che ne ebbe quel Naturaliſta fu il ſeguente. Dopo ſei ſettimane o in quel torno una delle mutilate nelle ſole corna ne moſtrò due di riprodotte, ſenza però che uno di cotali corna novelle corredato foſſe del ſuo occhio. Le altre lumache poi, cui era ſtata tolta tutta la teſta, o una porzione ſoltanto, ſi occultarono ne' loro guſci, e vi ſi profondaron per modo, che ad onta di qualunque ſtimolo non fu mai che voleſſero uſcirne. Il perchè annojato egli di aſpettare più oltre, ruppe il guſcio ad una, alla quale tagliato avea l' intiera teſta, e ſi accorſe che nella parte d' avanti erano gia ſpuntati due lunghi corpicciuoli ſimili ai rudimenti delle corna, ma inſenſibili. Ma fu conteſo all' Autore per una ſopraggiunta accidentalità il ſeguire più oltre le ſue oſſervazioni. Quindi dal vedere che queſti teſtacei non reſtaurano la teſta perduta, ma ſoltanto qualche ſua appartenenza, come ſono le corna, e queſte anche imperſettamente, non può egli convenire con me pienamente ſenza però diſcordare affatto; e quindi ſi dichiara di voler tenere una ſtrada di mezzo tra coloro che affermano il riproducimento del capo nelle lumache, e quei che lo negano.

Ai riſultati delle ſperienze del Profeſſor di Gottinga ſono alquanto analoghi quelli d' un certo Dottore *Preſciani* di Arezzo in Toſcana, compreſi in una Lettera inſerita nel Tomo XXXII. del Giornale di Piſa pubblicato nell' anno 1778.

Dopo adunque di aver egli eſpoſto nella Lettera il dettaglio di ſue eſperienze, ſul finire di eſſa ne raccoglie i corollarj eſpreſſi nei ſeguenti termini. " Quello adunque che credo d' a-
„ ver potuto riſolvere, è che le mie lumache, alle quali ho
„ levato la teſta con porzion del cervello, ſono tutte morte
„ prima o dopo, ſecondo che loro è ſtata levata maggiore o mi-
„ nor porzione di cervello; che le altre alle quali ho levato
„ le antenne, i labbri, i denti, il palato, e la lingua ſenza
„ toccare il cervello, ſono vivute per tutto quel tempo che
„ han potuto ſoffrire il digiuno, e che le altre poi, alle quali
„ ho tolto le ſole antenne, con gl' integumenti del capo, ed
„ i labbri, hanno tutte perfettamente riprodotto „. Parliamo per ultimo del Sig. *Adanſon*. Veramente non può dirſi che queſti pubblicato abbia ſcritto alcuno particolare intorno a queſto ſoggetto. Solamente da una ſua Lettera ſotto il giorno 30 di Luglio 1769 ſcritta al Sig. Carlo *Bonnet*, e da queſt' ultimo ſtampata nelle ſue Opere (*a*), ſi raccoglie ch' egli pure è ſtato nel numero degli Sperimentatori, e che anzi ha ſacrificato al coltello anatomico più lumache, che qualunque altro Fiſico, eſſendo giunto a decapitarne in un anno più di 1400. Comincia l' Accademico di Parigi la Lettera col farci ſapere d'eſſere egli ſtato il primo a dubitare filoſoficamente delle mie ſperienze relative alla rigenerazione della teſta, ed anche delle corna, e delle maſcelle delle lumache. Poi ſcende a provare che il ſuo dubbio era fondato, giacchè in mezzo a tanta carnificina non ha ottenuto que' riproducimenti che ſi promettono dalle mie eſperienze. Vero è ch' egli ha conſeguito delle riproduzioni, ed anche ſubite, di corna, di teſte, di labbri, ecc; ma queſte erano riproduzioni di parti non interamente reciſe; concioſſiachè tutte le teſte, tutte le corna, tutte le maſcelle ecc., che vennero da lui tagliate per intiero, non gli fecero mai vedere la più picciola riproduzione. Quindi dopo l' avermi ammonito d' eſſere più cauto nell' indagare la verità, ſi fa a dire ch' io da uomo ineſperto mi ſono ingannato; in quanto che ho creduto di

---

(*a*) Collection complette des Oeuvres de Charles *Bonnet* ecc. T. V. Part. I.

di tagliar la teſta alle lumache, e non ho loro tagliato che il *berrettino* o la *calotta*, ſiccome ſi eſprime il Sig. *Adanſon*. Anzi le voci di *berrettino*, e *calotta*, ſoggiugne egli che ſono l' uſitata ſua eſpreſſione, allorchè favella delle mie riproduzioni. Io ho dunque creduto, per lui avviſo, di recidere o eſtirpare le corna o le maſcelle, e vi reſtava ſempre la radice, la quale non è punto a ſtupire ſe gittato abbia qualche rampollo. Termina poi l' Accademico Franceſe queſta ſua Lettera col fare un elogio a ſe ſteſſo, encomiando la ſua bravura nel far notomie de' minuti animali.

E queſti ſono i tentativi degl' Impugnatori della mia ſcoperta. Entriamo ora a parlare dei Diſenſori della medeſima; il che formerà il ſoggetto del ſeguente Articolo.

ARTICOLO II.

Si riferiſcono le Sperienze favorevoli.

Malgrado la moltiplicità delle ſurriferite eſperienze io non mi trovava per nulla pentito di aver pubblicata nel *Prodromo* quella mia ſingolare oſſervazione ſu le lumache; e ciò perchè io era troppo ſicuro di aver veduto quanto quivi racconto, ſenza timore che qualche ingannatrice apparenza mi aveſſe impoſto. Fin nella primavera del 1766 io mi avvidi del rinnovamento del capo, e delle corna in queſta fatta di rettili; ciò non pertanto io differj fino al 1768 a far paleſe al mondo dotto queſto ſtraordinario ſenomeno; perchè appunto io non mi contentai per una ſola volta di averlo ammirato; ma voleva vederlo di nuovo, e tornarlo a vedere, facendo nel tempo ſteſſo i più minuti e i più diligenti anatomici eſami, tanto nelle parti ch' io recidea, quanto in quelle che rigeneravanſi, per accertarmi ſe dir potevaſi a tutto rigore, che ciò che riprodotto appariva, era veramente il *capo* della lumaca. Atteſa la corriſpondenza letteraria, in cui fin d' allora io aveva l' onor di trovarmi, coll' illuſtre mio Amico Sig. *Bonnet*, io gli andava a mano a mano comunicando la ſerie tutta quanta de' fatti, che riſguardavano i principj, i progreſſi, e il fine di queſte riproduzioni, delle quali egli moſtroſſi perſuaſiſſimo, come appariſce da molte ſue

lettere ſu tal propoſito a me ſcritte, e che ſi trovano impreſſe fra le ſue Opere (*a*). Ed in cotal perſuaſione ſono pur rimaſti tutti que' ſaggi Conoſcitori, a' quali ho dato a vedere queſti animali riproducenti, così in Modena, quando in quell' Univerſità io era Profeſſore, come qui in Pavia: e poſſo dire che anche l' anno 1782 trovandomi aver più lumache ſu gli ultimi di Giugno, che cominciavano aſſai bene a rifar le teſte, che loro erano ſtate mozzate in Maggio, ebbi la compiacenza di moſtrarle a due miei riſpettabili Colleghi, giudici ottimi di queſte materie, il Sig. *Tiſſot*, e il Padre *Barletti*, i quali dopo di averle diligentemente, e per ogni parte eſaminate, convennero meco ſenza punto eſitare, che le parti che ſi vedevano rifabbricate, non erano già l' invoglio delle antiche teſte, oſſia il loro *berrettino* o *calotta*, ſiccome ſcherzevolmente ama chiamarle il Sig. *Adanſon*, ma vere, veriſſime, arciveriſſime teſte novelle. Anzi favorito avendomi il prelodato Sig. *Tiſſot* di recar ſeco a Ginevra ne' primi di Luglio dell' anno ſteſſo alcune di queſte riproducenti lumache, per farle avere a mio nome al Sig. *Bonnet*, queſti con ſua lettera dei 10 del ſuſſeguente Agoſto così mi riſpoſe. " Tutte le lumache, che conſegnato avete per me al
„ Sig. *Tiſſot*, mi ſono giunte in ottimo ſtato, ed ho veduto in eſſe le ammirabili riproduzioni aſſai più inoltrate che
„ in quelle, ſu cui ho fatto io le mie eſperienze. Le voſtre
„ ſono d' una ſpecie ch' io non conoſceva: ſembra avvicinarſi
„ alcun poco alla groſſa ſpecie del noſtro paeſe; ma ne differiſce nei colori, e per l' inferiorità della ſtatura. Apparentemente la riproduzione ſi fa meglio o più facilmente
„ nella voſtra ſpecie che nelle noſtre, o in quelle della Francia. Io ne giudico dai riſultati nati dai differenti tentativi intrapreſi di qua da' monti, e da' miei in particolare.

E dopo l' avermi ragionato d' altre coſe, ſul terminar della lettera ſoggiunge. " Rodendo la porta di carta della loro
„ prigione le voſtre lumache mi hanno dato le migliori pruove che finito avevan del tutto di rifare la teſta. Sarebbe
„ forſe ben che rodeſſero la punta del naſo dell' incredulo

(*a*) L. c.

„ *Adanſon*, a fine di perſuaderlo di ciò che ſi oſtina di non „ voler credere „.

In virtù adunque, e per opera de' miei eſperimenti io era conſcio a me ſteſſo di non eſſermi ingannato, che che mi opponeſſer gli Autori nell' antecedente Articolo per me citati. Aggiugnevaſi che i loro tentativi erano negativi, e i miei per contrario erano poſitivi; e la Logica c' inſegna che un fatto poſitivo non rimane diſtrutto da mille negativi, per eſſere innumerabili (e moltiſſime non prevedute) le circoſtanze che turbar ponno il riuſcimento d'un fatto. Ad onta però di tutte queſte ragioni, ſe a mio favore combattuto non aveſſero che le mie ſole eſperienze, io non poteva eſſerne appieno contento. Di queſta verità fiſica da me diſcoperta, oltre al Sig. *Bonnet*, erano reſtati interamente convinti que' pochi miei dotti Amici, che co' propri occhi l' avevan veduta, e ammirata; ma io aveva fondamento di dubitare che ſtato non foſſe lo ſteſſo del Pubblico illuminato; e ogni Autore che dà in luce qualche ſuo ritrovamento deve eſſere troppo premuroſo di perſuadere anche queſto. Vo' adunque dire che que' lettori che dopo l' aver lette le mie ſperienze, paſſavano a legger quelle de' miei Oppoſitori, ſi trovavano poſti tra due autorità contrarie; e malgrado la qualche confidenza, che aver poteſſero ſu quanto in eſſe affermativamente io aſſeriva, queſta però non baſtava peravventura a diſſipare dal loro animo ogni ombra di contrario ſoſpetto, o dubbiezza, naturalmente creataſi in loro dall' inaudita ſtranezza del fatto, e confermataſi poi, e fors' anche accreſciutaſi da tanti altri fatti che tendevano ad impugnarlo. A far sì che ne rimaneſſero onninamente convinti non vi era miglior mezzo, che queſta contraſtata riproduzione veniſſe richiamata a rigoroſo eſame da valenti Fiſici, e da eſſi accertata in modo, che più non reſtaſſe luogo ai contraſti. E tanto appunto è avvenuto. Ed oltre a quell' interna compiacenza che ſente qualunque fiſico Ricercatore nel trovar confermate le proprie eſperienze, provo anche l' altra di vedere che i più di queſti Naturaliſti ſi ſono compiaciuti di prender le mie parti, ſenza che tra me e loro vi aveſſe il più picciol rapporto, la più picciola letteraria corriſpondenza. Stimo adunque troppo importante alla mia cauſa, che è pur quella della verità, il recare in mezzo que' fatti , che la favoreggiano . E ſiccome veduto abbiamo che alcuni de' fatti opponentiſi alle mie eſperienze ſi leggono nel Giornal di Parigi, intitolato l'*Avant-coureur* , così quivi ſi trovano pur altri favorevoli ad eſſe, il primo de' quali ſi è queſto.

,, Il Sig. *Roos* Tedeſco, che attualmente dimora a Parigi ,
,, ha intrapreſo di avverare le ſperienze del Sig. *Spallanzani*
,, ſopra una certa quantità di lumache, a cui egli ha tagliata
,, la teſta. Alcune ſono morte, altre hanno ſopravviſſuto all'
,, operazione, e tra queſt' ultime , quando le ha fatte vedere
,, ſon già alcuni giorni a molti Fiſici, e Naturaliſti, ve
,, n' erano due che ſembravano annunziare la riproduzione
,, della loro teſta. Ad una ſi vedevano già le due corna ſuperiori
,, interamente riprodotte ; e la ſeconda aveva acquiſtata
,, una nuova teſta, in cui appariva la bocca, e le quattro
,, corna o antenne ; ma ſecondo l' oſſervazione del Sig.
,, *Roos* , queſta lumaca non aveva ancor mangiato dopo la
,, riproduzione ,, (N.° 30 di detto Giornale , 25 Luglio, 1768).

Al Numero poi 47 dello ſteſſo anno ſi leggono queſte parole . “ Il Sig. *Roos* ha continuato ſu le lumache le ſue
,, eſperienze, di cui abbiamo fatta menzione nel noſtro Foglio
,, dei 25 Luglio ſcaduto . Egli ha di nuovo oſſervato
,, che una di quelle lumache , alla quale aveva tagliata la teſta
,, alla radice delle corna , acquiſtato aveva una nuova teſta,
,, e le quattro corna ſono già comparſe ,, .

Queſti riſultati conſuonano con quelli del Sig. *Lavoiſier*, riferiti eſſi pure dal citato Giornale , Num. 38. 19 Settembre 1768. “ Nel noſtro Foglio dei 30 Maggio di queſt' anno pubblicata abbiamo la ſingolare ſcoperta dell' Ab. *Spallanzani*
,, Profeſſore in Modena , la quale ſcoperta concerne la
,, riproduzione del capo nelle lumache. Narrato abbiamo un
,, tal fenomeno con tutta quella circoſpezione che merita una
,, novità tanto ſorprendente. Preſentemente ne poſſiamo parlare
,, con più confidenza. Il Sig. *Lavoiſier* ha fatto vedere
,, all' Accademia Reale delle Scienze , della quale egli è
,, membro , una lumaca , a cui aveva tagliata la teſta egli
,, ſteſſo, e che ha cuſtodita , ed oſſervata diligentiſſimamente,
,, la qual lumaca ha riprodotto una nuova teſta , ſomi-

,, gliantiſſima alla prima, a riſerva di non avere ancora ac-
,, quiſtato il colore del rimanente del corpo, come trovavaſi
,, nella prima teſta ,,.

Non ha laſciato queſto Accademico di proſeguire le ſue ſperienze, come ſi raccoglie da' ſeguenti termini dello ſteſſo Giornale, Num. 44, 1768. " Quanto abbiam detto intorno
,, alla riproduzione, che faſſi nelle lumache, quando ſi è lo-
,, ro tagliata la teſta, ſembra eſſerſi procacciata l' attenzione
,, del pubblico, e dei dotti. Ci affrettiamo di comunicar lo-
,, ro intorno alle ſperienze fatte dal Sig. *Lavoiſier* delle de-
,, ſcrizioni più preciſe, più circoſtanziate, e più eſatte, ta-
,, li in una parola, quali le ha eſpoſte egli ſteſſo all' Acca-
,, demia Reale delle Scienze.

,, Le lumache, intorno a cui ſi è eſercitato il dotto Accade-
,, mico, hanno avuta la teſta tagliata un poco al di là del-
,, le quattro corna. Subito che è ſtato fatto il taglio della
,, teſta, o almeno d' una porzione di teſta, la lumaca ritiraſi
,, precipitoſamente nel guſcio. Se eſce per cangiar di luogo,
,, come accade ad alcune, non ſi diſpiega che in parte. L'e-
,, ſtremità, ove è ſtato fatto il taglio, reſta increſpata, e a
,, *culo di gallina*. Con queſt' arte viene l' animale ad impe-
,, dire lo ſpargimento degli umori. Alcuni giorni dopo for-
,, maſi una pelle fina e traſparente nel ſito del taglio, ma
,, non veggonſi comparire che dopo un meſe circa i primi
,, effetti della riproduzione.

,, Queſta manifeſtaſi a foggia di picciola papilla o tuberco-
,, lo, che ſi fa vedere al lato deſtro del taglio: poco dopo
,, ne compariſce un ſecondo al lato ſiniſtro; e queſte papille
,, o tubercoli non ſono che i primi elementi delle nuove cor-
,, na. Nel tempo ſteſſo l' eſtremità dell' eſofago ſi allunga,
,, ed eſce a poco a poco dal piano del taglio, prendendo la
,, figura di una teſta che creſce inſenſibilmente. Il tutto ſi
,, opera mediante uno ſviluppo lentiſſimo, ma fuor di ciò
,, aſſai ſomigliante a quello che ſi oſſerva, quando la lumaca
,, eſce del guſcio. Paſſano in circa tre e più meſi prima che la
,, nuova teſta acquiſtato abbia a un di preſſo il volume del-
,, la prima; da cui però molto differiſce in ciò che in vece
,, d' eſſer coperta di una pelle fatta a ſagrino, come il re-
,, ſtante del corpo, ella non ha che una pelle fina e traſpa-

,, rente , la quale laſcia pur vedere una parte dell' interna organizzazione . Le corna ſono pure molto più corte , e più groſſe che nello ſtato naturale; non hanno che una linea e mezzo di lunghezza : hanno però quella ſenſibilità che ſogliono avere nell' animale , e ad ogni leggier tocco ſi ritirano ,,.

,, Ecco lo ſtato attuale di una delle lumache del Sig. *Lavoiſier*, la quale ha fatto maggior progreſſo. E' ſtata mutilata li 26 del paſſato Giugno. Egli ne conſerva altre mutilate nello ſteſſo tempo, che non ſono sì inoltrate nella riproduzione , circa le quali egli ha oſſervato che la teſta non è la ſola parte ſuſcettibile di riproduzione nella lumaca. Quella parte, che comunemente chiamaſi *coda*, ſi riproduce altresì , e a un di preſſo con le medeſime circoſtanze ,,.

Ma infra gli Accademici di Parigi il Sig. *Lavoiſier* non è ſtato il ſolo , che veduto abbia cotal riproducimento : ve n' ha tre altri , come ſi fa paleſe dal Tomo degli Atti di queſta Reale Accademia dell' anno 1768. Lo ſquarcio relativo a un tal fenomeno è troppo intereſſante per meritare d' eſſer riferito qui per intiero.

,, Il Sig. di *Reaumur* aveva ſorpreſo tutto il mondo fiſico per la portentoſa riproduzione dei polipi , e di alcuni altri animali. Ma ecco un nuovo fatto della medeſima ſpecie e forſe più ſingolare , di cui il Sig. de la *Condamine* ha fatto parte all' Accademia . Il Sig. *Spallanzani* diviſato avendo di tagliar le corna, ed anche la teſta ad alcune lumache, ſi avvide con ſorpreſa che alcuni di queſti animali, che credeva morti, non lo erano, e che dopo un tempo aſſai lungo alcuni avevano rifatte le corna , e alcuni altri l' intiera teſta.

,, Queſto fatto eccitò la curioſità di molti Accademici , e coſtò la teſta a un gran numero di lumache . Ecco quanto noi abbiamo potuto raccogliere dalle oſſervazioni fatte , e comunicate all' Accademia da' Sigg. Cavaliere *Turgot*, *Tenon*, *Heriſſant* , e da altri Fiſici. A qualche lumaca è ſtata reciſa interamente la teſta. Alcune altre hanno avuta la teſta ſpaccata longitudinalmente , e ne è ſtata levata una metà. Ad altre in fine non ſi è fatto che recidere, od an-

,, che ſtrappar le corna . Si è formata nel taglio una pelle
,, nuova , facilisſima a diſtinguerſi dalla vecchia , la quale è
,, asſai più oſcura nel colore: la pelle nuova non acquiſta ſe
,, non ſe dopo l' intiera riproduzione della parte quell' aria
,, di ſagrino, che ſembra avere la pelle della lumaca. Quelle
,, lumache, a cui la teſta è ſtata interamente tagliata, ſi ritirano
,, dentro a' loro guſci, e vi reſtano chiuſe per un dato
,, tempo, cioè a dire trenta o quaranta giorni.....

,, Dopo un meſe circa ſi vede formarſi nel mezzo della parte
,, reciſa una ſpecie di protuberanza, che creſce a poco a poco
,, , e diventa in fine una teſta novella fornita della ſua
,, bocca, e de' ſuoi denti. Il Sig. *Heriſſant* ha dimoſtrato che
,, queſti denti erano una nuova riproduzione , avendo fatto
,, vedere la teſta tagliata d' una lumaca che conſervato aveva
,, nello ſpirito di vino , alla qual teſta erano attaccati i
,, denti , quantunque la nuova teſta della medeſima lumaca
,, foſſe già provveduta de' ſuoi denti.

,, Le corna non ſi rigenerano ſe non ſe quando le teſte ſono
,, interamente formate . Queſte corna non oſſervano alcuna
,, regola nella loro riproduzione: e lo ſteſſo è di quelle che
,, ſono ſtate reciſe o ſtrappate. Generalmente ſono dapprincipio
,, d' un colore più chiaro che il rimanente del corpo, e
,, ſi forma alla loro eſtremità quel punto nero che credeſi eſſer
,, l' occhio dell' animale . Tali ſono le ſingolari oſſervazioni,
,, che ci preſenta l' amputazione della teſta delle lumache.
,, Queſto ſi è un nuovo miracolo di Storia naturale,
,, e un' ampia materia offerta alle ricerche de' Fiſici,,.

E queſte ſono quelle eſperienze, a mia notizia, ſtampate in Parigi, che da diverſi Naturaliſti Franceſi (ſe ſi eccettua il Sig. *Roos*) ſono ſtate inſtituite per verificare le mie. Segue ora a ragionare di quelle, che altri Naturaliſti d' altre parti d' Europa hanno intrapreſe ſul medeſimo ſoggetto; intorno alle quali volendo io ſerbare quell' ordine cronologico che ho proccurato di tenere quanto ho potuto in queſta Memoria nel raccontare i fatti tanto a me favorevoli, che contrarj , primamente è da dire d' uno ſcritto del Sig. *Müller* di Coppenague, impreſſo nell' anno 1769 , e da lui riſtampato nel Volume ſecondo della ſua Opera intitolata: *Vermium terreſtrium , et fluviatilium ſuccincta Hiſtoria*. Sicome poi queſto ſcritto non è tanto breve, così non ne darò io qui che un compendio col toccare i riſultati ſoltanto di ſue eſperienze dopo l' aver riferiti alcuni avvertimenti, e cautele, ch' egli ad eſſe premette, e che ſtimo pur neceſſario che non ignorino i lettori.

1. L'operazione in ciaſcun ſaggio fu ſempre fatta da queſto Naturaliſta Tedeſco col mezzo di due affilate forbici, allorchè la lumaca aveva allungate, e ſteſe quanto più poteva le corna, e la teſta: e preſe guardia quanto gli fu poſſibile di non recidere la parte ſottoſtante alla teſta, chiamata volgarmente il piede della lumaca.

2. Immediatamente appreſſo l' amputazione eſaminò egli coſtantemente con l' occhio non ſolo nudo, ma anche veſtito di lente la teſta levata, e vi vide, e vi fece vedere a dei Conoſcitori non ſolamente le quattro corna, ma gli occhi in cima alle maggiori, la bocca, i labbri, le maſcelle.

3. Quantunque poſſa accadere che in vece di levare la teſta, non ſi levi che la pelle, e una porzione di corna, atteſa la celerità della lumaca nel ritirare queſte parti, tuttavia non v' è pericolo d' ingannarſi. L' eſatto Oſſervatore eſaminando la parte tagliata che rimane ſul piano delle ſorbici, giudica ſul momento ſe l' operazione è ſtata ben fatta, o no: e il meno attento ſe ne può convincere toſto che la lumaca mutilata eſce del guſcio, poichè reſtando a lei attaccata la più picciola parte delle corna, non laſcierà di farla vedere tutte le volte che vien fuora del nicchio.

4. Le parti riprodotte ſi diſtinguono chiaramente mediante la loro bianchezza, e traſparenza da quelle che appartenevano alla lumaca, mantenendo queſt' ultime, benchè ſtaccate dall' animale, la loro opacità, e oſcuro colore.

5. Molte circoſtanze, evitabili e inevitabili, poſſono impedire la riproduzione delle parti tagliate: una ſola oſſervazione fatta con tutta la preciſione, ed eſattezza baſta a provare tal riproduzione ſenza replica.

Queſti ſono quegli avviſi preliminari, che a fine di andar contro a qualunque ſoſpetto o diffidenza intorno al modo da lui tenuto nell' operare ſi mettono innanzi dal Sig. *Müller* alle ſue Oſſervazioni, la ſomma delle quali è la ſeguente.

La

La lumaca *pomatia* fu da lui trovata inetta per la riproduzione, e lo ſteſſo avvenne alla *nemoralis*.

Non così fu d' un' altra lumaca che non era che una varietà di queſt' ultima. Li 19 Luglio 1768 fu a queſta in un ſol colpo troncata tutta quanta la teſta con porzione del collo, e la parte anteriore del piede. La riproduzione fu lenta ad averſi, ma ſi ottenne aſſai bene. Li 16 Settembre ſi vedeva già rifatta la parte anteriore del piede; ma non era così del capo, il quale ſoltanto nella primavera del 1769 cominciò ad apparire, e nel decorſo della buona ſtagione ſi ſviluppò pienamente, a riſerva però d'eſſer mancante della bocca, delle labbra, e delle corna minori.

Per l' oppoſito in altra lumaca decollata li 14 Settembre del 1768 il labbro ſuperiore li 29 Marzo del ſeguente anno era già formato, e l' apertura della bocca ſi rendeva viſibile.

Una terza lumaca decapitata altresì li 14 Settembre dello ſteſſo anno, nella ſtate del venturo avea già rifatta in maſſima parte la teſta.

Termina la ſua Memoria il Sig. *Müller* col dire che un viaggio intrapreſo non gli permiſe l'eſaminare più oltre queſte teſte riproducentiſi, ma che le ſue oſſervazioni gli ſembravano però baſtantiſſime a moſtrare indubitata la reſtituzione delle parti perdute nelle lumache.

Nello ſteſſo anno 1769 il Padre Scarella di Breſcia, Cherico Regolare, volle ripetere le mie eſperienze, i riſultati delle quali ſavorì di comunicarmi con la ſeguente ſua lettera de' 28 Settembre del medeſimo anno.

„ Dopo quattro meſi di ſilenzio finalmente vengo a ragguagliarla di quanto ho potuto oſſervare ne' miei tentativi ſu le lumache, e in quelli di un mio Amico, verſatiſſimo nelle ſezioni anatomiche, Medico di profeſſione, il Sig. Lodovico *Puſini*, che ſpero darà col tempo alla luce le ſue ſcoperte nell' Anatomia, e nella Fiſiologia. Il dì adunque 27 di Aprile alla preſenza di molti Profeſſori di Medicina e di Fiſica tagliai la teſta a ſettanta due lumache raccolte negli orti, non poco al di là delle corna maggiori, con forbici nuove, e aſſai taglienti, le quali con un colpo ſolo e preſtamente recidevano dette teſte,

„ nè davano tempo alle lumache di ritirarle al di dentro, e
„ tutto ciò a fine di preoccupare alcune obbiezioni che ho
„ letto ne' Giornali di Parigi. Fino a queſt' ultimo meſe le
„ ho laſciate quiete in una caſſetta eſpoſta all' aria di una
„ fineſtra di camera chiuſa per non diſturbarle, e ſolamente
„ di quando in quando andava levando, e gettando via
„ quelle che al cattivo odore davano ſegni di morte. Solamente
„ dopo i dieci di Settembre ſino a queſti ultimi giorni,
„ inſieme col detto Signore, e con altri ho eſaminate
„ quelle che mi erano reſtate, e ne ho trovate ventidue ancor
„ vive, le quali punte al di dietro mettevano fuori la
„ teſta riprodotta, o la parte pur riprodotta, che alla maggior
„ tenerezza, e al color più bianchiccio del reſto del
„ corpo, chiaramente ſi conoſceva di novella riproduzione
„ anche da quelli che erano ſtati preſenti al taglio delle medeſime.
„ Una di queſte al ſolito ſtimolata, che chiamerò la
„ prima, gettò fuori la ſua teſta intiera e ben formata colle
„ ſue quattro corna ſimili a quelle che hanno le lumache
„ non tagliate, ſalvo il colore, e la mollezza, come ho notato
„ in generale. La ſeconda le ſole due corna maggiori,
„ molto belle e lunghe, ma per quanto ſi ſtimolaſſe, nel luogo
„ delle corna piccole non ſi potevano vedere che due punte,
„ che incominciavano a ſpuntare. La terza avea riprodotta
„ parte della teſta, e moveaſi, ma non ſi vedeano che
„ i principj delle corna maggiori. La quarta gettò fuora le
„ corna maggiori, groſſe al ſolito, ma corte. La quinta mandò
„ fuori una parte della teſta, e incominciava a gettare
„ le corna maggiori. La ſeſta due bianchiccie protuberanze,
„ che erano il principio delle corna maggiori. Nella ſettima
„ e nell' ottava oſſervai lo ſteſſo, ſe non che nella ſettima
„ ſcorgevanſi anche i principj delle corna minori. Nell' altre
„ quattordeci chiaramente notavaſi il moto vitale, e una parte
„ di teſta riprodotta, più bianchiccia del reſto del corpo,
„ ſenza alcun ſegno viſibile di principio delle corna. Il più
„ volte nominato Sig. *Puſini* avendo tagliate più lumache,
„ me ne ha fatto vedere una colla teſta interamente formata
„ di nuovo, fornita delle quattro corna parimente di nuovo
„ prodotte, come a chiare note lo comprovavano e la
„ maggior mollezza, e il più bianchiccio colore, che nel vecchio
„ corpo della lumaca.

„ Queſto è quanto poſſo notificarle in teſtimonio di quella
„ ſtima ecc.

Breſcia 28 Settembre 1769.

Suo Umiliſs. e Devotiſs. ſervitore
GIAMBATTISTA SCARELLA C. R.

L' anno appreſſo che mi furono gentilmente comunicate da queſto Padre le ſue Oſſervazioni, inteſi dall' illuſtre mio Amico Sig. *Bonnet*, che il Sig. *Schaeffer* di Ratisbona aveva poco prima pubblicato un ſuo ſcritto di eſperienze, che mirabilmente conſermava le mie. Il perchè moſſo io dal deſiderio di aver lumi ulteriori, venni in penſiero di ſcriverne all' Autore iſteſſo da cui ebbi obbligantemente queſta riſpoſta.

„Così è appunto, o Signore. Le mie ſperienze, e oſſerva-
„ zioni intorno alle lumache hanno verificato pienamente le
„ voſtre. Fors' anche io ho ſpinta alcun poco più in là di
„ voi la mia curioſità. M' increſce l' avere ſcritto le mie
„ eſili diſſertazioni in tedeſco, e di non avere il tempo per
„ potervene fare un compendio in latino, o in franceſe. Co-
„ me poſſo, io ſuppliſco a queſta mancanza coll' unire alla
„ lettera un picciolo eſtratto compoſto da un Amico, e ſo-
„ no intanto ecc.

Ratisbona li 8 Marzo 1770.

Voſtro Umiliſs. Obbligatiſs. ſervo
GIACOMO SCHAEFFER.

Eſtratto relativo alla Riproduzione delle Lumache.

„Sono ſtate fatte da poco tempo in qua alcune oſſerva-
„ zioni di ſtoria naturale molto ſingolari intorno alle lu-
„ mache.

„Nel 1753 il Sig. *Ziegenbalg*, dotto Daneſe, preſentò
„ all' Accademia di Coppenague una Memoria in cui fece
„ conoſcere che alcune lumache, alle quali aveva tagliata la
„ teſta, erano reſtate vive, ed avevano anche continuato ad

„ uſcire del guſcio, e ad entrarvi ſecondo il coſtume. Quan-
„ tunque ſimil ſenomeno doveſſe apparire ſtraordinario, non
„ ſi è però ſaputo che ſe gli abbia data tutta l'attenzione
„ che meritava. Non è che nel meſe di Marzo del 1768
„ che il Padre *Boſcovich* annunziò al Sig. de la *Condamine*,
„ che l'Abbate *Spallanzani*, Profeſſore di Filoſofia in Mo-
„ dena, avendo tagliata la teſta a diverſe lumache terreſtri,
„ non ſolamente queſti animali non erano morti, ma che
„ dopo l'eſſerſi per qualche tempo ritirati ne' loro guſci,
„ ne erano in ſeguito uſciti, come naturalmente ſogliono
„ fare, e che finalmente riſabbricata avevano una teſta no-
„ vella, organizzata come la prima.

„Una oſſervazione di queſta natura non poteva che eccita-
„ re la curioſità de' Naturaliſti. E però non è a maraviglia-
„ re ſe è ſtata ſubito ripetuta, così in Francia, che in Ger-
„ mania. Il ſucceſſo ne è ſtato coſtantemente il medeſimo. Ma
„ ſopra tutto il celebre Sig. *Schaeffer* di Ratisbona è ſtato
„ quegli che ha meſſo cotal ſenomeno fuori di qualunque in-
„ certezza. Queſto grande Naturaliſta reiterate avendo più
„ volte queſte eſperienze ſu le lumache, ha veduto coſtante-
„ mente rinaſcere non ſolamente le teſte, ma le code ezian-
„ dio che loro aveva tagliate. Ha pubblicato le ſue eſpe-
„ rienze l'anno ſcorſo in un Trattato ornato di figure mi-
„ niate.

„ Abbiamo di nuovo ripetute queſte eſperienze li 9 Mag-
„ gio dell'anno paſſato, avendo noi a tal fine reciſe le te-
„ ſte a venti ſei lumache. Due ſole ſono morte dopo il ta-
„ glio. Le altre ſono viſſute tutte, ed hanno riprodotte le
„ teſte „.

Nell'anno 1769 il Sig. Ab. *Troilo*, attuale Bibliotecario di S. A. S. il Sig. Duca di Modena, e Profeſſore emerito di Fiſica Sperimentale in quella Univerſità, ſi eſercitò egli pure ſu lo ſteſſo ſoggetto, e nel 1770 ſi compiacque ragguagliarmi dell'eſito con ſua umaniſſima lettera de' 28 Aprile dello ſteſſo anno; la qual lettera per eſſere alquanto lunga riferirò in compendio.

Le lumache al numero di 124, e della ſpecie nomata *nemoralis*, furono mutilate li 5 di Maggio. A 68 venne con tagliente forbice troncata ad un colpo tutta la teſta, con di più una porzione del collo. A 28 tutta la teſta preciſamente. E ad altre 28 la metà quaſi della medeſima, cioè a dire quella porzione che abbraccia le due corna minori, le labbra, le due mandibole col proprio dente, e i diverſi muſcoli che accompagnano coteſti organi.

Parliamo primieramente delle prime. Li 29 del ſuddetto meſe ne eran già perite 49: una però cominciava a ricuperare una ſenſibil porzione di teſta: alcune altre rifatto avevano il ſiniſtro corno maggiore, e il reſtante di eſſe, ſuor d'una ſola, maniſeſtava un principio di riproducimento. Tutte queſte rigenerazioni però nell'entrante Giugno fecero pochiſſimi progreſſi, malgrado l'accreſciuto calore dell'atmosfera, che ſappiamo quanto influiſca ſu le riproduzioni: e intanto laſciavan di vivere altre lumache, così che li 14 dello ſteſſo meſe, delle lumache 68, cui oltre il capo era ſtato levato un pezzo di collo, neſſuna reſtava più in vita.

L' affare fu ben diverſo nelle 28 lumache, cui era ſtata per intiero tronca la teſta, ſenza però intaccare altre parti. Li 29 di Maggio, cioè 24 giorni dopo la decapitazione, non ne era perita che una, e intanto da quaſi tutte pullulavano più o meno le naſcenti corna, ovvero un principio di teſta. Nell' entrante Giugno queſte parti erano conſiderabilmente creſciute, e la prova deciſiva che la teſta in alcune, che per la rigenerazione ſi erano portate meglio dell' altre, eraſi già compiuta, fu che ſi cibarono di latuca che venne loro ſomminiſtrata.

A quel modo che ſi ebbero le riproduzioni dell' intiera teſta, era ben credibile che molto più facilmente ſi ſarebbero ottenute l' altre della teſta dimezzata. Così appunto ci fa ſapere il nominato Sig. Abbate, che termina la ſua lettera con l' avvertire due coſe, l' una che malgrado la facilità, e la prontezza delle ſue lumache nel riprodurre, ve ne furono però alcune che nei primi giorni di Settembre non avevano riacquiſtata interamente la teſta; l' altra che in mezzo a più moſtroſità che accompagnavano diverſe riproduzioni ve n' era una bizzarriſſima, conſiſtente in due corna, l' un maggiore, l' altro minore, ſituate al lato deſtro del capo d' una lumaca, le quali eſſendo ſempre creſciute unite, e come inſieme incollate, venivano a formare un ſol corno più groſſo, e men lungo di un corno naturale maggiore.

Diverſi anni dopo queſte ultime eſperienze, e quando meno io l' avrei penſato, vennero a luce tre ſcritti novelli, confermatori delle mie oſſervazioni, due del Sig. *Bonnet*, e un terzo del Sig. *Senebier*, Bibliotecario della Repubblica di Ginevra. I precipui motivi, che induſſero queſti due Naturaliſti a ſperimentare eſſi pure le lumache, furono i dubbj ſparſi contro di eſſe da' Signori *Adanſon*, e *Murray*. Trovato avendo pertanto che queſti dubbj erano mal fondati, pubblicarono per amore del vero le loro eſperienze, il Sig. *Senebier* in una lettera, che è inſerita nel Giornale di Fiſica dell' Ab. *Rozier*, la qual lettera per eſſere aſſai breve, traſcriverò per intiero; e il Sig. *Bonnet* in due Memorie, da lui ſtampate nella recente edizione di tutte le ſue Opere, delle quali Memorie baſterà pel mio ſcopo, e per iſtruzione di quelli che non le hanno vedute, il recar qui un ſuccinto ragguaglio.

Lettera del Sig. Senebier Bibliotecario della Repubblica di Ginevra, Membro di varie Accademie Scientifiche ecc. *all' Editore del Giornale di Fiſica, ſtampata nel Foglio del meſe di Agoſto per l' anno* 1777.

Mi prevalgo di queſta occaſione per annunziarvi che ho ,, ripetuto la ſingolare oſſervazione del celebre Ab. *Spallanzani* ſu la riproduzione delle teſte che ſi tagliano alle lu- ,, mache de' giardini. Io mi ci ſono impegnato dalla lettura ,, della Gazzetta di Gottinga, dove ho veduto l'eſtratto d'una ,, Memoria del Profeſſore *Murray*, la quale meſſe in dubbio la ,, verità di queſte oſſervazioni; e perchè d'altronde io ſo eſſer- ,, vi in Francia, e in altre parti diverſi non ignobili Oſſer- ,, vatori, che riguardate le hanno come chimere. Io vi ſcri- ,, vo queſto al preſente, perchè la ſtagione è favorevole a ſi- ,, mili riproduzioni; ed opportuna a ripetere queſto genere di ,, oſſervazioni.

,, Nel giorno 15 di Aprile di queſt' anno tagliai la teſta a ,, 12 lumache di giardino. Mi aſſicurai che l' amputazione ,, era ſtata ben fatta, notomizzato avendo la teſta tagliata ,, ſotto la lente, e il microſcopio, e confrontando ciò ch' io

,, vedeva con l' eſattiſſima deſcrizione che ne dà lo *Swammerdamio*. Ho potuto altresì accertarmene ſu gli ſteſſi animali mutilati, ſpeſſe volte da me veduti ſtriſciarſi ſopra le interne pareti de' vaſi di criſtallo dove ſi trovavano rinchiuſi. In capo a tre ſettimane una di queſte lumache moſtrò la teſta, e le maggiori corna riprodotte; vidi ſpuntare altresì le due corna minori, e preſentemente queſta lumaca è ritornata così perſetta, come lo era prima della decapitazione: mangia come l' altre; e l' ho veduta accoppiarſi con altro individuo della ſteſſa ſpecie, che le ho dato a compagno.

,, Le altre undici mi fanno vedere diverſe varietà, e tra queſte undici non avvene alcuna che moſtri una compiuta riproduzione; ve n' è una altresì che ne dà appena un leggiere indizio; altre non hanno che un corno riprodotto alla naturale ſua lunghezza, o qualche altra parte ridotta a perfezione, ma l' altre parti ſi vanno perfezionando in alcuni altri individui.

,, Ve n' è uno, di cui tutte le parti che cadono ſotto i ſenſi, ſi riproducono nel tempo ſteſſo, e in proporzione fra loro. Niuna di queſte lumache è ancor perita,,.

Ginevra 15. Giugno 1777.

Paſſiamo ora a dare un traſunto delle due Memorie del Sig. *Bonnet*. Si aggira la prima, e buona parte della ſeconda ſu quella ſpecie di lumache da lui chiamata di *grandezza mezzana*, che trovaſi facilmente ne' giorni piovoſi dentro a' giardini, il guſcio della quale in alcuni individui pende al giallo, e in altri ſi vede ornato di faſcie circolari, quando nere, e quando brune. Perchè l' amputazione foſſe fatta a dovere il Fiſico Ginevrino usò le maggiori cautele. Diede tempo alla lumaca di allungarſi quanto più le era poſſibile. Preſentò più volte il tagliente coltello alle radici della teſta prima di dare il colpo; e non credette l' operazione ben fatta, ſe non ſe quando già ſpiccata dal collo ebbe ſu la ſua tavoletta la teſta interiſſima.

Il primo ſaggio venne dal Sig. *Bonnet* intrapreſo li 8 Maggio 1777 ſopra dodeci lumache, mutilate ciaſcheduna nel modo indicato, cioè a dire per l' intiera teſta, rigettato avendo l' altre tutte che non erano ſtate perfettamente decapitate: e nel tempo che ſcrivea queſto tratto della ſua Memoria (che era li 15 Luglio dello ſteſſo anno 1777) dice ch' ei ſi trovava aver tuttavia ſu la tavoletta le dodeci teſte ſeparate da' loro tronchi. E diſcende l' oculatiſſimo Ginevrino Sperimentatore a tal circoſtanza, troppo premendogli di andar contro a qualunque contrario dubbio, a qualunque cavillo.

Li 23 Giugno due lumache rifatta avevano in parte la teſta, ma in una terza ſi vedea già interamente compiuta. L' importanza del fatto eſige ch' io lo deſcriva con le parole iſteſſe dell' Autore. „ Le quattro corna in queſta lumaca erano „ perfettamente compite, ed acquiſtata avevano tutta la gran„ dezza che è propria delle corna di queſta ſpecie. La boc„ ca ſembrava ella pure beniſſimo rifatta; la ſua apertura ve„ niva ad eſſere ben terminata, e le nuove labbra che non „ potevano eſſere più diſtinte, avevano la forma, e le pro„ porzioni, che dovevano avere. In ſomma queſta lumaca era „ sì perfettamente ſimile all' altre lumache della ſua ſpecie, „ che non ſono ſtate mutilate, che io non poteva diſtinguerla, „ che per la diminuzione della ſua ſtatura, e per la ſua „ traſparenza „.

L' altre lumache riproduſſero elleno pure più o meno, e di 12 che erano ſtate decapitate una ſola li 27 Luglio era perita.

Li 12 Maggio del medeſimo anno il Sig. *Bonnet* aveva pure decollato 30 altre lumache della medeſima ſpecie, e l' operazione era ſtata fatta in queſte come nelle prime, cioè a dire con l' amputazione dell' intera teſta, e con le ſteſſe avvertenze, e cautele. Ma qui ne perirono più di due terzi. Quelle però, che ſopravviſſero al taglio, rigenerarono le parti perdute con più o meno lentezza, e preſentarono all' oſſervatore varie moſtroſità, che avea pur vedute in alcune delle dodeci lumache da lui mutilate li 8 Maggio, le quali moſtroſità eſſendo analoghe alle vedute da me, ed indicate nel *Prodromo*, e nella prima Memoria, non ho creduto neceſſario di doverle qui riferire.

E qui termina l' Autore il racconto de' ſuoi tentativi deſcritti

ſcritti nella prima Memoria, con queſte notabili parole. “ Preſentemente
,, non procederò più oltre ne' dettagli di mie eſperienze
,, intorno alla rigenerazione delle lumache. Io mi
,, propongo di parlarne di nuovo in altra Memoria. Sembrami
,, frattanto di averne detto più che a ſufficienza per provare
,, che nulla vi è di più certo di queſta maraviglioſa rigenerazione ,,.

Rimane ora a toccare i riſultati dei tentativi della ſeconda Memoria, intrapreſi dal Sig. *Bonnet* nel 1778 e 1780. Queſti riſultati però in generale ſono, che le lumache decapitate in que' due anni non laſciarono eſſe pure di riprodurre, e le riproduzioni vennero accompagnate da quelle anomalie, e moſtroſità che da lui erano ſtate oſſervate l' anno 1777. Ma qui è neceſſario di più l' avvertire una particolarità. I tentativi della prima, e ſeconda Memoria fin qui accennati, ſi riferiſcono tutti alla medeſima ſpecie di lumaca, cioè a quella che l' Autor chiama di *mezzana grandezza*. A render più compiute le ſue eſperienze ſtimò egli che conveniſſe il fare eziandio qualche ſaggio ſu l'altra qualità di lumaca, detta *helix pomatia*, che è delle più groſſe che ſi trovano ne' contorni di Ginevra; eſſendo anche ſtato conſigliato a far ciò dal Sig. *Adanſon*, che gli ſcriveva che queſta lumaca a preferenza di qualunque altra lo doveva pienamente convincere, ſiccome aveva convinto lui ſteſſo, eſſere la decantata riproduzione del capo una pura pretta menzogna (*a*). A dodici di queſte lumache venne adunque dal Sig. *Bonnet* reciſa l' intera teſta li 24 Maggio 1780. Dopo alcune ſettimane eran perite a metà. Li 30 Agoſto la piaga nelle ſei lumache che ancor vivevano ſi era perfettamente rammarginata, ſenza però che appariſſe ancora verun principio di teſta rinnovata. Verſo la metà di Ottobre non ne rimanevano più di vive che quattro, le quali però furono baſtanti a far vedere, che anche in queſta ſpecie il rifacimento del-

---

(*a*) La Lettera del Sig. *Adanſon* è ſtampata nel principio della ſeconda Memoria del Sig. *Bonnet ſu la Rigenerazione della teſta della lumaca*, della qual Lettera dovrò parlare nell' Articolo III.

la teſta non è un ſogno o una viſione, ma un fatto reale. Tutte quattro adunque diedero a quel tempo le più indubitate pruove di una verace riproduzione, anzi d'una riproduzione molto inoltrata. Non m' eſtendo a particolarizzarne col noſtro Autore le circoſtanze, per eſſere troppo ſimili a quanto è ſtato detto di ſopra ſul riparamento del capo nell' altra ſpecie di lumaca di mezzana grandezza.

Ed eccoci al fine della narrazione dei riſultati, in virtù de' quali i Signori *Roos*, *Lavoiſier*, *Turgot*, *Tenon*, *Heriſſant*, *Müller*, *Scarella*, *Schaeffer*, *Troilo*, *Senebier*, e *Bonnet* hanno confermata la mia ſcoperta. Ma tale ſcoperta acquiſterà, come ſpero, viemmaggiormente la confidenza dei dotti, coll' arricchirla di tre ſcritti inediti, pubblicando i quali ſon certo di far coſa grata ai lettori, per eſſer parto di tre valoroſi Italiani, pubblici Profeſſori di Notomia, e celebri già per più intereſſanti Opere da lor date in luce. E queſti ſono i Signori *Caldani*, *Girardi*, e *Pratolongo* giuniore, i quali in queſti ultimi anni eſſendo ſtati da me pregati a ſperimentare ſu i noſtri rettili, e a ſcrivermene con filoſofica libertà quanto in ſeguito intorno ad eſſi oſſervato aveſſero, ſi ſono gentilmente compiaciuti di condiſcendere alle mie iſtanze, mediante tre Lettere, che qui traſcrivo con quell' ordine di tempo, col quale giunte mi ſono.

Amico Pregiatiſſimo.

Eccomi finalmente a ſoddisfare le premure voſtre, epilogando in queſta mia i ſucceſſi delle oſſervazioni, che mi comandaſte ſino dall' anno ſcorſo, intorno alla facoltà che hanno le lumache di riprodurre la teſta, quando fu loro tagliata. Credo che la ſpoſizione dei fatti poſſa baſtarvi: il diario delle oſſervazioni è ſoverchiamente lungo, ed è ſcritto sì male, che durereſte non poca fatica a leggerlo, nè adeſſo io avrei tempo di farne una copia un po' diligente.

Diedi principio alle mie oſſervazioni il dì otto dello ſcorſo Luglio, ſervendomi di quelle lumache, le quali noi qui chiamiamo comunemente di orto, o di giardino: che hanno la buccia, o caſſa anzi oſcura di colore, che no, e di figura, la quale alla sferica molto ſi accoſta.

A diecisette di queſte, alcune delle quali erano alquanto grandi, ed altre piccole, ho troncato il capo dietro le corna maggiori, e ciò con le ſeguenti cautele.

Mi proccurai una tavoletta di legno duro, più piana, che foſſe poſſibile, ſu della quale le collocai. Poſta queſta tavoletta al Sole, aſpettai che ſortiſſero dal guſcio, e che camminando ſtriſciaſſero la teſta ed il corpo tutto allungato ſulla tavoletta medeſima. Quando ciò accadeva, con un raſoio ben affilato, ma però di filo robuſto, e non pieghevole, troncai loro il capo in un ſol colpo, e nel luogo indicato, proccurando che il taglio del raſoio foſſe perpendicolare al piano della tavoletta. Si ritirarono toſtamente eſſe nella buccia, gettando dal troncone una materia viſcida, e ſchiumoſa, che in molte era di colore verdaſtro. Appreſſo le poſi in un vaſo, entro cui eravi della terra d' orto, e le coprii con un vaglio.

Paſſai dopo di ciò ad anatomizzare le teſte tagliate appreſſo di averle conſervate per poco nell' acqua tiepida, e ciò perchè ſi gonfiaſſero un pocolino, atteſo che ſi erano queſte teſte contratte ſenſibilmente. Ho ritrovato in tutte non ſolo la parte ſuperiore della teſta con le ſue quattro corna, ma ſibbene anche l' inferiore colla bocca corredata delle ſue labbra, col dente, e con una parte inſieme del faringe.

Io qui non ſaprei dirvi ſe queſte lumache foſſero di quella ſpezie, che i Franceſi chiamano *Eſcargot*, e che ſono deſcritte e delineate dallo *Swamerdamio* nella ſua *Biblia naturæ*. Se rifletteva alla loro figura, in generale mi ſembravano appunto di quelle; ma guardate con più di attenzione e coll' ajuto di una lente piuttoſto dolce, ſiccome ſuol dirſi, parea che vi correſſe qualche divario: imperciocchè quelle dello *Swamerdamio* (*Tav.* 2. *fig.* 7.) hanno il corpo ſparſo qua e là di tubercoletti iſolati, e di figura irregolare. Laddove le mie erano tutte ſeminate di tubercoletti bislunghi, ſtrettamente uniti inſieme sì che apparivano come altrettante veſcichette ellittiche, e pellucide; non tutte veramente di ugual grandezza, ma preſſochè tutte, e di certo non iſolate, e contornate da altra ſoſtanza paleſe all' occhio. Queſte veſcichette però erano bislunghe, quando il corpo della lumaca allungavaſi, e quando ſi raccorciava, divenivano rotonde.

Da queſta qualunque deſcrizione voi riconoſcerete meglio di me, ſiccome valente Naturaliſta che ſiete, quale ſpezie di lumache ſi foſſe quella, ſulla quale ho fatto le mie ſperienze. Forſe il nome franceſe *Eſcargot* indica ſoltanto le chiocciole in genere, e non già ne ſignifica una ſpezie particolare.

Paſſo ora a darvi i riſultati delle mie oſſervazioni, e vi fo ſapere che di dieciſette lumache non me ne ſono reſtate vive, che quattro ſolamente. Se di queſta disgraziata morte debba accagionarſi il caldo eceſſivo della ſtagione, o la mia ſoverchia curioſità che mi faceva viſitarle ſpeſſo ſenza voler conſiderare che il taglio, o ſeparazioni di una parte sì riſpettabile potea divenir più fatale per l' azione dell' aria, e del Sole, a cui le eſponeva lungamente per oſſervarle con attenzione, io non ſo ben deciderlo. Eſſer potrebbe ancora, che la tarda evoluzione della teſta, ſiccome ſentirete appreſſo, ſia ſtata un effetto della mia tardanza nell' accingermi alle ſperienze: non eſſendo forſe difficile a crederſi, che ſe ciò aveſſi fatto nel fiore della primavera, dove tutto ciò, che vive, è più viſpo, e ſugoſo, che in altri tempi, e le lumache mi ſarebbero reſtate vive in maggior numero, ed avrebbero rifatta più preſto la nuova teſta.

Non crediate però, che mancaſſero di vita contemporaneamente. Due morirono dopo quattro giorni: una terza appreſſo giorni ventotto: altre due ſcorſo il dì trentuno: tre altre paſſati trentatre dì. Poſcia ne trovai morta una dopo giorni seſſantaſei, e quattro altre a capo di ottantaquattro da quello dell' amputazione.

E' da notarſi ancora, che non tutte tredici hanno laſciato di vivere, ſenza aver dato prima alcun ſegno della riproduzione della teſta troncata. Imperciocchè due di eſſe aveano incominciata molto ſenſibilmente queſta riparazione, e le corna maggiori erano rifatte più della metà; ſiccome pure molto avanzate le labbra, ed il dente. Eravi però un difetto, o moſtruoſità nelle nuove di una delle due: perchè non erano ſeparate, come ſogliono eſſere, ma unite in guiſa che rappreſentavano un ſolo corno, e di figura perfettamente conica.

Nelle altre undici, ſiccome in tutte le altre, oſſervai per ordine le ſeguenti mutazioni, le quali in altre accaddero più preſto, in altre più tardi. Ne' primi dì, dopo l' amputazione, il troncone moſtravaſi quaſi piano: appreſſo ſorgeva lentamente un tubercoletto, sì che il troncone appariva conveſſo: la pelle ſagrinata, oſſia la cute, ſi avanzava un poco più verſo gli orli del tubercoletto indicato: dal centro di queſto tubercoletto ſi alzò un punto negro in quella che rifece le corna unite in uno; là dove nelle altre cinque, che ripararono la teſta per intiero, li punti neri furono due, uno per parte del tubercoletto, e continui a un filo nero, che ſi oſſervò in appreſſo. Que' punti negri erano manifeſtamente gli occhi, e i fili erano i nervi ottici.

I progreſſi di queſta nuova evoluzione furono piuttoſto lenti, generalmente parlando: dacchè il tempo più corto al certo principio dello ſviluppo delle corna maggiori, e del labbro ſuperiore, ſi fu di dodici giorni in una delle ſei: il più lungo di giorni novantaſette in un' altra: in giorni diciannove, in ventotto, in trentaſei, in quarantanove, diede principio nell' altre l' indicato ſviluppo, il quale non ebbe compito fine, in quelle che mi rimangono, ſe non dopo quattro meſi e mezzo finiti. E qui poſſo aſſicurarvi, che a tutta ragione dico aver avuto lo ſviluppo della teſta compito fine: e ciò non tanto perciò che ne moſtra l' occhio armato di lente, ma ſibbene anche perchè hanno paleſemente roſicchiate delle foglie tenere di lattuca; della qual' erba ho veduto che quattro (e ſon quelle, che vivono attualmente) ſe ne ſervivano ancora come di cartella, avendola tirata molto addentro della lor buccia.

Nè dee recarvi meraviglia ſe la provvida natura ha ſuggerito loro queſto ripiego, quando vi ſovvenga di aver voi ſimilmente veduto, che le lumache ſenza teſta, e quindi per lunga ſtagione digiune, mancano poi dopo in certo tempo di quel glutine, con cui la riſarciſcono allorchè l' hanno perduta; e quando la riproducono, eſſa è ſempre più tenue, cioè in ragione del tempo del loro digiuno.

Ho detto che incerto è il tempo, in cui mancano di materia riparatrice della cartella: e ciò perchè alcune ceſſarono di riſarla dopo diciannove giorni, ed altre appreſſo quarantotto. Queſto difetto di glutine fa temermi ancora della vita delle quattro che mi reſtano di tutto il numero. Ed avvegnachè io le conſervi in luogo tiepido, e vivano certamente, anzi in pruova di avere mangiato abbiano rifatta una tenuiſſima cartella, pure non mi luſingo che la poſſano durare a lungo, eſſendo elleno nutrite pochiſſimo, e quindi inette a vivere lungamente.

Di queſte mie ſperienze poco ancora mi reſta a dirvi; nè vo' tacervelo, ſebbene ſi tratti di coſa, che voi pure avrete molte volte oſſervata. L' una ſi è, che più tardo è il rifacimento delle corna minori riſpettivamente alle maggiori, e alle labbra: l' altra, che in alcune le corna non ſono talvolta uguali in lunghezza e groſſezza: e ſinalmente, che non ho mai veduto, che ſi rifaccia la pelle ſagrinata.

Ho epilogato ſino a qui i ſucceſſi delle oſſervazioni, che m' imponeſte di fare. Io non ſo veramente qual foſſe l' oggetto del comando voſtro circa una materia, che voi, Amico pregiatiſſimo, prima d' ogni altro, indi il celebratiſſimo Amico noſtro comune Sig. *Bonnet*, ed anche altri illuſtri oſſervatori maneggiarono con tanta bravura ed evidenza. Non mi poſſo recare a credere, che v' abbia perſona dotta, che oggi dubiti di queſto fatto, dopo la diligenza, la preciſione, e le avvertenze voſtre per non omettere alcuna delle circoſtanze, dirette al felice e niente dubbioſo eſito delle ſperienze. Tuttavia ſe per avventura v' ha alcuno che non preſti fede a quanto ſu queſto argomento voi dottamente pubblicaſte, io mi luſingo che vorrete invitarlo a venir qui tra noi, e replicare in compagnia voſtra le contraddette oſſervazioni. Sono ecc.

Di Padova 27 Dicembre 1783.

IL VOSTRO CALDANI.

Reverendiſs. Sig. Sig. Pad. Colend.

Dal gentiliſſimo foglio di V. S. Reverendiſs. ho compreſo ch' ella deſidera di avere qualche notizia delle oſſervazioni da me fatte intorno alla riproduzione della teſta delle lumache. Il di lei deſiderio è per me un eſpreſſo comando, a cui ubbidiſco tanto più volontieri, quanto che ho la piacevole ſoddisfazione di annoverarmi tra quelli, che hanno confermata queſta di lei ſcoperta ; avendo tentate felicemente alcune eſperienze, delle quali gran parte, per eſſere ſtata ſottomeſſa all' eſame del pubblico, per convincere alcuni Critici, che pubblicavano queſto fatto di fiſica animale come impoſſibile, ha perciò acquiſtato quel grado d' autenticità, che da taluni forſe in queſta ſorta di prove potrebbeſi credere neceſſaria, affine che poſſano valere a dimoſtrare ſenza contraſto, che la rigenerazione della teſta di queſti rettili non è una ſemplice viſione di alcuni pochi Naturaliſti.

Le prime mie eſperienze furono fatte l' anno 1780 in occaſione, che in certi Fogli, i quali ſi pubblicano ogni ſettimana fra noi, trovai inſerite alcune lettere in cui da certi Anonimi io era sfidato a moſtrare la riproduzione della teſta delle lumache, ch' ella reciſe in mia caſa la prima volta, che venne in queſta città. Non potendo ſoddisfare alla loro curioſità per eſſer periti tutti que' rettili, cred' io per cagione della alterazione avvenuta nella cruſca, dentro la quale per conſervarli furono da me incautamente ripoſti tutti bagnati, e riflettendo che a nulla ſarebbe ſervito per convincerli il citar loro le felici prove fatte da *Müller*, *Schaeffer*, *Roos*, *Bonnet*, *Lavoiſier*, ed altri accuratiſſimi Naturaliſti, che confermarono queſta ſcoperta, deliberai di rifare di nuovo le eſperienze.

Preſi a 10 di Luglio, tempo che è reputato il più favorevole al buon eſito delle riproduzioni, dodeci lumache della ſpecie, che *Linneo* nella Fauna Svecica chiamò *Helix pomatia*, e ſimili a quelle che inviai a V. S. Illuſtriſs. l' anno paſſato. Premuroſo che le mie prove riuſciſſero a dovere, non mancai d' uſare tutte quelle precauzioni che mi ſembrava richiedere queſta ſpecie di delicate eſperienze ; traſcurando le quali avviene che queſti rettili periſcano, come appunto per mancanza delle dovute precauzioni perirono quelle decapitate da' Signori *Adanſon*, e *Bomare*, e dal P. *la Cotte*. Non volli pertanto (ed ella forſe in ciò mi troverà troppo ſcrupoloſo) per farle ſortire dal guſcio immergerle nell' acqua, come ella aveva praticato, e come ſenza che ne avveniſſe pregiudizio a quelle ſue lumache praticò il Sig. *Bonnet*. Ma poſatele ſu delle tenere erbe aſpettai pazientemente, che uſciſſero dal guſcio da per ſe ſteſſe. Quando vedeva, che aveano ben allungata la teſta, con un pajo di ben affilate forbici la recideva loro immediatamente al di dietro delle grandi corna. La parte reciſa d' ogni una era da me accuratamente eſaminata, proccurando che chi aſſiſteva a queſta operazione oſſervaſſe in eſſa le quattro corna, la bocca, e perſino i denti, affinchè la teſtimonianza di ſpettatori poteſſe addurſi per riſpoſta a' noſtri Cenſori nel caſo che ſeguendo la riproduzione mi aveſſero obbiettato, per impugnarla, quello che obbiettava il Sig. *Adanſon*, cioè a dire, che non eraſi tagliata la teſta, quella macchina compoſtiſſima, quale ce la dimoſtra la notomia fattane da *Swamerdam*, e da *Muralt*, ma la di lei ſemplice calotta. Finita l' operazione rinchiuſi le lumache in una giarra, che ricoprii di carta tutta ſorata affine che l'aria interna poteſſe cangiarſi e non diveniſſe nocevole alla vita di queſti rettili. A 28 d' Agoſto ritrovai tutta lacerata la carta che ſerviva di coperchio, ed alcune lumache attaccate alla ſuperficie eſterna del vaſo. Poſatele di nuovo ſull' erba, eſſe uſcirono ſuora del guſcio, e le ritrovai tutte dodeci vive. La riproduzione però non era in tutte egualmente avanzata, perciocchè in alcune ſolo ſe ne vedeva il principio, mentre in altre era quaſi del tutto compita. In alcune vedeaſi ſpuntare ſul troncone una ſpecie di globetto biancaſtro, in altre ſul globetto già più creſciuto ſi vedevano ripullulare uno, o più corna diſuguali in groſſezza, ed in lunghezza, oſſervandoſi, che le corna poſteriori invece di terminare con una ſpecie di globo terminavano in un apice ſu cui appariva un punto nero, che certamente era l' occhio. In quelle poi nelle quali la riproduzione era quaſi del tutto ultimata vedeaſi la teſta diſtinguibile dall' antica, per un certo colore meno carico, e per eſſere eſſa non ancora ben ſornita di tutte quelle parti, che entrano nella ſua compoſizione, giacchè in altre di queſte vi era ſolamente formato uno delle corna maggiori, in qualche altra ſi oſſervavano tutte due, ma non egualmente lunghe, in qualche altra oltre le corna maggiori ripullulavano ancor le minori. Io amputai di nuovo la teſta ad una di queſte lumache, nella quale ritrovai che non eraſi ancora riprodotto il dente, mentre la lacerazione della carta ſopraddetta che copriva la giarra mi aveva aſſicurato, che in alcune i denti erano già rigenerati.

Veduto

Veduto il felice ſucceſſo di queſte eſperienze, mandai molte di queſte lumache all' Editore de' pubblici fogli con una lettera nella quale lo pregava d' invitare i noſtri Cenſori ad oſſervare il riſultato delle mie prove. Io ebbi la ſoddisfazione di leggere nei fogli ſeguenti una loro riſpoſta, nella quale confeſſavano eſſere reſtati convinti, che la rigenerazione della teſta delle lumache era una fiſica verità, che eſſi avevano riguardata fin' allora come un prodigio non ancora ben accertato, ſedotti dall' eſito di alcune loro prove mal eſeguite.

Io non avrei più penſato a decapitare altri di queſti rettili ſe ſorpreſo dalla varietà che oſſervai nei ſopraddetti sì riguardo ai progreſſi della riproduzione nei diverſi individui, sì riguardo all' ordine della rigenerazione delle diverſe parti della teſta, non mi foſſi invogliato d' inveſtigare da quali principj dipendano queſte varietà. La coſtanza, con cui ſi oſſervano queſte tali bizzarrie, come conobbi paragonando le mie eſperienze con quelle di V. S. Reverendiſs., e de' Signori *Bonnet*, e *Senebier*, m' avevano accertato, che eſſe non potevano averſi per ſcherzi della natura, ma che dovevano dipendere da leggi coſtanti ed invariabili. Ma queſte leggi ſono forſe determinate dal taglio, oſſia che queſto ſi faccia più o meno avanzato, oſſia che ſi faccia più o meno obbliquo? Queſta queſtione, ch' Ella tra le altre ha propoſta nel ſuo *Prodromo*, fu quella che mi propoſi di eſaminare.

Preſi a tal oggetto ſulla fine di Febbrajo dell' anno ſcorſo dodeci lumache della medeſima ſpecie delle ſopraddette, ed uſate tutte quelle precauzioni, che aveva praticate colle prime, reciſi loro la teſta, diverſificando a bella poſta il taglio. Nella metà di eſſe feci il taglio verticale, ma alcun poco più diſtante dalle grandi corna di quello che io aveſſi praticato nelle prime; nell' altra metà lo feci più, o meno obbliquo, laſciando in alcune intatto uno delle grandi corna. Le lumache furono eſſe pure al ſolito rinchiuſe in una giarra coperta nell' iſteſſo modo, e dopo un meſe avendole viſitate, ne ritrovai cinque morte, mentre l' altre ſette aveano formato il loro coperchio. Su queſte avrei voluto fare le mie oſſervazioni; ma riflettendo che avrei dovuto far loro qualche violenza per farle uſcire dal guſcio, me ne aſtenni, ricordatomi di ciò che dice il Sig. *Plateretti*, che le violenze, che ſi praticano a queſto oggetto ſu queſti rettili, lor divengono fatali, e ſono ſovente la cagione per cui ſi vedono andar a vuoto le eſperienze. Aſpettai fino al principio di Luglio, nel qual tempo rotto il coperchio, e poſatele ſull' erba le ritrovai tutte ſette vive, oſſervando che in eſſe, ſiccome era avvenuto nelle prime, la riproduzione non era egualmente avanzata. Di quelle a cui aveva fatto il taglio verticale due ſole erano ſopravviſſute. Sul troncone di una di queſte ſi vedeva ſpuntare un globetto bianchiccio, ſu cui rinaſceva un corno, nell' altra la teſta era quaſi rigenerata del tutto, e vedevanſi alzate due delle grandi corna, ma ineguali in lunghezza. Nelle altre cinque di quelle, in cui il taglio eraſi fatto obbliquamente, manifeſtavaſi la riproduzione ſotto l' apparenza di una maſſa informe, e che non aveva ancora preſa quella giuſta conformazione, che avrebbe dovuto avere. In alcune di queſte ſi vedevano già rigenerate, e più o meno creſciute quelle corna, che erano ſtate amputate, mentre in altre non ripullulavano ancora.

In queſte mie ſeconde eſperienze avendo oſſervata quella medeſima varietà che mi ſi era preſentata nelle prime, nelle quali il taglio eraſi fatto uniforme, ſarei ſtato quaſi inclinato a decidere che l' ineguaglianza della forza riproduttrice, che agiſce nei diverſi individui, ſiccome pure l' ineguaglianza di queſta medeſima forza, che agiſce nelle diverſe parti della teſta, ſia affatto indipendente dal taglio. Ma penſando che le leggi, con cui la natura regola queſti fenomeni, non devono determinarſi da poche, ma da molte, e replicate oſſervazioni, io ſtimai meglio ſoſpendere per allora il mio giudizio, e moltiplicare le mie ſperienze.

Egli è perciò che ſul finire dell' eſtate paſſata in compagnia del Sig. D. *Mongiardino* feci l' amputazione della teſta ad un gran numero di lumache, diverſificando il taglio in molte e differenti maniere, e non ſolo feci il taglio verticale una o più linee dietro le grandi corna, e lo feci ancora più o meno obbliquo; ma in altre una, o più linee avanti le corna maggiori, ed in altre non reciſi che la ſola metà della teſta. Poche ſono perite, e le rimanenti oſſervate da me nei ſcorſi giorni vivono tuttavia. Ma nella preſente fredda ſtagione, ſiccome giuſta quello che ſcrivono li Signori *Pla-*

teretti, e *Troia*, ed io ho pure verificato nelle mie ſeconde eſperienze, la forza riproduttrice non è che pochiſſimo attiva, io non potrò ſoddisfare ancora per lungo tempo alla mia curioſità.

Il gran numero delle lumache, che nella ſcorſa primavera inviai a V. S. Reverendiſs., avrà forſe ſervito a mettere in chiaro le leggi, da cui dipendono queſte varietà. Io mi luſingo, che le eſperienze, ch' Ella avrà tentate ſopra di quelle, avranno avuto principalmente per iſcopo di decidere le queſtioni, che da lei furono propoſte nel ſuo *Prodromo*, e che conducono alla ſcoperta di queſte medeſime leggi. Le farò moltiſſimo obbligato, ſe ſi compiacerà di ſignificarmene il riſultato. Io non dubito, quando Ella ſiaſi occupata di queſte ricerche, che da quella ſua accortezza, con cui ha ſaputo ſorprendere la natura in molti de' ſuoi più ſtupendi ed oſcuri lavori, non ſia condotta al ſuo termine la teoria di queſte riproduzioni. La quale è tanto più intereſſante, quanto che ſerve ad illuſtrare moltiſſimo la Fiſica animale.

Io ſono col più profondo riſpetto

Di V. S. Reverendiſs.

Genova 10 Gennajo 1783.

Umiliſs. Obbligatiſs. ſervitore
GIO: BATTISTA PRATOLONGO.

Al Signor Abate

LAZARO SPALLANZANI

Regio Profeſſore di Storia Naturale nell' Univerſità di Pavia e Soprantendente al pubblico Muſeo della medeſima.

MICHELE GIRARDI

A. C.

Il ricercarmi che fate, perchè io di nuovo tenti l' eſperienze voſtre ſopra le lumache terreſtri, altro non è che un effetto manifeſtiſſimo di quella imparziale premura, che vi guida, per lo ſcoprimento del vero entro i miſterioſi arcani della natura, onde ſempre più luminoſa trionfi con la verità l' eſattezza delle oſſervazioni voſtre, le quali ſono ſu di tal baſe appoggiate, che l' ingiurie dell' invidia non temono nè quelle del tempo. Egli ſembra un fatale deſtino, che le ſcoperte più luminoſe e più utili abbiano dovuto in ogni tempo incontrare acerbi oppoſitori, i quali ſebbene non abbiano mai potuto oſſuſcare quei benefici raggi di luce, che trapelavano per diradare le tenebre, pure hanno ſervito talvolta a ritardarne gli ulteriori vantaggioſi progreſſi. Queſto inciampo nell' avanzamento delle cognizioni umane da due fonti, s' io mal non m' appongo, mi è ſembrato mai ſempre derivare, cioè dalla preſunzione, che d' ordinario è figlia dell' ignoranza, e dall' invidia: dalla preſunzione, perchè taluni, sdegnando di oſſervare, non ſanno, nè poſſono perſuaderſi che vere ſiano quelle coſe, che ſorpaſſano i limiti del loro riſtretto ſapere; quindi ignorando quanto vi è di maraviglioſo e ſorprendente nel mirabile artificio della natura, tutto ciò, che non ſanno, negano francamente: dall' invidia poi, perchè certi accigliati uomini, che vorrebbero ſedere a ſcranna, tenendoſi per ſaputi aſſai, mal ſoffrono che altri veggano più lungi di loro; quindi inalzato tribunale, null' altro potendo, condannano imperioſamente tutto ciò, che intralcia loro il cammino, e ſi oppone all' apice di quella gloria, la quale ſoli pretendono poſſedere.

Fra queſti io non dirò certamente che ſiano mai li Signori *Adanſon*, *Wartel*, *Cotte* e tant' altri, e particolarmente il Sig. *Adolfo Murray*, uomo dotto ed ingenuo e mio particolare amico, ma ſibbene io credo che queſti illuſtri Signori ſi ſiano oppoſti alle voſtre ſcoperte, perchè rifatte non abbiano eſattamente l' eſperienze da voi inſtituite; oppure, il che è anche più ragionevole, le abbiano ſoltanto riſatte in alcune di quelle lumache, nelle quali il rinnovamento del capo non avviene, come noi pure non di rado abbiamo oſſervato. Queſti ſoli adunque per mio avviſo meritano, che ſi renda loro ragione di queſto mirabile e particolare fenomeno, giacchè inutile ſarebbe per gli altri, che nè ſanno, nè vogliono perſuaderſi.

E prima ch' io vi traſcriva il riſultato delle mie oſſervazioni, giacchè faſtidioſo troppo ed a voi inutile per certo ſarebbe il deſcriverle minutamente, permettetemi ch' io vi accenni quello, che oſſervare ho potuto nel notomizzare, per quanto è a me ſtato poſſibile, le lumache, e particolarmente la teſta di queſte, la quale è per avventura molto più composta di quello che taluno potrebbe facilmente darſi ad intendere. Quanto però difficile ſia il far queſto, allora che vivono, lo conoſce facilmente chi dar ſi voglia la pena di eſaminarle: mentre o voglianſi oſſervare allora che ſtanno chiuſe nel proprio nicchio, ivi ſono così rannicchiate e riſtrette, che difficiliſſimo rieſce e quaſi impoſſibile all' oſſervatore di eſplorarle a dovere: oppure voglianſi conſiderare, allora che ſi ſtraſcicano diſteſe fuori del proprio guſcio, al ſolo toccarle ſi contraggono, ſi ritirano sì ſollecitamente e per modo entro la loro abitazione, che roveſciataſi internamente con la parte anteriore del piede la cute del collo, vanno a rannicchiare, ed a naſcondere la teſta quaſi nel centro del proprio corpo, producendo così quelle difficoltà, che abbiamo teſtè accennate; le quali difficoltà maggiori ancora ſi fanno, ſe vogliamo aggiungere quel tenace e viſchioſo umore, che in copia effondono, e la validiſſima forza muſcolare, che hanno, mercè della quale allora che vengono tocche dal coltello anatomico, le parti ſempre più fortemente ſi reſtringono fra loro.

Per declinar dunque per quanto ſia poſſibile da queſte difficoltà, tre furono le maniere da me uſate nel notomizzar le lumache, la prima già propoſta dal celebre *Swammerdamio*, a cui tanto dobbiamo in queſta parte, laſciandole morire nell' acqua; l' altra di levarle dal guſcio, allora che ſono in moto, laſciandole così perire; la terza di riporle nell' acqua fredda, facendole indi nella medeſima per alcun poco bollire: nelle quali differenti maniere ſiccome non di rado avviene che rimangono col collo, capo, e talvolta anche con le corna fuori del guſcio diſteſe, così mi hanno ſomminiſtrata occaſione, onde poterle comodamente oſſervare.

La lumaca conſiderata allora che ſi ſtraſcica, portando ſeco la propria abitazione, o morta in poſizione che a queſta riſponda, moſtra per lo innanzi un lungo collo, il quale va a terminare nella teſta, da cui ſpuntano quattro corna, due maggiori e ſuperiori, due minori ed inferiori, le quali allungate che ſieno, internamente moſtrano nelle eſtremità un picciolo globo, dal quale nelle due maggiori trapela un punto nereggiante, che diceſi l' occhio. La parte poſteriore del collo ha il ſuo confine in una prominenza circolare, che comunemente labbro o pur collare vien detta, nella cui deſtra parte ſcorgeſi un foro aſſai manifeſto inſerviente alla reſpirazione, ed in cui mette foce quell' inteſtino, donde eſcono gli eſcrementi. La parte ſuperiore del collo e della coda è coperta di una pelle ſagrinata glandulare, e variamente colorita ſecondo le diverſe ſpecie delle lumache. La parte inferiore, di cui ſerveſi la lumaca per iſtraſcicarſi, e che dicono piede, è liſcia facile coperta da tenuiſſima membrana, nel cui centro ſi veggono delle linee longitudinali, ed ai lati delle tranſverſali, che altro non indicano ſe non i faſcetti dei ſottopoſti muſcoli inſervienti alle varie loro azioni e reazioni. Quella parte anteriore ed eſtrema del piede, che corriſponde alla mandibola inferiore, con eſſa non ſi congiunge, e vi laſcia un picciolo vacuo intervallo tra l' una e l' altro, il che forſe è fatto, perchè la mandibola ne' ſuoi neceſſarj moti eſſer poſſa più libera e più ſpedita. Al di ſotto delle corna minori ſi ſcorgono i labbri, che qualora ſi aprono, oltre i piccioli denti ſi vede la cavità della bocca e la lingua. Finalmente ſotto del deſtro corno maggiore, e forſe un poco poſteriormente vicino al piede vedeſi un tenue e bianco ſegno tra i piccioli granelli della cute, il quale è già noto null' altro eſſere ſe non ſe l' apertura ſemminile: e ſiccome le lumache tutte ſono ermafrodite, così al lato di queſte eſce l' arneſe maſchile (*a*) inſerviente alla generazione. Queſto ſegno, che anche dai più eſercitati difficilmente ſi ſcorge, diventa egli così turgido nel tempo degli amori, che compariſce manifeſtiſſimo. Mi è egli avvenuto più d' una volta di ſorprendere queſti animali nel tempo del loro accoppiamento, e di vederli ancora, allora che ſtanno per accoppiarſi. Riſcontrati che ſi ſono, ed approſſimatiſi l' uno all' altro, rieſce piacevole il vedere, come ſcambievolmente prima d' unirſi ſi tentano, e ſi

---

(*a*) Tav. I. let. *b*.

ritentano col capo e col collo, e quaſi a vicenda l' un l' altro ſolleticandoſi s' invitano all' accoppiamento. Quindi diſpoſti e dall' eſtro amoroſo eccitati, arroveſciando fuori del capo il loro arneſe maſchile di ceruleo ſangue turgido e gonfio, a vicenda e nel tempo medeſimo l' introducono nell' aperta femminile natura, ed ivi l' internano, e vi ſi approfondano, e vi ſi avviticchiano per modo, che volendoli indi diſgiungere, talvolta anche dopo due ore e più, piuttoſto frangonſi i loro arneſi maſchili, di quello che eſſi dal loro accoppiamento deſiſtano. In queſto forzato diſtendimento facile è l' oſſervare, come i canali, in cui ſi produce internamente l' arneſe maſchile, comprendano, e ſtringano il principio dell' appendice dell' utero e della vagina, che tutto trovaſi in queſta circoſtanza di ſangue ceruleo intumidito e diſtinto.

Queſto è quello, che ſi può vedere ſenza il ſoccorſo del coltello, il quale però rendeſi neceſſario, qualora vogliaſi eſaminare l' interna organizzazione e particolarmente del capo, che è l' argomento principale delle noſtre ricerche. Reciſa dunque nella parte ſuperiore di mezzo longitudinalmente la cute e con queſta il muſcolo cutaneo, che copre il collo ed il capo, e roveſciata ai lati, ſi vede prima d' ogn' altro, oltre una tenue aracnoide membrana nella parte anteriore ed eſtrema, un globo quaſi ovale (*a*) e prominente, che comprende le due mandibole, la bocca, la lingua, ed il cominciamento ancor dell' eſofago. La mandibola ſuperiore è cartilaginoſa, e forma interamente il palato. Dalla parte anteriore ed eſtrema di queſta propende un dente ſemilunare oſſeo, che ſembra al colore ed alla figura uno di que' pettini di tartaruca, ai quali le noſtre donne ſogliono per vaghezza raccomandare poſteriormente al capo gl' inanellati capelli. Queſto dente non è che un aggregato di ſei o ſette denti inciſori tutti appuntati inferiormente, ma agglutinati ed uniti in maniera, che formano un ſolo dente.

La mandibola, o piuttoſto gengiva, o labbro inferiore non ha denti; è come diſtinta da due corpi molli laterali, quaſi cilindrici, che comprendono d' ogni lato la lingua, il colo-

---

(*a*) Tav. I. let. *bb*.

re dei quali è poſteriormente carico ai lati dell' eſofago. La bocca è circonſcritta anteriormente e poſteriormente da' denti e dall' eſofago, ſuperiormente ed inferiormente dal palato e dalla lingua.

La lingua non è libera, ma ritrovaſi tutta ſerrata ed unita alla gengiva inferiore. E' compoſta di due membrane ben reſiſtenti, ſerrate e quaſi cartilaginoſe. La ſuperiore ſi uniſce alla membrana, di cui è coperta la mandibola inferiore, e ſcorrendo all' indietro, s' inflette poſteriormente, e diſcendendo s' incurva, e ſi produce anteriormente ſotto la membrana inferiore; indi recedendo, va a terminare in una picciola, cieca, e globoſa appendice *(a)*, che ſi vede prominente nella parte inferiore del globo ovale. Queſta appendice contiene un bianco, allungato et incurvato cilindro ſolidetto, che mobile eſſendo, e corriſpondendo alla parte anterior della lingua, ove comincia l' eſofago, non ſembra ivi eſſere dalla natura ſenza un particolare offizio coſtituito. La membrana poi inferiore e ſottopoſta della lingua, che è di molto più craſſa della ſuperiore, conveſſa ſuperiormente, inferiormente cava e ſemicircolare, ha la ſua radice nella parte anteriore della mandibola inferiore, e termina libera ove la ſuperior membrana poſteriormente s' inflette. Queſta ſtruttura particolare di lingua ſembra fatta per ſupplire al difetto dei denti, che mancano, onde ſoffrendo gli alimenti l' azione del reſiſtente palato e della lingua, l' opera della maſticazione veniſſe ad eſſere adequatamente perfezionata.

Ove termina poſteriormente il palato e la bocca, ivi comincia l' eſofago, che ſi vede nella parte ſuperiore e poſteriore del globo ovale tra i due dutti ſalivali, che ſi uniſcono al globo per penetrare nella cavità della bocca. E' queſto nel ſuo cominciamento riſtretto aſſai, ma in progreſſo ſi fa maggiore; è di un livido cenerino, ed è fatto di una tenue membrana a creſpe longitudinali compiegata, mercè delle quali facilmente ſi dilata, e ſi ſtringe.

Sopra la parte anteriore del globo ovale ritrovaſi talvolta il

---

(*a*) Tav. II. let. *d*.

il cervello (*a*), di color pallidetto e come diviſo in due lobi lateralmente allungati; diſſi talvolta, perchè il cervello delle lumache è mobile, e cambia di luogo, ſecondo le varie mozioni delle medeſime, ora ritrovandoſi anteriormente, ed ora ritirandoſi poſteriormente del globo ovale ſopra l' eſofago, maſſime allora che ſono fuori del guſcio allungate e diſteſe; il che avviene per opera di alcuni muſcoli, che ſcorrono ai lati del cervello, e che ſono mirabilmente ad eſſo per alcuni filamenti intralciati ed uniti. Queſto cervello, che non ha forſe in larghezza l' eſtenſion d' una linea, nè più di una e mezza in lunghezza, maggiore però e minore a norma della maggiore o minor grandezza delle lumache medeſime, compartiſce molti nervi, i quali ſebbene ſiano ſtati diſtintamente delineati dal celebre *Swammerdamio*, pure non mi ſembra fuor di propoſito il deſcriverli, come è a me avvenuto di vederli; avvertendo per altro che, ſe in queſti vi ſi riſcontraſſe qualche leggiera diverſità, io non intendo che attribuiſcaſi a difetto altrui, ma piuttoſto ſoffrirò che ſi aſcriva alla mia non ſufficiente deſtrezza in eſaminare ſimili minutezze; e maſſime che nel rintracciamento di queſte io non mi ſono ſervito di lente alcuna, per cui gli oggetti oltre al naturale grandeggiaſſero, baſtandomi di diſtinguerli ſenza ſoſpetto di travedimento o d' errore.

Dei nervi, che ſi propagano alla teſta delle lumache, altri ſono immediatamente procedenti dal cervello, altri mediante un ganglio, che vien formato dalle gambe (*b*) del cervello medeſimo, le quali abbracciano ſecondo la varia poſizion dello ſteſſo ora la parte anteriore del globo ovale, ora l' eſofago, e che ritrovaſi non molto maggiore di un grano di miglio al di ſotto, ed anche un poco poſteriormente, del globo ovale accennato. Seguendo l' ordine della ſezione, diremo in primo luogo dei nervi del cervello, indi di quelli del ganglio.

Dal cervello naſcono dodici nervi, cioè ſei per ciaſcun lato, ch' io comprendo in ſei paja: altri dei quali ſcorrono

---

(*a*) Tav. I. let. *i*.
(*b*) Tav. I. let. *l*.

poſteriormente, anteriormente altri. Il primo, che diremo muſcolare, naſcendo dalle gambe del cervello medeſimo va poſteriormente ad inſerirſi nel muſcolo retrattore del globo ovale; gli altri cinque ſi diſtribuiſcono anteriormente, e ſono i labiali ſuperiori, i labiali inferiori, i mandibulari, gli ottici maggiori, gli ottici minori. I labiali ſuperiori naſcono dalla parte anteriore del cervello, e ſcorrendo ai lati del globo ovale, ſi dividono anteriormente in due manifeſti filamenti, l' uno dei quali va a ſpiegarſi nella parte ſuperiore dei labbri ſuperiori, l' altro termina nell' inferior parte dei labbri medeſimi. I labiali inferiori cominciano inferiormente in vicinanza dei ſuperiori, ſcorrono a lato dei primi, indi paſſano ſotto al globo ovale, e vanno a diſtribuirſi in più filamenti nella mandibola o labbro inferiore. I mandibulari hanno origine nella parte poſterior del cervello, e ſcorrendo poſteriormente, s' inſeriſcono nel globo ovale in vicinanza dei dutti ſalivali, e ſi diramano per la bocca, gola, e palato. Gli ottici maggiori vengono dai lati del cervello, ſi attaccano per mezzo di una tenue membrana al muſcolo motore de' corni maggiori, e vanno a terminare in un bulbo periforme nelle eſtremità dei corni medeſimi. Gli ottici minori, oppure i nervi dei corni minori, naſcono egualmente dai lati del cervello in vicinanza dei maggiori, s' uniſcono al muſcolo dei corni minori, e diviſi in più filamenti vanno a terminare nell' eſtremità dei corni minori del muſcolo cutaneo e della mandibola inferiore.

La denominazione di ottici minori, che attribuiſco a queſti nervi, e che può a taluno ſembrar troppo arbitraria e fors' anche affatto inconveniente, fu da me deſunta non dalle proprietà dei nervi medeſimi, ma dalle affinità ſoltanto, che queſti hanno con i nervi dei corni maggiori, i quali vengono comunemente chiamati ottici. Queſti furono così denominati, dappoichè il celebre *Swammerdamio* ha ſaputo col mezzo di lenti acutiſſime ritrovare in quel punto nereggiante, che trapela nell' eſtremità di queſti, organi inſervienti alla viſta, vale a dire l' uvea, i tre umori, e la lente criſtallina compreſa dalla ſua membrana. Io non negherò queſta mirabile ſtruttura, la quale non ſarà per altro facile a confermarſi; ma dirò ſoltanto, che le mie oſſervazioni m' hanno indotto a credere, che, ſe v' è in queſti corni l' organo della viſta, v' è ancora certamente quello del tatto, anzi queſto tanto più ſenſibile di quello, quanto che l' organo del tatto è manifeſtiſſimo, e quello della viſta tanto debile e confuſo, che laſcia luogo a dubitarne moltiſſimo. Molte furono l' eſperienze da me fatte per pur vedere, s' io poteva trarmi dal capo queſta dubbiezza, ma tutt' inſieme altro non fecero che confermarmela maggiormente. Quando le corna erano ben allungate e diſteſe, e che i punti nereggianti trapelavano ad evidenza, io vi approſſimai varj corpi di vario genere e colore, ma queſti non mi diedero quaſi mai indizio di certa e diſtinta viſione, poichè di rado ho potuto oſſervare, che le lumache per queſti corpi, che ſtavano quaſi a contatto dei loro corni maggiori, o deviaſſero dal lor cammino, o ritiraſſero le corna, o almeno le infletteſſero per iſchivare i corpi medeſimi. E ciò, che accrebbe ancora la mia dubbiezza, ſi fu, che neppure alla viva luce d' un' acceſa candeletta, o al raccolto viviſſimo fuoco d' una lente non potei mai ottenere, che le corna maggiori cambiaſſero della lor natural direzione, ſe non allora quando il troppo intenſo calore le obbligava a ritirarſi. E ſebbene, replico ancora, mi ſia talvolta avvenuto, che nell' approſſimar loro un qualche corpo lucente oppure opaco, abbiano dato un qualche indizio della loro viſione, le replicate ulteriori eſperienze ſono ſtate così a queſto contrarie, che m' hanno o confermati i dubbj miei, o almeno fatto toccar con mano, che, ſe veggono queſti rettili, la loro viſta è debile fuor di modo e confuſa. Quanto però ſembrano eſſere difettoſi in queſto, altrettanto al tatto ſono ſenſibiliſſimi. Quindi è che, qualora ſi ſtraſcicano naturalmente, li veggiamo portare innanzi e ben diſteſe le corna maggiori, acciocchè da queſte a qualunque leggieriſſimo tocco poſſano eſſere avvertiti, come i ciechi dal lor baſtone, a deviare nel lor cammino dall' obice, che riſcontrano. Baſta veder le lumache, allora che vanno, per accertarſi di queſto. Muovonſi eſſe per modo, che ſembrano andar tentone, e quaſi brancolando, nè certo ſi arreſtano per qualunque corpo loro ſi ponga dinanzi, ma allora ſoltanto, e come ſorpreſe, qualora in eſſo s' incontrano, ed urtano con le corna, che ſubito ritirano; poſcia allungandole di nuovo ſembrano toccando, e ritoccando ritentare con eſſe, e quaſi ſoſpeſe l' intoppo medeſimo, e prendendo dal lor tatto come norma alla lor direzione, o deviare dal lor cammino ſe l'obice è forte, o ſe leggiero continuarlo. La qual coſa ſe è di fatto, come appariſce, ſembra ragionevole l' inferire, che le lumache non abbiano occhi, o ſe pure gli hanno, la natura non potendo altrimenti gli abbia di parti minutiſſime, e quaſi impercettibili compoſti, onde poſſano eſſe, non già con diſtinzione e chiaramente, ma debolmente ed in confuſo vedere gli oggetti; ſoſtituendo poi alla minutezza di queſti l' eſquiſitezza del tatto, onde conoſcere diſtintamente gli oggetti medeſimi. Quindi facile rieſce l' intendere a qual uſo ſervir debbano le globoſità, che ſi oſſervano non ſolo nelle corna maggiori, ma nelle minori ancora, vale a dire perchè la ſuperficie ſi faccia maggiore, e così i punti dei contatti ſi moltiplichino, onde maggiore ſi renda in benefizio e difeſa delle lumache la ſquiſitezza del tatto medeſimo. Ma queſta non è che una ſempliciſſima congettura da me a voi, che ſentite tant' oltre in queſte materie, per particolar mio lume e riſchiaramento propoſta.

Ritornando alla organizzazion del cervello, abbiamo veduto, che le gambe di queſto compongono il ganglio, come la protuberanza anullare è compoſta dalle gambe del cervelletto umano. Da queſto ganglio ſi diramano molti nervi, altri de' quali vanno anteriormente, altri lateralmente, poſteriormente altri, ed altri infine inferiormente; diremo ora ſoltanto di quelli, che ſcorrono anteriormente al capo, ſiccome quelli che riguardano particolarmente il noſtro argomento. Dalla parte anteriore di mezzo ſi produce un nervo, che va con retta linea a piantarſi nella parte inferiore e poſteriore del globo ovale. Dai lati eſcono due faſcetti di nervi, uno per ciaſcun lato, che ſi ſpiegano per il muſcolo cutaneo in più diramazioni, alcune delle quali ſcorrono ſino alle radici de' corni maggiori, e nella deſtra parte s' inſeriſcono ancora nel prepuzio e nella vagina. Delle moltiplici poi diramazioni dei nervi inferiori alcuni ſcorrono anteriormente, e vanno a perderſi nell' eſtremità anteriore del piede.

Reſtano finalmente i muſcoli del capo, che ſono il retrattore del globo ovale, i due retrattori dei corni maggiori, due dei corni minori, due mandibulari, che tutti vengono dai muſcoli, che ſi partono dalla colonna ſpirale. Il retrattore del globo ovale, che è il maggiore di tutti, va ad inſerirſi nella parte inferiore e poſteriore del globo accennato. I retrattori dei corni maggiori ſi tingono anteriormente di color foſco oſcuro, e terminano in un corpiccino ſolidetto, oblongo, ſchiacciato e cavo, che finiſce verſo l' eſtremità dei corni maggiori. I retrattori minori paſſano ai lati del cervello, a cui ſono aderenti mercè gli ottici minori, indi verſo l' eſtremità ſi dividono in due, il minore dei quali paſſa all' eſtremità delle corna minori, il maggiore ſi diſtribuiſce nel ſottopoſto muſcolo della pelle. I mandibulari aſcendendo in più faſcetti di fibre diviſi e diſtinti, inclinati a vicenda l' un contro l' altro vannoſi ad unire ſino all' apice della mandibola inferiore nel muſcolo cutaneo parimenti diſtribuiti. Oltre queſti, altri ve ne ſono ancora, che ſebbene tenui ed a guiſa di filamenti, pure ſono eleganti aſſai, e meritano d' eſſere ricordati, e diſtinti. Queſti, ch' io chiamerò col nome di briglie, ſi veggono ſuperiormente, e nella parte inferiore del globo ovale. Le briglie ſuperiori (*a*) ſono ſemplici, le inferiori ſono triplici. Le ſuperiori ſono ai lati del globo ovale in vicinanza dei dutti ſalivali, e terminano nei labbri ſuperiori. Le briglie inferiori ſi dividono in maggiori, minori, e minime, ovvero lunghe, brevi, e breviſſime. Le lunghe (*b*) naſcono ſotto il globo ovale nel luogo, ove s' inſeriſce il muſcolo retrattore, e vanno a terminare al lato interno delle corna minori. Le brevi (*c*) cominciano un poco più avanti delle più lunghe quaſi nel mezzo del globo ovale, indi divergendo, e decuſſandoſi con le lunghe, vanno a terminare nel lato eſterno delle corna medeſime. Le minime o breviſſime (*d*) hanno origine avanti le brevi, e terminano quaſi rettamente nell' eſtremità del muſcolo cutaneo ſottopoſto alla mandibola inferiore. Qualora ſi contraggono, queſte bri-

---

(*a*) Tav. I. let. *c*.
(*b*) Tav. II. let. *ee*.
(*c*) Tav. II. let. *f*.
(*d*) Tav. II. let. *g*.

glie ritirano i labbri, e portano innanzi il globo ovale; la qual azione è di tanta importanza, che difficilmente ſi ſpiegherebbe, come ſenza di queſte briglie ſi poteſſero le mandibole portar tanto avanti, che il dente talvolta ſi ſpingeſſe a livello dei labbri, e quaſi oltre ancora, come non di rado avvenire ſi vede, qualora le lumache prendono cibo, e maſſime allorchè tentano di afferrare col dente un qualche incomodo bricciolino.

Ora che abbiamo detto quale ſia la mirabile ſtruttura del capo delle lumache, paſſerò a deſcrivervi il riſultato delle mie ultime oſſervazioni, giacchè queſte iſteſſe furono da me fatte ſino dal 1772 e 1773 con quelle conſeguenze medeſime, che voi prima d' ogn' altro avevate nel voſtro *Prodromo ſopra le riproduzioni animali* accuratamente deſcritte. Queſte eſperienze furono da me fatte ſu di quelle lumache, che dal celebre *Linneo* furono chiamate *Helices*, *Pomatiae*, *Italae*, *Luſitanicae*, *Zonariae*, *arbuſtorum*, *nemorales*, *lucorum*, *griſeae ecc.* Il primo di Maggio del 1782 reciſi le corna maggiori a ventiquattro di quelle lumache, che voi mi faceſte tenere da Reggio, a tante altre reciſi le maggiori e le minori, ad un egual numero l' eſtremità della coda, a ventiquattro pure reciſi il capo, e per fine a tante altre un lembo laterale del piede di più di due linee in larghezza, e di dieci circa in lunghezza, e queſte varie reciſioni furono nel giorno medeſimo da me ripetute in altrettante lumache parmigiane, che erano delle ſpezie medeſime delle reggiane. Le prime lumache furono da me ſegnate con lettera *A*, le ſeconde col *B*, e così le altre tutte diſtintamente, ed indi in varj caneſtri egualmente diſtinti ripoſte, e cuſtodite. Con taglienti forbicette reciſi le corna, allora che erano interamente uſcite dal capo, ad alcune alle radici, ad altre per metà. Il capo poi, la coda, ed il piede con affilato coltello, allora che ſi ſtraſcicavano bene ſporte fuori del guſcio ſopra d' un piano eguale e reſiſtente, e ciò per eſſere più ſicuro del taglio, e per iſchivare quegl' inconvenienti, che di frequente avvengono, qualora di forbici ſervir ci vogliamo nell' amputazione di queſte parti e particolarmente del capo (*a*). Il luogo dell' amputazione di queſto fu allo incirca una linea e mezza al di dietro delle corna maggiori.

Quello, che mi è avvenuto di oſſervare nella reciſione di queſte parti, eccovelo brevemente. Dalle corna, e dalle maggiori particolarmente, ho ſempre veduto eſcire un umore ceruleo, che bagna d' ordinario il tagliente metallo. E' facile il veder queſt' umore, qualora ſott' acqua ſi recidono le corna, e faciliſſimo poi, ſe l' acqua medeſima ſia dai vivi raggi del ſole penetrata. Non ſolo ſi ſcorge allora, che l' umore, che eſce, è ceruleo, cioè il ſangue, che ſcorre per i canali di queſti rettili, ma ſi conoſce ancora la forza, con cui eſce, e da lungi zampilla, e la quantità; eſſendomi non di rado avvenuto di vederlo continuato per più e più minuti ſecondi, e ſoſſermato di vederlo per la ferita medeſima ad eſcire di nuovo con forza e quantità maggiore. Alla qual coſa ſe ſi aggiunga, che talvolta le corna veggonſi floſcide, appaſſite e cadenti ſopra i labbri, qualora ſiano ſtate reciſe alle eſtremità, e l' impotenza di poterſi più oltre intumidire, e diſtendere naturalmente, ſembra che non foſſe per eſſere di gran lunga lontano dal vero chi penſaſſe, che a queſto ſolo umore ſi doveſſe l' arroveſciamento eſteriore e diſtendimento delle corna, giacchè in tutta l' interna organizzazione, per quanto io m' abbia potuto cercare, non mi è mai riuſcito di vedere nè muſcolo nè tendine nè troclea, che poteſſe eſſere a queſt' officio inſerviente. Queſto umore medeſimo ed in quantità maggiore eſce egualmente all' amputazione del capo, meno poi nella reciſione del piede e della coda, e frammiſchiato ad un umore tenace e viſchioſo. Le corna reciſe ſubito dopo l' amputazione o non danno più ſegno di vita, o tenue aſſai e breviſſimo. Non però così le teſte, mentre dopo tre, quattro, e talvolta ſei e ſette minuti ed anche più, irritando le loro corna, moſtrano apertamente che conſervano ancora una ſenſibilità non equivoca. Reciſa appena la teſta ſi contraggono toſto, e ſi ritirano nel proprio guſcio; alcune pe-

---

(*a*) Queſta lodevole precauzione è ricordata ancora dal Sig. Dottore *Vincenzo Plateretti* nella Scelta di Opuſcoli, che ſi pubblicano dottamente in Milano.

rò di queſte poco appreſſo compariſcon di nuovo, moſtrando appena nel luogo dell' amputazione già contratto un bianco e ben riſtretto ſegno nel centro, e veggonſi indi ſtraſcicar come prima e così viſpe, come ſe il capo loro reciſo non foſſe.

Queſta facilità di moto e queſta vivezza nelle lumache decapitate potrebbe facilmente indurre taluno a credere, che le teſte non foſſero loro reciſe a dovere, e queſta credenza preſſo la maggior parte potrebbe ancora facilmente prenderſi in luogo d' indubitata certezza. Tutto queſto però trovaſi intieramente diſſipato, e tolto dalla più ſcrupoloſa notomia: mentre nelle teſte reciſe veggonſi oltre le quattro corna le mandibole, i denti, la lingua con le ſue appendici, i nervi tutti, i muſcoli, le briglie: oltre l' eſtremità dell' eſofago, dei dutti ſalivali, del prepuzio, e della vagina per modo, che non rimane alcun dubbio che il capo non ſia ſtato intieramente reciſo.

Le lumache, delle quali ſino a qui parlato abbiamo, e particolarmente le decapitate, e quelle ancora, che dopo la decapitazione ſi ſtraſcicavano, contraendoſi tutte ſi ritirano nella propria portatile abitazione, ed ivi tutto che ſenza capo ſi ritirano, riſacendo all' ingroſſo quel bianco tenace coperchio, che è un prodotto del viſchioſo umore, che gemono, mercè del quale ſoglionſi dalle eſterne ingiurie naturalmente diſendere. Queſta ſituazione però quanto è comoda per loro e vantaggioſa, altrettanto viene ad eſſere incomoda all' oſſervatore, che vorrebbe vederle di tratto in tratto uſcire per eſaminarne con diligenza i riſultati. Per ottener ciò, ho proccurato, per quanto mi fu mai poſſibile, di non aggiungere all' ampia piaga e profonda, che hanno, ulterior ſtimolo, come quello di rompere poſteriormente il guſcio, e talvolta ancora, ſe ad uſcire ſono ritroſe, di punzecchiarle, il che ſe non venga fatto da mano maeſtra ed a ſimili eſperienze avvezza, avviene di frequente che quelle appunto, che furono così ſtimolate, infelicemente ſen muojano. Per ottener dunque l' intento e ſenza nocumento alcuno, io proccurai d' invitarvele, e farle uſcire ſpontaneamente, come in fatto mi avvenne, o col riporle nell' acqua tepida, oppure coll' eſporle alle dolci pioggie di primavera e d' eſtate, nelle quali ſogliono naturalmente all' aria aperta produrſi.

Tenendo

Tenendo adunque queſto metodo, nulla mi è avvenuto di oſſervare di nuovo dopo dieci, quindici, ed anche venti giorni, e ſoltanto il più delle volte dopo un meſe oſſervai in quelle, che avevano interamente reciſe, o dimezzate le corna maggiori, al luogo dell' amputazione alzarſi un picciolo globo, il quale in progreſſo di tempo facendoſi maggiore, moſtrava nel centro un punto nereggiante, il quale corriſpondeva perſettamente a quello, che ſi oſſerva naturalmente nell' eſtremità delle corna maggiori; quindi allungandoſi in ſeguito, a capo di due meſi, e più frequentemente di tre, ho veduto rifatte le corna maggiori e le minori ancora.

Queſte corna rifatte non hanno da principio il loro color naturale, ma ſono d'un bianco pallido, ed hanno la cute molto più dilicata di quella del capo medeſimo; in progreſſo però riacquiſtano il lor colore primiero, e formano un tutto eguale per modo, che rieſce difficiliſſimo anzi impoſſibile il diſtinguerle da quelle lumache, a cui le corna reciſe non furono. Che queſte corna rifatte corriſpondano interamente alle prime, ce lo moſtra ad evidenza la notomia: e queſte pure ſi diſtendono, ſi riconcentrano, e ſono dotate della ſenſibilità medeſima delle prime.

Come le corna, così ſi riproducono ancora e la coda ed il piede; anzi ho oſſervato particolarmente, che queſte ſi riproducono con continuazione eguale di ſoſtanza, e ſi perfezionano con maggiore brevità di tempo, che le corna medeſime; e queſte parti rinnovate ſono eſſe pure di un bianco pallido, che preſto ſi perde, non rimanendo più veſtigio dell' amputazione ſeguita.

Quello che abbiamo oſſervato delle corna, della coda, e del piede, lo abbiamo veduto ancora del capo, con queſta differenza però, che talvolta nel luogo dell' amputazione dopo un meſe o circa queſto tempo ſi vede nel centro ſpuntare un picciolo globo di frequente irregolare; talvolta ſi ſcorge da un lato, tal altra invece di uno ne compariſcono due, cioè uno per ciaſcun lato, il prodotto dei quali non è ſempre corriſpondente tra loro: mentre da quello di mezzo ho quaſi ſempre veduto dopo due, tre, talvolta quattro meſi riprodurſi perfettamente la teſta, e così dei due laterali congiungendoſi inſieme, ma dal ſolo laterale ho quaſi ſempre veduto ſeguirne una produzione irregolare, mentre facendoſi maggiore, ſpunta d' ordinario nell' eſtremità un ſolo corno, e per lo più il maggiore, il quale allungandoſi ſupera in lunghezza e groſſezza le corna naturali, ſebben però abbia l'organizzazione medeſima delle corna primiere. Parecchie lumache ſi conſervano in queſto ſtato, e ne ho preſentemente ancora vive e vegete dopo un anno, che in nulla hanno cambiata queſta loro irregolar produzione.

La rinnovazion della teſta corriſponde alle parti, che abbiamo di ſopra deſcritte. La cute di queſta non è da principio così ſagrinata come la naturale, ma più liſcia e più eguale, ed è pur eſſa d'un colore men carico, cenericcio, e così dalla vecchia cute diſtinto, che ſembra con iſtupore che al vecchio collo ſia un nuovo capo applicato, e congiunto. Molti de' miei amici con ſorpreſa videro queſte nuove riproduzioni, e voi pur le vedeſte in compagnia dell' erudito e celebre comune noſtro amico Sig. Angelo *Mazza*, quando foſte nel paſſato autunno gentilmente a favorirmi. Queſta varietà di colore, che ſi protrae oltre lo ſpazio di più meſi, ſi cangia poſcia, nè altro veſtigio rimane tra la rifatta e vecchia cute ſe non ſe un tenue leggiero ſolco al luogo dell' amputazione, il quale pure col tempo ſvaniſce.

Che le teſte rifatte corriſpondano interamente alle prime, lo moſtra la notomia, poichè in eſſe ivi ſi veggono tutte quelle parti, che abbiamo di ſopra deſcritte. E ciò, che accreſce ancora nel rinnovamento di queſte parti la meraviglia, ſi è, che, ſe non vi foſſe quella diſtinzione di colore tra la cute del collo e quella del capo, tutte le parti interne così ſono fra loro continuate, eguali, e corriſpondenti per il colore, ſoſtanza, e ſimmetria, che impoſſibile aſſolutamente ſarebbe il diſtinguere le riprodotte da quelle, che mutilate non furono.

Appena rifatte le teſte cercano toſto le lumache di riparare il lungo forzato digiuno, e fanno uſo delle rifatte lor parti in quella maniera medeſima, che il facevano da principio. Erano li primi d' Ottobre dell' anno paſſato, allora quando col beneficio d'una tenuiſſima pioggia ſtava io riguardando queſti rettili, che tutti uſciti dal guſcio facevano di sè vaga moſtra all' oſſervatore. Era in mia compagnia uno di quegli uomini, che per natura loro ſono portati a creder poco, e niente poi di quello che ſente del meraviglioſo. Egli dunque non ſolo dovette confeſſare, dal confronto di altre naturali lumache, che quelle avevano una teſta riprodotta, tutto che foſſe a queſto contrario; ma oſſervò meco una di queſte, la quale volta la ſua rinnovata teſta all' insù ſtava affaticandoſi per afferrare coll' avanzato dente una briccia di cruſca, che al ſuo guſcio era in parte attaccata ed in luogo incomodo ancora coſtituita; ed in que' ſuoi rinnovati sforzi quanto mai fu piacevole l' oſſervare le replicate azioni e reazioni dell' aperta bocca, dei molli labbri, della lingua e del dente, che in mille modi volteggiando quel bricciolino, tanto fece, che infine gli riuſcì di ſtaccarlo, e di farſene un ben ghiotto ed aſſaporito boccone.

Queſto mirabile rinnovamento del capo non avviene però in tutte le lumache, e molto meno in quelle maggiori, che corriſpondono in grandezza ai martinacci di Firenze, nè d' ordinario in quelle picciole, che diconſi giardiniere, e veggiamo particolarmente negli orti a varj grazioſi colori ſegnate e diſtinte. Quelle, che da me furono con proſpero evento cimentate, ſono l' *Helix Pomatia*, *Itala*, *Zonaria*, *nemoralis*, *lucorum*. Di trecento però e più di queſte lumache da me in varj tempi decapitate, altre ſi conſervano tuttora, quali ſenza riproduzione alcuna, e quali con produzione imperfetta ed irregolare, ed altre infine rifecero perfettamente la teſta. Di quelle che morirono, furono in maſſima parte quelle da me ſegnate particolarmente, alle quali o l' amputazione non era ſeguita a dovere, oppur quelle che furono decapitate quaſi quattro linee dietro le corna maggiori, e per conſeguenza quelle, alle quali oltre il capo aveva reciſo porzione dell' arneſe maſchile, dell' appendice dell' utero, e dell' utero medeſimo. Quelle poi, che conſervanſi ſenza riproduzione alcuna oppure imperfetta, tali ſi veggono ancora, forſe perchè eſſendo di età troppo avanzata, mancano le di loro fibre della neceſſaria mollezza, fleſſibilità e vigoría, e però troppo rigide non poſſono ſtenderſi, e conformarſi a dovere, onde riprodurre perfettamente le parti amputate.

Gli accidenti tutti, che ho fin qui notati, furono da me quaſi per egual maniera riſcontrati tanto nelle lumache reggiane che nelle parmigiane, talchè in queſto nulla mi è avvenuto di vedere, che meritaſſe una particolar conſiderazione, il che prova, che quando l'eſperienze ſono eſatte, le lumache della medeſima ſpezie danno per tutto i prodotti medeſimi.

Ma è ormai tempo, che dia fine a queſta lunga lettera, la quale certo avrà ſorpaſſati i limiti della voſtra pazienza. Raccogliendo quanto vi ho ſcritto, voi non vedrete che una conferma di quanto voi avete diligentemente avanzato nel voſtro *Prodromo*, cioè che le lumache hanno la proprietà di rifare le parti mutilate, vale dire le corna, il piede, la coda, e la teſta. Le oſſervazioni quando ſono eſatte, e vengono da un Filoſofo, quale voi ſiete, che in queſte materie

Siete maeſtro di color che ſanno,

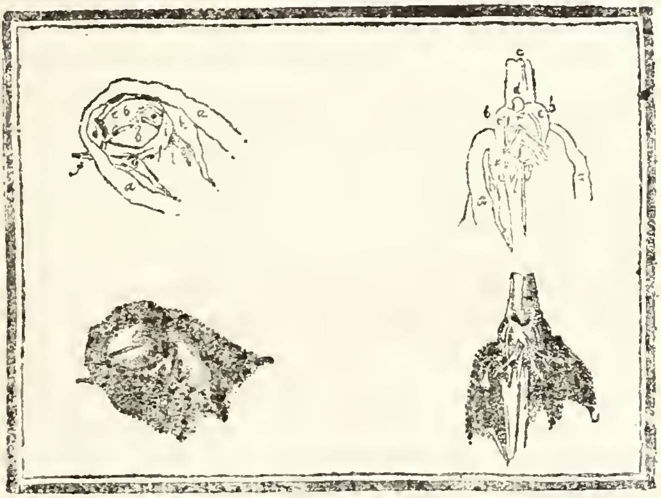
uſando delle debite circoſpezioni, da per tutto e facilmente ſi devono riſcontrare, e ſi riſcontrano veriſſime. Io vi mando queſte oſſervazioni, non perchè meritino di venire da voi, conoſco la loro pochezza, e veggio ciò, che lor converrebbe, ma perchè richieſte da voi, e perchè veggiate quanto il compiacervi mi ſtia a cuore, onde abbiate certo argomento, che nulla più deſiderar poſſo, quanto il farvi conoſcere, che ſono con particolar ſtima ed amicizia voſtro ecc.

FIGURA I.

aa	La pelle ſagrinata.
bb	Il globo ovale.
cc	Le briglie ſuperiori.
d	La bocca ed i denti.
ee	L'eſofago, ai cui lati ſi veggono i dutti ſalivali.
f	Il corno maggiore.
g	Il ſuo muſcolo.
h	L'organo genitale.
i	Il cervello, e
l	La gamba ſiniſtra di queſto.

FIGURA II.

aa	La pelle.
bb	Il globo ovale roveſciato innanzi.
cc	Il muſcolo retrattore del globo medeſimo.
d	Globoſa appendice della lingua.
ee	Le briglie inſeriori lunghe.
f	Le brevi.
g	Le breviſſime.
h	Il muſcolo del corno maggiore.
i	Il muſcolo del corno minore.
l	Il muſcolo mandibulare.



ARTICOLO III.

Rifleſſioni.

Per la numeroſa ſerie dei fatti nel ſecondo Articolo addotti, avranno di leggieri conoſciuto gl' imparziali lettori, che quando io il primo tra Naturaliſti annunziai al pubblico nel mio *Prodromo* la rinnovazione del capo nelle lumache decapitate, e quando queſta rinnovazione è ſtata da me amplamente confermata nella prima Memoria, io non ho fatto che render paleſe al Mondo fiſico una incontraſtabile verità per lo innanzi non conoſciuta: e quindi ſi ſaranno facilmente accorti, che hanno avuto il torto gli Autori nel primo Articolo rammemorati, allorchè con le loro eſperienze ſi ſono affidati di ſolidamente combatter le mie. Ciò non pertanto queſta medeſima verità non può che acquiſtar forza maggiore, e farſi più convincente, più perſuaſiva, nell'animo eziandio di quelli che ſtati ſono per l' addietro i meno diſpoſti a riceverla, ſe rileggendo le tracce delle oſſervazioni, e ſperienze così favorevoli, che contrarie, vorremo accompagnarle da alcuni brevi rifleſſi, la qual coſa ho io deliberato di fare nel preſente Articolo.

Diamo cominciamento dalle favorevoli. Ma ad intelligenza, e a perſuaſione maggiore di quanto io ſono per dire, non ſarà diſutile di ricordar brevemente al lettore quanto da noi è ſtato oſſervato nella prima Memoria intorno alle parti, che compongono l' intiera teſta delle lumache, e al ſito preciſo, dove in eſſe far ſi dee il taglio, per andar ſicuri di averla tutta quanta reciſa. Oltre adunque alle quattro corna, quivi ſi è detto che la loro teſta eſteriormente conſiderata riſulta de' proprj integumenti fatti a ſagrino, di due labbra, e di due māndibole. Se poi dall' eſterno paſſeremo all' interno, la troviam compoſta d' una picciola lingua, di un dente ſemilunare di ſoſtanza quaſi cornea, impiantato nella mandibola ſuperiore, di una porzione d' eſofago, e del cervello diviſo in due lobi. Le corna maggiori poi ſi veggono alla ſommità fornite del nereggiante loro occhio, del loro nervo ottico, e de' movitori loro muſcoli. Quanto poi al ſito dove facendo l' amputazione ſiam certi di aver troncata l' intiera teſta, ſi è moſtrato che un tal ſito è al di là della radice delle corna maggiori per l' intervallo d' una linea all' incirca, ſiccome lo fa vedere la notomia. Ciò premeſſo ſcendiamo ad eſaminar di volo i fatti comprovanti queſta riproduzione, dal qual eſame apparirà ſempre più non ſolo eſſer vane e ridevoli le oppoſizioni di quelli che ricuſan di ammettere il rifacimento di qualunque parte del capo, come ſono ſtati d' avviſo i Signori *Wartel*, *Cotte*, *Bomare*, *Schröter*, e *Argenville*, ma l' altre eziandio, per cui ſi argomentano i Signori *Mur-*

ray, *Adanſon*, e *Preſciani* di poter negare la riparazione dell' intiera teſta, quantunque accordino la riparazione di qualche parte.

E per cominciare dal Sig. *Roos* (per ſeguir l' ordine nel nominar queſti Autori che ſi è tenuto nel ſecondo Articolo) oltre a due lumache, l' una delle quali avea già rimeſſe le corna maggiori, e l' altra le quattro corna, e la bocca, ei dice formalmente che una terza lumaca, alla quale era ſtata tagliata la teſta alla radice delle corna, ne aveva acquiſtata una nuova, unitamente alle quattro corna pur nuove. Se adunque in queſt' ultima lumaca era ſtato operato il taglio alla radice delle corna, chi non vede che la teſta riprodotta doveva già eſſer munita, tra l' altre appartenenze, ſe non d' un nuovo cervello, d' una porzione almeno di eſofago, delle labbra, del dente, delle mandibole, della lingua?

Ma le lumache del Sig. *Lavoiſier*, una delle quali con la nuova teſta ſomigliantiſſima alla vecchia fece egli vedere alla Reale Accademia di Parigi, oltre al rifacimento delle mentovate parti, dovevano avere rigenerato il cervello, per averne fatta l' amputazione al di là delle quattro corna. E la ſaggia maniera, con cui queſto celeberrimo Accademico deſcrive i principj, e gli avanzamenti di tale riproduzione, e l' autorevoliſſima teſtimonianza di così illuſtre e riſpettabile Ceto conciliano pieniſſima fede alla narrazione de' ſuoi tentativi.

Non meno deciſive ſul riſacimento dell' intiera teſta, e non meno giudizioſe ſono l' eſperienze regiſtrate negli Atti della prelodata Accademia, che furono inſtituite da' Signori *Turgot*, *Tenon*, ed *Heriſſant*. Quivi eſpreſſamente ſi avverte che ad alcune delle lumache mutilate fu interamente troncata la teſta, e ſi paſſa in ſeguito a deſcrivere il naſcimento, oſſia lo ſviluppo di una teſta novella, la quale arrivata al convenevole ingrandimento laſcia vedere tra le altre parti il riprodotto dente ſemilunare.

Con le eſperienze di queſti Accademici di Parigi conſuonano mirabilmente quelle del *Müller*. E quando io nomino il *Müller*, intendo di ragionare di uno de' primi Naturaliſti della Germania. E quella diligenza, ſagacità, e oculatezza, che oltre al raro ſuo ſapere caratterizza le rinnomate ſue Opere, ſi diſtingue altresì nella ſenſata ſua Memoria ſu le lumache. E di quanto io dico facilmente converranno i lettori da que' ſaggi avvertimenti, che precedono la citata Memoria, l' uno de' quali ſi è, che per accertarſi il Tedeſco Naturaliſta di avere decapitate a dovere le ſue lumache, dopo l' amputazione eſaminò ad occhio nudo, e alla lente la teſta già ſpiccata dall' animale, e vi oſſervò, e vi fece oſſervare a più intelligenti le parti principali che la compongono, come le quattro corna, gli occhi, la bocca, le labbra, le maſcelle, ecc. Quantunque poi diverſe di queſte lumache non riproduceſſero, o riproduceſſero male, altre però riproduſſer beniſſimo, rifabbricando compiutamente quelle parti ſteſſe, che avevan perdute, il che baſta all' intento.

Si è pur veduto che alla preſenza di molti Profeſſori di Medicina, e di Fiſica è ſtata fatta l' amputazione non poco al di là delle corna maggiori dal Padre *Scarella*, celebre Matematico, e dotto Fiſico, la cui morte da alcuni anni ſeguíta non laſcia Breſcia di piangere, di cui era uno de' principali ornamenti: e che l' operazione per mezzo di due nuove e taglientiſſime forbici ſi faceva preſtamente, e in un colpo ſolo non dando così tempo alle lumache di ritirarſi. Non oſtante però la piena ſicurezza di aver troncata la teſta, e di averla per intiero troncata, per eſſerſi fatto il taglio molto al di là delle corna maggiori, ſi è queſta rifabbricata, in quali più, e in quali meno; e tra queſte una lumaca l' aveva così compiutamente rifatta, che a riſerva del colore, e della mollezza, non era diſtinguibile la teſta nuova dalla vecchia. E una ſimile compiuta riproduzione ſi ebbe altresì da una lumaca decapitata dal valente Anatomico, e Fiſiologo, Sig. Dottore *Puſini*, che fu pur veduta, e ammirata dal mentovato chiariſſimo Padre.

Il Sig. *Schaeffer* di Ratisbona, il cui ſolo nome preſſo i Naturaliſti vale per il più ſplendido elogio, non avviſa nella lettera a me ſcritta, nè tampoco nel picciolo eſtratto che la accompagna, dove abbia preciſamente fatto il taglio alle ſue lumache. Per ſaper ciò biſognerebbe conſultare le ſue Diſſertazioni in tedeſco relative a tale ſoggetto, le quali io non ho vedute. Ciò non pertanto l' avermi egli formalmente detto, che *le ſue ſperienze e oſſervazioni hanno verificato pienamente*

mente le mie, e il ſaperſi che tali oſſervazioni, e ſperienze partono da un Fiſico sì addeſtrato nella difficil arte di ſperimentare, e sì eſercitato e sì grande nello ſtudio de' minuti animali, ſono preſunzioni troppo forti per credere ch' egli abbia veramente recisa quella parte anteriore di corpo, che conſtituiſce l'intiera teſta, e che quindi ottenuto ne abbia veracemente una novella, non già una porzione, oppure una ſoprapelle, un invoglio.

Avverte queſto illuſtre Naturaliſta di avere *fors' anche ſpinta alcun poco più in là di me la ſua curioſità*: e vuole probabilmente alludere a quanto ſi accenna nell' eſtratto indicato, cioè che egli *ha veduto coſtantemente rinaſcere non ſolamente le teſte, ma le code eziandio, che loro aveva tagliate*. E certamente dal non avere il Sig. *Schaeffer* avuto altra notizia de' miei tentativi, a quel ch' io mi ſappia, che da' pubblici fogli (almen quando ſperimentò egli) ne' quali fogli non ſi facea che annunziare la ſola riproduzione del capo, aveva egli tutta la ragione di dir queſto. Il vero è però che oltre l'avere io veduto il rifacimento del capo, ho altresì veduto l'altro di quella parte, che alcuni chiamano *coda*, e che è l'eſtremità poſteriore del piede della lumaca; anzi ho io ottenuto il riproducimento di tutto il piede, oſſia di quella porzione del corpo, a cui appoggiaſi l' animale quando ſi ſtraſcica: e queſto in termini formali lo dico alla pag. 70 del *Prodromo*, e lo ripeto poi nella prima Memoria. Godo pertanto di veder anche confermata queſt' altra mia oſſervazione, nè ſolamente dal Sig. *Schaeffer*, ma da altro Naturaliſta non men valente di lui, nè men celebre, quale ſi è il Sig. *Lavoiſier*, che come ſi è veduto nel ſecondo Articolo ha conſeguito egli pure il riproducimento della medeſima parte.

A diverſe delle lumache, di cui ragiona il Sig. Abate *Troilo* (per paſſare alle ſperienze di queſto dotto Fiſico) oltre alla teſta venne levata qualche porzione di collo. Nè fu punto a ſtupire ſe tutte perirono: che anzi fu piuttoſto a maravigliare che alcune prima di laſciar di vivere deſſero fuora un principio di riproduzione. Per l' oppoſito non poche di quell' altre, che ſotto il tagliente metallo laſciarono l' intiera teſta, e non più, la rifecero pur intiera: e una delle prove deciſive, che gli organi che la compongono ſi erano rifatti, fu che queſte lumache fecero uſo della bocca, e dei denti col prender cibo.

La medeſima pruova fu data altresì da una delle lumache decollate dal Sig. *Senebier*, cioè a dire da quell' illuſtre Ginevrino che ci ha dato un eccellente Trattato intorno all' *Arte dell' oſſervare*, e che ha poi avvalorato il precetto con l' eſempio, arricchendo la Fiſica d' ottime produzioni ſperimentali, e recentemente di belliſſime, e ſenſatiſſime Memorie *ſu l' Influenza della luce ſolare nel modificar gli eſſeri dei tre Regni della Natura*. Sebbene il cibarſi di queſta lumaca non fu il ſolo argomento, onde inferì il Sig. *Senebier* che rifatta aveva compiutamente la teſta. Lo riconobbe anche a chiariſſime note dall' eſſer ritornato il ſuo teſtaceo a quello ſtato di perſezione, in cui era prima d' eſſere decollato. Che poi foſſe ſtata veracemente levata la teſta così in quella lumaca, che in altre diverſe che la reſtaurarono più o meno, non vi poteva cadere il più picciolo dubbio, per aver egli notomizzate le teſte reciſe, e per aver confrontate le parti che le compongono con la notomia delle lumache datane dall' immortale *Swammerdamio*.

Non era neppure da penſarſi che le ſperienze del compatriotta del Sig. *Senebier*, cioè a dire d' un *Bonnet*, le cui Opere pubblicate fanno le delizie, e l' ammirazione del ſecolo, non foſſero convincentiſſime. Quante cautele non adoperò egli perchè l' operazione del taglio foſſe fuori del dardo degli avverſarj! Quanta oculatezza non usò per accertarſi di avere interamente tronca la teſta! Quale aſſiduità, quale ſtudio, quale diligenza nell' oſſervare minutamente i fenomeni delle teſte riproducentiſi! Con quanta evidenza non dimoſtra egli il rifacimento dell' intiero capo in qualche lumaca! Con quale imparzialità non ci dice egli che altre hanno riprodotto male, altre non hanno riprodotto di ſorta, altre anzi che riprodurre ſono perite! Sebbene queſte importanti verità verranno guſtate grandemente di più dal lettore, ſe vorrà conſultare le Memorie ſteſſe del noſtro Filoſofo, conoſcendo io troppo bene, che l' eſtratto per me abbozzato non tramanda di eſſe che un languidiſſimo e ſmorto parelio.

Rimarrebbe ora a parlare delle tre lettere de' Signori *Caldani*, *Pratolongo*, e *Girardi*, che gentilmente ſi ſono compiaciuti di favorirmi, e per le quali io debbo profeſſar loro la mia più riſpettoſa e più viva riconoſcenza, facendo vedere come anche da queſte lettere rimanga nel più rigoroſo modo comprovata la riproduzione di tutta la teſta, ſe non rifletteſſi che trovandoſi eſſe nella preſente Memoria pubblicate come mi ſono ſtate traſmeſſe da' loro chiariſſimi Autori, i conoſcitori leggendole per intiero ne comprenderanno meglio la forza, e ne rimarranno quindi più perſuaſi, e convinti. Piuttoſto io mi tratterrò per poco ſopra alcuni luoghi di queſte lettere concernenti certi fatti, che per la preſente materia non ſarà che bene di mettere in chiaro.

Il Sig. Profeſſore *Caldani* ſul finir della lettera tocca due leggieri divarj tra la teſta nuova e la vecchia. Il primo è che le riſpondenti corna novelle non ſono talvolta eguali fra loro in lunghezza, e in groſſezza.

Cotal fenomeno ho io altresì qualche volta oſſervato, ed entra nel novero di quelle diverſe anomalie o moſtroſità da me diviſate in più luoghi di queſto ſcritto, e che di nuovo mi converrà di toccare più ſotto.

L' altro divario riſguarda la mancanza di quel ſagrino ſu la pelle della teſta novella, il quale ſi oſſerva ſempre ſu la pelle della teſta vecchia. La ſteſſa coſa è pure ſtata notata dal Sig. *Lavoiſier* (*a*). Queſt' ultima differenza però non è di durata, ſiccome lo è talvolta la diſuguaglianza delle corna; ma da lunga eſperienza ho potuto conoſcere, che a poco a poco ſvaniſce, e da ultimo ſi fa nulla. Vo dunque dire che ſe le lumache, che hanno rifatto il capo, ſeguiranno a vivere per più meſi, inſenſibilmente la pelle perde quel liſcio, e quel fino che aveva, e tutta veſteſi del ſuo ſagrino, da prima non viſibile che alla lente, ma viſibiliſſimo in ſeguito all' occhio nudo. Così il nuovo, conſiderato anche eſternamente, rendeſi in fine ſimiliſſimo al vecchio (in molti individui almeno) ſenza eccettuarne il colore, il quale di bianchiccio o cenerognolo che era nella naſcente riproduzione, diventa oſcuro allorchè queſta ſi è pienamente perfezionata.

(*a*) Art. II.

La ſerie di queſte faſi, di queſti cangiamenti nell'eſterno de' noſtri rettili mutilati, da me avvertita così nel *Prodromo*, che nella prima Memoria, io la veggo pur confermata dalla Reale Accademia di Parigi, e dalla lettera dell' Anatomico di Parma.

Il celebre Sig. *Caldani* prima di terminar la ſua lettera dice, che delle lumache da lui decollate non gliene reſtavano più in vita che quattro li 27 Settembre 1782. Ora è opportuno a ſaperſi, che di quelle quattro una rifece beniſſimo il capo. Così egli mi ſignifica con ſua lettera de' 19 Aprile 1783. " Delle quattro lumache che mi rimaſero, nel paſſa„ to freddo me ne morirono tre. La quarta, che era la più „ grande di tutte, mi moſtrò, quattro giorni ſono, una bel„ liſſima teſta „.

Nel *Prodromo* favellando io delle anomalie, che non infrequentemente ſi ſcorgono ne' capi rigenerati, e che ſono ſtate poi confermate dalla più parte di quelli che parlano con eſito felice di queſte riproduzioni, cerco quale eſſer poſſa la cagion fiſica di così fatte anomalie. Ed avendo io allora qualche ſoſpetto ch' eſſa proveniſſe dal taglio più o meno avanzato, più o meno obbliquo, accenno queſta cagione, ſenza però ammetterla, nè rigettarla. Tali ſoſpetti per ulteriori tentativi eſſendo in me creſciuti, mi hanno poi indotto a dire con maggiore animo, o almeno con minor timore nella prima Memoria, che l' obbliquità del taglio, o il maggiore o minore avanzamento di queſto influiſce forſe nel produrre ſomiglianti moſtroſità.

La diligenza, e la ſagacità del Sig. *Pratolongo* ſi è eſercitata intorno a queſta curioſa ricerca, come appariſce da alcune eſperienze riferite nella ſua lettera, le quali non combinano troppo co' miei ſoſpetti. Confeſſa però eſſere troppo poche per decidere; e quindi ſoſpendendo egli il ſuo giudizio, rimette la ricerca a una ſerie novella di eſperienze, di cui non racconta l'eſito, per non avere ancor riprodotto le lumache mutilate quando ſcriſſe la lettera. Nè io in ſeguito ho ſaputo quali ſieno ſtati i riſultati di queſte nuove eſperienze. Mi convien però dire che nella ſuddetta mia Memoria, ſtampata aſſai prima ch' io riceveſſi la ſua lettera, oltre al ſoſpettare che l'accennata condizione del taglio concorrer poteſſe al producimento di quelle moſtroſità, perchè molti e replicati fatti me lo facevano credere, io adduco un' altra cagione, che mi è paruta ella pure produrre talvolta il medeſimo effetto; voglio dire ſe per fare l'operazione ci ſerviamo d'uno ſtromento, che, per non eſſere affilato come conviene, recida male nè ad un colpo ſolo la teſta,

Il Sig. *Girardi* dopo me oſſerva, che nel momento che ſi taglia un corno alla lumaca, ſegnatamente uno de' maggiori, ſchizza un picciolo zampillo di umore ceruleo. Egli ed io ſpieghiamo il fenomeno, ma diſcordiamo nella ſpiegazione. Io opino che un tal umore covi prima ne' corpi glandoloſi delle corna rotti allora dalle forbici o dal coltello (*Mem. cit.*). Egli vuol per l'oppoſito, che ſia il ſangue dell'animale o un fluido analogo che eſca con empito da' ſuoi vaſi nel momento che ſi tronca il corno. Eſaminata meglio la coſa, a me ſembra ch' egli abbia ragione, ed io il torto. Che dentro di fatti alle corna maggiori ſcorra un vaſo inſigne inoltranteſi anche per qualche tratto ſul capo, e ripieno di quell' umore leggermente ceruleo, ella è coſa da non metterſi in dubbio. Ma è pure egualmente certo, che reciſe le corna, quel vaſo appaſſiſce, e quaſi dileguaſi, per eſſerne uſcito l' umore, che in grazia del colore ceruleo lo rendeva viſibile.

Prima di uſcire di queſte lettere mi rimane a parlar d' una coſa, che ha qualche rapporto con le riproduzioni, temendo io che l' ommetterla non poteſſe creare qualche confuſione nell' animo de' miei lettori. Il ſommo Naturaliſta *Swammerdamio* ci ha laſciata un' eccellente deſcrizione anatomica dei nervi delle lumache, tanto di quelli che dal cervello ſi diramano dentro del corpo, quanto degli altri che ſi propagano al capo. Io coteſti nervi ne' miei eſami ſu le lumache ve gli ho trovati appuntino, e mi ſi è aperta l' occaſion di parlarne così nel *Prodromo*, che nella mia prima Memoria. Ma il Sig. Dottore *Girardi* nella citata ſua lettera ha ſpinto più in là dell' Olandeſe Anatomico le ſue ricerche, col darci una ſtoria dei nervi, ſegnatamente di quei della teſta, più circonſtanziata, e più ampla. Quivi ognuno può ſcorgere quanto brilla la ſua ſagacità, la ſua induſtria. I nervi adunque, che in sì gran numero ſi rinnovano nelle teſte rifatte, rendono ſempre più maraviglioſe coteſte riproduzioni. Ma ſe la preſenza de' nervi nei noſtri rettili è una verità di fatto, una verità palpabile, come dunque ſuſſiſte ciò che ha ſcritto ultimamente un chiariſſimo Autore, il qual nega aſſolutamente che le lumache abbian nervi, anzi vuole che ne ſian privi i teſtacei tutti? Così egli c' inſegna in un ſuo libro di Nomenclatura, intitolato: *Introductio ad Hiſtoriam Naturalem ſiſtens Genera Lapidum, Plantarum, & Animalium* ecc. (*Pragæ* 1777); nel qual libro favellando dei teſtacei ha queſte formali parole, *nullis nervis inſtructa*. Quelli adunque che ſi abbatteſſero a leggere la mia Memoria, e l' indicata Nomenclatura, ſi troverebbero in qualche confuſione, perchè poſti fra due contrarie autorità, l' una che ammette i nervi nelle lumache, l' altra che affatto gli eſclude. Vero è che la ſeconda non fa che negarli; tuttavia sì fatta negazione pareva non doveſſe traſcurarſi, per venire da un Uomo che ha celebrità, e che per le molte ſue cognizioni ſinceramente io ſtimo. Qui adunque per levar d' imbarazzo i miei lettori, e dirò anche me ſteſſo, non vidi miglior partito, che il conſultare l' Autor medeſimo, dal quale inteſi con ineſplicabile mio ſtupore, non ſolamente ch' egli non aveva mai fatto oſſervazioni ſu l' interno delle lumache, ma che neppure avea letto lo *Swammerdamio*; e che intanto negava i nervi, in quanto che dal Principe dei Nomenclatori riponendoſi le lumache fra i vermi, a lui era paruto che non foſſero degne di averli.

Termino di favellare delle ſperienze del Sig. *Girardi* col riferirne una ſua recentiſſima. Nel meſe di Novembre del proſſimo ſcaduto anno 1783, eſſendo io paſſato per Parma, ed avendo quivi avuto il piacere di riabbracciare in ſua caſa queſto mio pregiatiſſimo Amico, egli mi fece oſſervare alcune lumache tuttora viventi, ma chiuſe ne' loro nicchj, da lui mutilate in guiſa la ſcorſa primavera, che la ſezione oltrepaſſati aveva di molto i confini del capo. Eſſendo io in ſeguito ſtato voglioſo di ſaperne l' eſito, lo pregai ſul finire del ſuddetto anno a volermelo partecipare; ed egli ſi compiacque di farlo col ſeguente Articolo di lettera che qui traſcrivo, parendomi affatto intereſſante, giacchè da eſſo raccoglieſi, che talvolta i noſtri teſtacei ſanno riprodurre, malgrado la mutilazione di una porzione del corpo aſſai ſuperiore a quella dell' intiera teſta.

„ Le lumache da voi vedute furono da me decapitate li
„ 11 Maggio dell' anno ſcorſo quattro buone linee dietro le
„ corna maggiori, e nell' eſame del capo reciſo non ſolo vi
„ erano i muſcoli, e nervi tutti unitamente al globo ovale,
„ ai dutti ſalivali, al cervello, ecc., ma dietro a queſti tut-
„ ta la porzion groſſa anteriore dell' arneſe maſchile, e più
„ della metà dell' appendice dell' utero contenente il propor-
„ zionato angolare ovarino, per modo che a me ſembrava
„ impoſſibile che queſti rettili poteſſero novamente riprodur-
„ re le parti amputate. Ho voluto vedere in queſti paſſati
„ giorni che foſſe avvenuto di queſte infelici; e con mia ſor-
„ preſa una di quelle ſegnate con lettera *O*, nelle quali il ta-
„ glio era ſtato anche un poco più ingordo, l' ho veduta u-
„ ſcire, dopo di averla tenuta per lungo tempo ſtretta in ma-
„ no, e dopo una lunga immerſione nell' acqua tepida, pro-
„ ducendo innanzi il ſuo lungo collo, in capo al quale ſcor-
„ gevanſi manifeſtamente i principj dei due corni maggiori,
„ al di ſotto dei quali comparivano i labbri, e la bocca; eſ-
„ ſendo la cute che copriva tutta la parte anterior riprodot-
„ ta d' un cenerino molto più aperto e chiaro di quello che
„ ſi oſſerva d' ordinario nelle parti novellamente riprodotte.
„ Dopo di avere per lungo tempo, non ſenza particolar ſtu-
„ pore, eſaminata queſta lumaca, quaſi incredulo ai ſenſi miei
„ fui tentato di aprirla, per vedere internamente ancora la
„ riproduzione delle parti amputate; ma ſiccome le eſteriori
„ non erano ancora perfettamente riprodotte, così penſai di
„ traſportare a tempo più opportuno queſta nuova inſpezione,
„ per appagare con maggior fondamento la mia curioſità.
„ Quindi con geloſia tutt' ora nel mio Gabinetto, e nel ce-
„ ſtino medeſimo, ove voi le vedeſte, la ſto conſervando per
„ vederne in progreſſo che ſarà perſezionata eſternamente che
„ ſia „.

Parma li 13 Gennajo 1784.

Eſaminati tanto che baſta i fatti più principali, e più importanti dei rammemorati chiariſſimi Sperimentatori, per cui rimane confermata nella maniera la più irrefragabile la mia ſcoperta, ragion vuole che ora paſſiamo ad eſaminar quelli per cui ſi è cercato d' impugnarla, che è ciò che in ſecondo luogo propoſto mi era di ſare nel preſente Articolo. Nelle mie diverſe ricerche Fiſiche eſſendo ſtato talvolta neceſſitato a conſutare qualche errore degli altri, o a moſtrar qualche sbaglio, ho proccurato, quando ho potuto, di farlo in modo che nel tempo ſteſſo appariſſe come erano nati coteſti errori, coteſti sbagli, e ciò che far dovevaſi per non commetterli, trovato avendo un tal metodo opportuniſſimo per dilucidare ſempre più il vero; e di queſto metodo cercherò pur di valermi preſentemente. Io non ſo ſe così adoperando potrò acquiſtare la grazia de' Signori Contradditori; tuttavia proponendomi di parlare d'ognuno con la dovuta ſtima, e riſpetto, vorrei luſingarmi almeno che non ſe ne doveſſero offendere, a quel modo che io non ſono reſtato punto offeſo, quando hanno cercato d' impugnarmi, e di far apparire che mi era ingannato, non oſtante che la ragione militaſſe a mio favore, ed eſſi aveſſero il torto.

Il Sig. *Wartel* che fu il primo, per quanto a me coſta, a far note al pubblico le ſue ſperienze contrarie alle mie, non crede poſſibile la riproduzione nelle lumache, per non avere ottenuto il riſacimento delle corna, nè del capo nelle mutilate da lui ſu la fine di Ottobre del 1767, ed eſaminate nel meſe di Maggio del 1768.

Prego queſto ſaggio Religioſo a volermi permettere qualche conſiderazione ſu l' accennato tentativo. Quando io ho detto che le lumache terreſtri hanno il dono di riparare il capo reciſo, io ho parlato di quelle che mi eran cognite, anzi neppur di tutte queſte, ma di alcune ſpecie ſoltanto, quali ſono l' *helix lucorum*, la *pomatia*, e la *nemoralis*. Era io dunque ben lontano dal pretendere, che di tal prerogativa godeſſero tutte le ſpecie compreſe ſotto queſto genere di rettili sì prodigioſamente moltiplicati ſul globo. Il Sig. *Wartel* non diviſa punto la qualità di lumache da lui cimentata. Non poteva egli darſi che abbattuto ſi foſſe in alcune di quelle che veroſimilmente ſono inette al riprodurre? Ed eſſendo così la coſa, qual maraviglia che gl' individui da lui mutilati ſono ſempre reſtati acefali?

Ma conceduto eziandio che le lumache da eſſo ſperimentate foſſero attiſſime al riprodurre, io dubito forte che queſto

Naturaliſta

Naturaliſta coll' averle decapitate in Ottobre, ed oſſervate in Maggio, abbia avuta più fretta a negare la nuova teſta, che la Natura a rimetterla. La riproduzione negli animali non è in fine che una vera generazione; con queſto ſolo non attendibil divario che nella generazione ordinaria naſce e ſviluppaſi un tutto organizzato, e nella riproduzione naſce e ſviluppaſi una parte ſoltanto di queſto tutto. Quelle condizioni adunque che ſono richieſte al naſcimento di un tutto, ſi richieggono al naſcimento di una parte, e tra queſte condizioni vi è il calore. Nell' uomo, ne' quadrupedi, e in più altri animali di ſangue caldo naſcono i feti a qualunque ſtagione, perchè queſti maturano nel corpo della madre, dove trovano ſempre un proporzionato calore. Gli uccelli poſſono altresì far naſcere in inverno le loro uova, mediante il calore da eſſo loro ſomminiſtrato. Non così accade agli animali di freddo temperamento, i quali non propagano, nè propagar poſſono la ſpecie, che alla buona ſtagione; reſtando nel rimanente dell' anno compreſi dal freddo in guiſa, che volendo noi giudicare dall' eſterne apparenze, li crederemmo più preſto morti che vivi. Queſto ſi oſſerva nella più parte degl' inſetti, de' vermi, de' rettili, e tra queſti ultimi ſi debbono noverar le lumache terreſtri, le quali non ſi accoppiano, e non generano che in primavera, e durante tutto il verno ſi tengon ſotterra immobili affatto, e in uno ſtato letargico, rinchiuſe dentro alle calcari lor nicchie, di cui ſerrano eſattamente l' apertura con quel loro coperchio formato dal viſchioſo glutine, che geme dal corpo di eſſe. Di più le medeſime in quell' avverſa ſtagione non ſolo non generano, ma quelle che giunte ancora non ſono al neceſſario ingrandimento, riſtanno allora dal creſcere, e dallo ſvilupparſi di vantaggio, che anzi tutte quante ſceman di volume, e di peſo, come ſi fa chiaro oſſervandole quando in autunno ſi chiudon ſotterra, e quando in primavera ne eſcono. E la ragione di tal decremento è troppo patente, mentre per l' una parte in tutto quel tempo non ſi cibano punto, e per l' altra la loro traſpirazione non rimane affatto impedita. Se queſti rettili adunque non generano, ſe reſtan letargici, ſe punto non creſcono nell' intiera vernata, che è quanto a dire durante preſſo a poco tutto quel tempo che ſono ſtati cuſtoditi dal

Sig. *Wartel*, come ſi poteva egli aſpettare la riproduzione del capo? Di fatti non avviſo io forſe che per ottener queſta non vi vuol meno del grado decimo terzo del termometro reaumuriano, e che in conſeguenza non ogni ſtagione a queſto organico ſviluppo è idonea, ma la ſtate ſoltanto, e la primavera alquanto inoltrata? (*a*). Non rendo io forſe conſapevoli i lettori che, ſe la decollazione venga fatta all' avvicinarſi del verno, non comincia ad oſſervarſi un principio di riproduzione, che nel ſeguente Maggio? (*b*). E qui ſi rifletta ch' io parlo della noſtra Lombardia; per l' oppoſito nell' Arteſia dove il citato Autore ha fatto i ſuoi tentativi, e dove il freddo è aſſai maggiore, un tal principio non faraſſi paleſe che molto più tardi, come ſarebbe in Giugno. Se adunque il Sig. *Wartel* foſſe ſtato meglio iſtruito del tenore che tien la Natura nella generazione, e nell' accreſcimento de' noſtri rettili, anzi che decidere in primavera, differito avrebbe a farlo in eſtate, quando cioè ſuol manifeſtarſi coteſta riproduzione.

Ma dato eziandio che i meſi eſtivi ſtati non foſſero al riproducimento più favorevoli degl' invernali, aveva egli in virtù di quell' unica ſua eſperienza baſtevol motivo, onde giudicare impoſſibile coteſto fatto? Non ſi accorgeva che sì adoperando peccava contro la Logica? In effetto non poteva egli darſi che il buon eſito delle ſue eſperienze veniſſe impedito da qualche circoſtanza da lui non preveduta, maſſime per eſſer queſto il primo ſaggio ch' egli intrapreſe ſu queſti animali? Non dice la pagina 66 del mio *Prodromo* che in quelle ſpezie medeſime di lumache, che hanno virtù riproduttrice, ve n' ha alcune che a ciò ſono inette? Non poteva egli dunque darſi che il noſtro Sperimentatore abbattuto ſi foſſe in queſte ultime? Senza che la buona Filoſofia non c' inſegna ella che a ſtabilire una ſcoperta baſtano uno o due fatti, purchè ſieno bene avverati, nulla provando mille altri che in contrario ſorger poteſſero, per eſſere innumerabili gli accidenti che frappor ſi poſſono ad impedire la ricercata verità?

(*a*) Pref. cit. e Mem. I.

(*b*) Ivi.

Il Padre *Cotte*, Prete dell' Oratorio, ſi è eſercitato molto più a lungo del Sig. *Wartel* ſu le lumache. Queſt' ultimo dopo il riferito ſaggio non è più tornato, per quanto io ſappia, a queſte ricerche. Per l' oppoſito il primo per cinque anni ſeguiti, cioè dal 1769 ſino al 1773 incluſivamente, ha continuato a ſacrificar queſti rettili alla Filoſofia. Ma a quel modo che egli ſi è diſtinto nella moltiplicità degli eſperimenti, avrei anche voluto che diſtinto ſi foſſe nella maniera di ſaggiamente inſtituirli. Ma ſe debbo dirla com' io la ſento, a me non ſembra che in queſta parte il chiariſſimo Naturaliſta Franceſe dato abbia gran prove del ſuo valore. Veduto abbiamo nell' *Avant-coureur* che appena udite le mie oſſervazioni, fece egli con affilata forbice ſaltar per aria tante teſte, quante lumache ſi abbattè di trovare. Lodo aſſaiſſimo la ſua premura, il ſuo zelo nell' affrettarſi di cercar di avverare un fatto in apparenza sì paradoſſo. Ma non poſſo mica egualmente lodare il metodo da lui tenuto per conſeguirne l' intento. Se qualor la lumaca è fuori del guſcio, tutto quel che appariſce del ſuo corpo, non foſſe altro che la teſta di lei, era ſicuro il Padre *Cotte* di non avventurar colpo di forbice ſenza far balzare in aria in tutto o in parte la teſta. Ma occupando queſta ſoltanto la porzione anteriore del corpo dentro a certi preſiſſi limiti, era un puro accidente ſe da qualcuno di que' colpi avventurati così ſenza legge, ſenza miſura, veniva eſſa a reciderſi preciſamente. Un deſtro ed avveduto ſperimentatore, e nel tempo ſteſſo iſtruito nella Zootomia, ſarebbe ſtato men premuroſo di fare balzar tante teſte, ma più aſſai di reciderle a dovere, voglio dir col tagliare queſta parte e non altra del corpo, mirando a quel ſito preciſo col tagliente ſtromento, dove finiſce la teſta. Nè pago ſarebbe ſtato di ciò, ma dopo il colpo avrebbe con attentiſſima diligenza eſaminata la porzione dall' animale reciſa, per aſſicurarſi ſe l' operazione era ſtata fatta come conveniva. Così hanno adoperato i *Bonnet*, i *Senebier*, i *Caldani*, i *Girardi*, i *Pratolongo*, i *Müller*, e preſſochè tutti gli altri che ſi ſono preſi la pena di ripetere i miei tentativi: e mi permetterà il degniſſimo Padre s' io gli dico che così pure doveva far egli: ed io non dubito punto che in grazia di tali ommiſſioni nata ne ſia quell' orribile carnificina ſenza il minimo avventuroſo ſucceſſo.

Ma in mezzo a quella immenſità d' inutili tentativi ha egli almeno appreſo dalle lumache un' aſtuzia, atta a deludere le crudeli mire degli ſperimentatori, la quale aſtuzia non è lontano dal credere che m' abbia ingannato. Oſſerva egli adunque che la lumaca nell' iſtante che ſi ſente ferire, ſi ritira precipitoſamente dentro la caſa: che però non di rado lo ſperimentatore può credere di aver reciſa la teſta, quando non ha portato via che qualche pezzetto di pelle. Quindi gentilmente viene a redarguirmi, quaſi che le lumache ſieno ſtate più accorte nel ritirare la teſta, che io nel reciderla.

Che le lumache, quando ſentono la viva azion del coltello o della forbice, faccian l' atto di ritirare il capo, queſto è veriſſimo: ma che poi, adoperando le neceſſarie cautele, loro rieſca di ritirarlo di fatti, queſto è falſiſſimo. Se adunque lo ſtromento è bene affilato, la lumaca non ha tempo, nè può aver tempo di ricoverare la teſta, ma bensì queſta ſi trova già ſpiccata dal corpo, quando ritiraſi l' animale dentro del guſcio. E chiunque è capaciſſimo di eſeguir bene queſta operazione, purchè ad un colpo, e con celerità venga fatta. E di quanto io dico me ne appello a tutti quelli che hanno verificate le mie ſperienze, ed a chiunque amaſſe verificarle di nuovo.

Ma voglio che ſiam liberali con queſto Franceſe. Voglio che gli accordiamo che qualche volta a cagione o dello ſtromento poco tagliente, o della poca preſtezza della mano nel dare il colpo, o per qualunque altro accidente la lumaca ne reſti libera con la ſola perdita della pelle del capo. Io qui dimando, quale ſarà quel Fiſico sì ineſperto o sì diſattento, che all' iſtante non s' avvegga dello sbaglio commeſſo? La teſta di una lumaca, ſiccome replicatamente ſi è detto, non è mica una picciola coſa: ella è una macchinetta organica compoſtiſſima; e reciſa che ſia, oltre alle altre parti che vi diſcuopre la lente, ſaltano agli occhi le quattro corna, le labbra, la bocca, i denti, ecc. E come dunque ſul momento non accorgerſi ſe la porzione reciſa contien queſte parti, e in conſeguenza ſe è la verace teſta, oppure ſe non conſiſte che in quel ſolo ſuperficiale ſagrino, che è la pelle dell' animale?

Ma paſſiamo a far parola d' un altro de' miei oppoſitori, ſenza però uſcir della Francia, anzi di Parigi ſteſſo, rincreſcendomi ſolo che finite di moſtrare le ineſattezze dell' uno mi ſi preſentano ſubito quelle dell' altro. Parlo del Sig. *Valmont* di *Bomare*, dimoſtratore di Storia Naturale, e autore del Dizionario di queſta Scienza. Rileggendo quella ſua Relazione ſu la decapitazione delle lumache, vi oſſervo alcune mancanze, che qui non poſſo diſſimulare. Primieramente ſi fa chiaro che queſto Naturaliſta, non altrimenti che il Padre *Cotte*, ſi fece a mutilar le lumache ſenza curar punto due coſe rilevantiſſime, l' una di marcare il ſito dove fece il taglio, l' altra di eſaminare la porzione reciſa, per aſſicurarſi ſe aveva preciſamente troncata la teſta; di null' altro iſtruendoci egli in quel ſuo racconto, ſe non che tagliò alle lumache bruſcamente la teſta, la qual voce *bruſcamente* nulla ci dice di ciò che ſi voleva ſapere da lui.

Un' altra ommiſſione di queſto Autore ſi è quella di non iſpecificar la qualità delle ſue lumache. Egli nel citato ſuo Dizionario all' Articolo *Lumaca* ripetendo preſſo a poco quanto molti anni prima aveva fatto imprimere nel Giornale di Berna, e che è ſtato da me traſcritto nel primo Articolo di queſta Memoria, ci avviſa ſoltanto che le lumache da lui decapitate erano *terreſtri*. E di queſte lumache terreſtri ne annumera poi nel citato Articolo quindici ſpecie, e tutte quante abitatrici dei contorni di Parigi, ne' quali contorni inſtituì quel ſuo ſaggio. Tra le lumache terreſtri eſſendovi molte ſpecie che non riproducono, chi non vede la poca eſattezza dello ſperimentatore, tanto meno da ſcuſarſi, quanto che le ſue eſperienze hanno tutta l' aria di voler eſſere deciſive?

Ed a queſta ſua deciſione poi ſi riporta talmente, e con eſſa ſi tiene tanto ſicuro, che moſtraſi affatto incredulo a queſto genere di riproducimenti. Ad inſinuazione dell' illuſtre *Bonnet* feci imprimere nell' *Avant-coureur* li 30 Ottobre 1769 una mia lettera franceſe, di cui più ſotto dovrò far uſo, nella quale additando io la maniera di operare da me tenuta nelle eſperienze, facea toccar con mano la verità di quanto aſſerito io aveva nel *Prodromo*. A queſta lettera pertanto da quel celebre mio Amico eſſendo ſtato rimandato il *Bomare*, egli ebbe a riſpondergli nei ſeguenti termini li 5 Novembre 1775 ,, Poſſo aſſicurarvi, che tutte le ſperienze che ſono ,, ſtate da me fatte ſul propoſito delle lumache, io le trovo ,, contraddittorie a quelle dell' Abbate *Spallanzani* . Vedrete ,, all' Articolo *Lumaca* del mio Dizionario , ediz. del 1776 ,, quello ch' io dico intorno a queſta materia , e di che io ,, aveva già fatta menzione nel 1768,, (*a*).

Quello poi che trovaſi impreſſo in quel Dizionario ſi riduce in ſoſtanza, come ho detto più ſopra, al picciolo Articolo da me altrove traſcritto.

Sebbene queſto erudito Franceſe non ſolamente non deferiſce punto alle mie eſperienze , ma nemmeno alle altrui . Le eſperienze del Sig. *Roos*, e *Lavoiſier*, e della Reale Accademia di Parigi ſono ſtate impreſſe nel 1768 . I Signori *Müller*, e *Schaeffer* hanno pubblicate le loro, il primo nel 1769, il ſecondo nel 1770. Tutte queſte ſperienze erano dunque notiſſime , aſſai anni prima che il Sig. *Bomare* nel Dizionario di Storia Naturale ſtampaſſe le ſue . Tali eſperienze ei non poteva ignorare, eſſendo ſtate pubblicate ſotto i ſuoi occhi , cioè a dire in Parigi ; a riſerva di quelle del *Ratisboneſe Schaeffer* ſtampate in tedeſco in Germania, ma che gli dovevano pure eſſer note, pel traſunto che ſe n' era fatto in franceſe , e che corſo aveva per le parti più colte di Europa . Malgrado però l' unanime conſenſo di queſte eſperienze , che tutte tendono a confermare le mie, egli col non parlar punto di eſſe dimoſtra chiaro di non curarle. Quantunque però sì adoperando l' Autore del Dizionario non mi ſembri meritevole di molta lode, tuttavia meno lo condannerei, ſe le ſue ſperienze poteſſero in qualche modo pel merito contrapporſi a quelle dei teſtè citati Naturaliſti. Ma qual figura facciano a fronte di eſſe , laſcio che il decida il dotto ed imparzial leggitore.

Peſate le circoſtanze che accompagnano i tentativi del chiariſſimo Sig. *Schröter* , a me ſembra che del cattivo eſito dei

---

(*a*) Queſta lettera è impreſſa nelle Opere del *Bonnet* T. V. Par. I.

medeſimi ſi debba meno accagionare l' Autore, che le lumache. Vero è che in Germania egli è ſolamente tenuto in conto di prode Nomenclatore, il cui ufficio tanto è diverſo da quello del vero Oſſervatore, quanto la Grammatica differiſce dalla Fiſica. Vero è non meno che que' ſuoi tentativi ſu le lumache furono le prime ſperienze che fece in ſua vita, ſapendoſi che prima in un villaggio del Ducato di Weimar, dov' era Paſtore, ſi era occupato di tutt' altro: e pur troppo è notiſſimo che i primi ſaggi d'eſperienze, che facciamo, non ſogliono eſſere capi d' opera. Tuttavia tenendo dietro al racconto ch' ei fa delle ſue eſperienze, ſiamo indotti a penſare che il difetto della riproduzione ſia provenuto meno dall' ineſattezza di lui, che dalla qualità delle lumache cimentate, in quanto che queſte non erano probabilmente di natura atta al riprodurre. Lo argomento da ciò che di moltiſſime, che mutilò nella coda, niuna ve n'ebbe che riparaſſe queſta parte; quando da lunghiſſima eſperienza ho appreſo, non eſſervi lumaca che non ſappia ripararla, quando ſono di quelle che hanno facoltà riproduttrice. Egli è adunque troppo naturale l' inferire, che non foſſero a parte di tal facoltà le cimentate dal Naturaliſta Tedeſco.

Quell' apologia, che ho cercato di fare al Sig. *Schröter*, avrei voluto farla pel Sig. d' *Argenville*, che egli pure decapitò inutilmente qualche centinajo di lumache. Ma a dir vero non ci trovo luogo; e da quel poco che di queſto Naturaliſta Franceſe riferiſce il Sig. *Murray*, pare ch' ei non poſſa divider la colpa con le lumache. Dagl' innumerabili miei cimenti ſu di eſſe ſono ſtato ammaeſtrato, che quelle eziandio che non riproducono, non muojono toſto che ſono ſtate decapitate, ma ſeguono a viver più giorni, anzi talune più meſi. In virtù adunque di queſto fatto, che è ſicuriſſimo, e che ognuno può verificare da sè, chi non vede che ſe di alcune centinaja di lumache decollate in un giorno dal Sig. d' *Argenville*, quaſi tutte eran perite nell' altro, ciò nacque ſicuramente per eſſere ſtato più del biſogno crudele con loro, oltrepaſſando inavvedutamente col taglio i limiti della teſta, per cui ſappiamo che d' ordinario la maggior parte poco dopo periſce? Qual' altra più naturale conſeguenza poſſiam noi dedurne, volendoſi comparar queſto ſuo fatto col mio?

Il poco buon eſito dei tentativi del celebre Sig. *Murray* a me pare non poſſa attribuirſi alle mancanze dagli altri commeſſe. Le lumache ſperimentate da lui furono la *pomatia*, e la *nemoralis*, due ſpezie che ſappiamo eſſer atte al riprodurre: d' altronde non avendo egli mai nell' amputazione oltrepaſſato di molto la baſe delle corna maggiori, ſi ha fondamento di credere che l' operazione veniſſe fatta con le dovute maniere. La ſtagione proſſima all' invernale, e poco amica di queſte riproduzioni (eſſendo ſtate da lui incominciate le ſperienze li 20 Settembre, e proſeguite in Ottobre, e in Novembre) giudicherei piuttoſto che concorſa foſſe in parte a produrre in eſſe un ſuccedimento poco felice. E tanto più mi ſorprende che queſto dotto Profeſſore ſperimentaſſe in quel tempo, quanto che nella ſua Memoria cita la mia *Prefazione* alla *Contemplazione della Natura*, nella qual Prefazione tra gli altri avvertimenti relativi a queſta materia io tocco queſto, che *non ogni ſtagione è idonea al riprodurre, ma ſolamente la primavera aſſai inoltrata, e la ſtate.*

La non troppa diligenza ſua nell' eſaminare, e nel cuſtodir le lumache dopo che le avea mutilate, è facile che ſia ſtata un altro oſtacolo a quel compiuto riproducimento che egli non ebbe. Decapitò in tutto 12 lumache, due in Settembre, e dieci in Ottobre. Una delle due prime ſopravviſſe poco all' amputazione, e l' altra riproduſſe malamente un corno. Suppone poi che queſt' ultima ſia probabilmente perita, e perchè? perchè *diu poſt in eam inquirens, tam profunde ſe ſe abdiderat, ut attingi nequiret*. Supplico però di perdono queſto riverito mio Collega, s' io gli dico che non vi era niente di più facile che foſſe viva queſta lumaca, quantunque egli più non arrivaſſe a toccarla dentro del guſcio. E vo' dire che pel lungo digiuno ſofferto era veroſimilmente dimagrata a ſegno, che più non occupava che l' ima parte della ſua caſetta. Queſto io l' ho veduto aſſaiſſime volte nelle lumache da me decapitate, molte delle quali riputato avrei già perite, ſe valuto mi foſſi del giudizio del Sig. *Murray*. Ma il fatto è che rompendo più o meno i margini del guſcio, verſo il fondo di queſto io arrivava a vederle, e a toccarle, e ſe non tutte, in buona parte almeno ſi ſcoprivano piene di vita. Se altrettanto aveſſe fatto il chiariſſimo Profeſſor di Gottinga, avrebbe forſe trovato lo ſteſſo. Sebbene non gli mancavano altri mezzi per aſſicurarſi della verità della coſa: e queſti erano o d' immerger per poco nell' acqua la ſua lumaca, o di ſpruzzarla ſemplicemente di tal liquore, ovveramente di metterla al ſole, giacchè ſe foſſe ſtata viva, o con l' uno o con l' altro di tali eſpedienti ſarebbe uſcita da sè; e per tal guiſa quel ſuo giudizio non ſarebbe ſtato azzardato.

Per riſpetto poi all' altre dieci lumache mutilate in Ottobre, dopo l' averci raccontato il Sig. *Murray* che alcune mettevano un principio di riproduzione; finiſce col dirci che per un ſopraggiunto accidente gli fu conteſo di eſaminarle più in là.

Laſcio decidere al lettore qual conto ſi poſſa fare di ſimili oſſervazioni. Io però per la ſtima grande che nutro per queſto chiariſſimo Profeſſore, ſinceramente dirò che più volte meco ſteſſo maravigliato mi ſono, come ſtato ſia sì poco diligente, sì poco premuroſo pe' ſuoi tentativi; ed oltracciò come intrapreſo ne abbia sì ſcarſo numero, giacchè fuora di quelle due ſperienze il rimanente della ſua lunga Memoria è quaſi tutto un ingegnoſo teſſuto di coſe altrui. Che un Fiſico, a cui ſucceda di ottenere la tante volte menzionata riproduzione, ſi contenti di poche eſperienze, io non avrei che opporgli; che anzi una ſola che s' inſtituiſſe, e ſi raccontaſſe da lui, purchè foſſe deciſiva, potrebbe ſoddisfare i dotti. Ma ove trattaſi di eſperienze negative, o che almeno tendono a rivocare in dubbio le affermative, un contraddittore, ſe è verſato nell' eſperienze, ſe è peſato ne' ſuoi giudizj, ſe è circoſpetto e ſagace, in una parola ſe all' abilità per l' eſperienze accoppia una ſana dialettica, non dovrebbe a mio avviſo produrſi al pubblico, e ciò anche con molta ritenutezza, ſe non ſe dopo un numero ben grande di tentativi. Molto poi più trattandoſi d' un genere di eſperienze, come ſon quelle de' noſtri teſtacei, molti de' quali, decapitati anche bene, periſcono, ſiccome io il primo candidamente ne ho avvertito il pubblico, e il Sig. *Murray* per la lettura che moſtra di aver fatta delle mie produzioni non doveva ignorarlo.

Quantunque queſto Naturaliſta in forza de' ſuoi riſultati ſi dichiari di voler tenere una ſtrada di mezzo tra quelli che negano la riproduzione e gli altri che la affermano, pure da alcuni rifleſſi che accompagnano i ſuoi tentativi, e che mi ſarò lecito di eſaminare, dà egli non oſcuramente a vedere pendere più inverſo i primi, che inverſo i ſecondi.

Riflette egli adunque primieramente che le notomie di queſti rettili fatte dai *Lúter*, e dagli *Swammerdam* non ſono una commendatizia troppo favorevole per tali riproducimenti. Imperocchè avendo eſſi ſcoperta nel capo di queſti animali una moltitudine di parti, e queſte artificioſamente tra loro conneſſe e legate, naſce in noi ſubito una ſpecie di diffidenza, ſe reciſe che ſieno una volta, poſſano veramente generarſi di nuovo.

Riſpondo però che queſta diffidenza ſarebbeſi tutto al più riſvegliata in mente noſtra quaranta anni fa, voglio dire allor quando per la prima volta ſi ſeppe, che il polipo tagliato a pezzi aveva il dono di riprodurſi. Sempliciſſima eſſendo la ſua ſtruttura, pareva che per ragione di eſſa ei godeſſe di tal privilegio, ſiccome lo godon le piante, per la ſemplicità dell' organizzazione non diſſimili al polipo. Quindi ſi ſarebbe forſe dubitato che altri animali più compoſti di lui riprodur non poteſſero. Ma coteſte dubbietà, coteſte diffidenze è da lungo tempo che ſono ſvanite, dopo che ſi è trovato godere della medeſima prerogativa tanti altri viventi del polipo prodigioſamente più compoſti, come ſono molti lombrichi, sì terreſtri che acquatici, varie qualità di vermi, ma ſopra d' ogni altro la ſalamandra acquajuola. Detto ſia per puro amore di verità, non mai per morder la fama di così dotto letterato. I botanici ſuoi ſtudj ch' egli profeſſa con sì grande vantaggio della colta gioventù, e con tanto ſuo onore, non gli hanno laſciato ozio per la Zoologia, nè per le minute notomie, due requiſiti ch' io reputo ſommamente importanti in chi vuole eſercitarſi con lode nelle ſperienze de' noſtri rettili, alle quali eſſendoſi egli accoſtato, pare che entrato ſia in una provincia per lui preſſochè nuova. Quindi io non crederei di offenderlo, ſe gli diceſſi che preſa lingua dal ſuo collega *Wrisberg*, celebre anatomico, e ſperimentatore, ſi faceſſe notomizzare da lui una ſalamandra acquajuola; in grazia della qual notomia potrebbe egli apprendere, che le gambe, e la coda di queſto animale non la cedono punto per la quantità, e per la diverſità delle parti, onde vanno compoſte, alla teſta delle lumache, non oſtante che cotali membra ſi riproducano perſettamente, e quel che più leva, ſi riproducano ſempre, la qual ultima circoſtanza è ben lungi a verificarſi del capo delle lumache.

Un altro rifleſſo che induce lo Svedeſe Naturaliſta a mettere in dubbio le mie ſperienze è tratto dalla ſpiegazione ch' ei dà alle riproduzioni da lui oſſervate. State eſſendo queſte non già complete e perſette, ma più o meno mancanti e moſtruoſe, trova egli facile lo ſpiegarle, dicendo che non ſono probabilmente che un riſultato del teſſuto cellulare allungato. E tale ſpiegazione a lui ſembra che rendaſi più veroſimile dal muco, di che abbondano queſti animali, il qual muco è forſe cagione che ſenza cibarſi vivano sì a lungo, potendo eſſo in certa guiſa ſupplire al mancante alimento. Ma queſta plauſibile ſpiegazione riflette egli che difficilmente potrebbe aver luogo, ove vogliaſi dire con me, che le parti nuove delle lumache non differiſcono eſſenzialmente dalle vecchie.

Per l' amore ch' io porto al Sig. *Murray*, come a mio dotto Collega, fratello di un mio caro e riſpettabile Amico (*a*), ſento non poco rincreſcimento nel dovere far riſpoſta a queſta ſua rifleſſione, per trovarla piena di coſe diſcordanti dal vero, e poco degne di un ſenſato Filoſofo. Non mi farò qui a moſtrare quanto ſia poco giuſta la ſua congettura, che il lungo vivere delle lumache digiune dipender poſſa dal ſoprabbondante lor muco; e ſolamente accennerò di paſſaggio, che ſiccome le varie ſpecie di rane, e di roſpi, le ſalamandre, ed altri ſimili amfibj la durano ſenza cibarſi niente meno che i noſtri teſtacei, così dovrebbono eſſi egualmente aver miniera di muco, la qual coſa, come ognun ſa, è falſiſſima. Piuttoſto entrerò ſubito in materia, riflettendo primieramente che la difficoltà di ſpiegare un fatto non è mai ſtata pe' buoni Fiſici una ragione di diffidare del medeſimo fatto. Non evvi Filoſofo che ignori le gravi difficoltà che s' incontrano (per non uſcire del noſtro argomento) volendo noi ſpiegare d' un modo ſoddisfacente le riproduzioni de' nervi, e dell'

(*a*) Sig. Adolfo *Murray* celebre Profeſſore di Notomia a Upſal.

oſſa in alcuni quadrupedi, e uccelli, quella della teſta, e della coda ne' lombrichi terreſtri, e l'altra delle membra nelle acquatiche ſalamandre. Eppure tutti coloro che dominati non ſono da ſpirito di partito, o da privato intereſſe accordano di buon grado la realtà di così fatte riproduzioni, perchè troppo accertate dalla diligenza, e dall' oculatezza de' Naturaliſti moderni.

Oſſervo in ſecondo luogo che il noſtro Autore è entrato nella ſpiegazion d' un fenomeno, ſenza prima ſapere coſa veramente foſſe queſto fenomeno. Innanzi di darſi a credere che le riproduzioni da lui ottenute, conſiſtenti nelle corna più o meno rigenerate, erano probabilmente un lavoro della cellulare, facea di meſtiere l' accertarſi bene della loro qualità, e natura. Non doveva egli dunque acquetarſi a quelle superficiali apparenze di moſtroſità, ma da cauto e peſato Naturaliſta dovuto avrebbe andare più in là, eſaminando attentiſſimamente ſe la novella porzione delle corna era organizzata come la vecchia, e voglio dire ſe eſternamente era ſeminata di glandoloſe granella, e internamente munita del ſuo muſcolo, e del ſuo nervo; oltracciò s' ella aveva quella ſenſibilità, quel moto, quell' azione di allungarſi, e accorciarſi che ſi oſſervano naturalmente nelle corna di queſti animali. Se con queſte eſatte e neceſſarie ricerche poco o nulla di ciò riſcontrato aveſſe il Botanico di Gottinga, e ſe in quella vece trovato aveſſe una ſpecie di celluloſità, o di teſſuto inorganico, allora la ſua ſpiegazione poteva aver qualche luogo: ma non già ſe le parti novelle foſſero ſtate nell' organiſmo più o meno ſomiglianti alle vecchie, e molto meno ſe come loro foſſero ſtate animate. E per la lunghiſſima eſperienza che io mi luſingo di avere intorno a queſti fatti, penderei di molto più a credere, che a non credere il vero organiſmo nelle riproduzioni del *Murray*, malgrado quelle eſteriori moſtroſità.

Ma in terzo luogo dato eziandio che quelle ſue riproduzioni ſtate foſſero poco meno che inorganiche, era egli queſto un baſtante motivo di redarguire le mie, per avere io detto di averle trovate organizzate come le vecchie, quaſi che le mie doveſſero prender norma dalle ſue; e ciò per quella ſingolariſſima ragione, che ſuppoſto in eſſe il primiero organiſmo, non era queſto ſpiegabile per l' immaginata ſua ipoteſi del cellulare teſſuto? E come non s' accorgeva il chiariſſimo Svedeſe che la ſua redarguizione anzi che offender me, offendeva i principj della Logica la più comunale?

Conſenta egli di grazia ch' io dica anche una parola delle ſue ſperienze. In grazia di eſſe ſi è egli determinato ad uſare una ſpecie di neutralità tra i miei Impugnatori e i miei Favoreggiatori. Queſte ſperienze gli hanno fatto vedere un principio di riproduzione: dunque non poteva egli eſſere pienamente del partito de' miei Impugnatori. Ma tal riproduzione non è mai ſtata perfetta. Dunque non poteva neppure del tutto aderire a' miei Favoreggiatori. Quindi egli dice che ha dovuto dichiararſi neutrale tra i primi e i ſecondi.

Ma o fortemente io m' inganno, o a me ſembra che tutt' altro buon Fiſico, che trovato ſi foſſe nelle circoſtanze del Sig. *Murray*, ragionato avrebbe diverſamente. Queſto Fiſico, ſupponendolo equo e imparziale, non v' ha dubbio che quella fede che preſtato aveſſe alle proprie eſperienze per cui vedeva qualche riproduzione, e a quelle de' miei Impugnatori, per cui non ne vedeva neſſuna, preſtata anche l' avrebbe a quelle de' miei Fautori, in grazia delle quali veniva a provarſi una completa o quaſi completa riproduzione. Maſſime poi ſe queſti ultimi erano per una parte verſatiſſimi nelle ſperienze, e per l' altra godevano della confidenza del pubblico, quali ſono per appunto un *Lavoiſier*, un *Schaeffer*, un *Müller*, e un *Heriſſant*, citati dal Sig. *Murray*. Ma qual immediata conſeguenza da queſta diverſità di eſperienze tratta ne avrebbe il noſtro Fiſico ſe non queſta, che dunque talvolta le lumache non riproducono, tale altra riproducono male, e tale altra riproducono bene? Ma tal conſeguenza ſi accorgeva egli ſubito che ſi riſolveva in queſt' altra, che dunque le lumache hanno la facoltà di riprodur bene le parti perdute, ma che queſta facoltà non viene ſempre all' atto, diſtoltane non rade volte da una o più cagioni, che ne diſtruggono o ne ſminuiſcono il buon ſucceſſo. Condotto e diretto da queſti giuſti raziocinj facilmente ſarebbeſi accorto che in buona Logica non gli era permeſſo il tenere, come fa il *Murray*, una via di mezzo tra' miei Negatori, e i miei Fautori, ma che era aſtretto a dichiararſi per gli ultimi. Quanto poi ai ſuoi tentativi non troppo ſavorevoli per queſte riproduzioni, o incolpate ne avrebbe le lumache, per qualche turbatrice cagione poco atte al riprodurre, o qual Filoſofo ingenuo fors' anche ſoſpettato avrebbe che i ſuoi tentativi non foſſero ſtati i meglio inſtituiti.

Lo *Swammerdamio*, per quanto è a me noto, è ſtato il primo che ci ha data un' eſatta deſcrizione del cervello delle lumache. Cotal deſcrizione viene mirabilmente confermata dal chiariſſimo Sig. *Girardi*. Io altresì di queſt' organo ho parlato nel mio *Prodromo*, e nella prima Memoria dietro alle mie proprie oſſervazioni. Il Sig. *Murray* dal vedere che le lumache decapitate, quantunque non riproducano perfettamente, vivono però lungo tempo, ſtenta ad accordare tal verità; per eſſere il cervello troppo neceſſario alla vita degli altri animali: *cum cerebrum in aliis animantibus omnium maxime ſit neceſſarium*.

Ognuno ſi accorge che la forza di queſto argomento egli l' appoggia tutta all' analogia, in quanto che dal vedere che una immenſità di animali non può vivere ſenza cervello, ne inferiſce che lo ſteſſo debba dirſi delle lumache, le quali perciò ſe dopo la decapitazione vivono a lungo, convien credere che di queſt' organo vadano prive. Ma ognuno altresì tanto o quanto verſato in Fiſiologia ſi accorgerà di leggieri quanto ſia facile l' ingannarſi, volendo noi far uſo dell' analogia, ragionando degli animali, maſſime allora quando da ciò che ſuccede ne' grandi vogliamo argomentar quello che deve accadere ne' piccoli. Io però chiederei volentieri a queſto illuminato Svedeſe, ſe quel liquor rubicondo che circola ne' vaſi arterioſi, e venoſi delle rane, de' roſpi, delle ſalamandre, e ſimili, penſa egli che ſia vero ſangue. Voglio darmi a credere che non ſarà per metterlo in dubbio, per trovarſi compoſto di particolette globoſe, per nuotare in una ſpecie di linfa o di ſiero, per rappigliarſi, uſcito che ſia dai proprj vaſi, e per avere l' altre proprietà, che convengono al ſangue degli animali maggiori, e di noi ſteſſi. Siccome adunque egli è fuor di contraſto, che ceſſando negli animali più grandi, e in noi la circolazione, laſciamo in breve di vivere, così in forza dell' analogia dovrebbe dirſi lo ſteſſo de' minuti animali. Eppure contrariamente va la faccenda, eſſendo io ſtato iſtruito dalle mie proprie eſperienze, che nelle ſalamandre, ne' ranocchi, nei roſpi ſi può far sì che il ſangue non circoli dentro di eſſi per un giorno intiero, oppure ſi può da loro fare uſcir tutto il ſangue, ſenza che i medeſimi per tutto quel tempo laſcin di vivere (*a*). Se a un cavallo, a un bue, a un montone, a un cane, ecc. ſi ſtrappi il cuore dal petto, non è egli vero che queſti animali a ſangue caldo quaſi ſul momento periſcono? Ma non è egli vero egualmente che facendo lo ſteſſo giuoco ai ſoprariferiti animali di ſangue freddo ſeguitano eſſi per più giorni ad eſercitar le funzioni vitali? Chi ignora che recidendo le gambe agli animali caldi, ſi obbligano in breve a mutar la vita con la morte? Ma chi evvi omai preſentemente che non ſappia, che facendo lo ſteſſo giuoco alle ſalamandre acquajuole, ben lontano dal ſoccombere, ricuperano queſte membra perdute? Si vede adunque di quanti errori ſarebbe origine l' analogia, ſe prendendola dai caldi la voleſſimo applicare agli animali freddi. Sebbene anche ſul propoſito del cervello, queſta medeſima analogia non ſi ſcopre fallace? E' innegabile che lo ſpogliare di queſt' organo un animale di calda tempera, e il recargli ſubito la morte tornan lo ſteſſo. Ma ſi faccia un poco il ſimile ad una vipera, ad una biſcia, non che ad un roſpo, ad una ſalamandra, a una rana. Non è egli del pari innegabile che la vita di queſti animali tira a lungo ciò non oſtante per più giorni, e ſe ſia d' inverno per più ſettimane, ſiccome ho avuto campo di ſperimentare io ſteſſo? Qual è quel Fiſico a noſtri giorni sì inerudito che ignori i due fatti notabiliſſimi diſcoperti dall' immortal *Redi*, l' uno d' una teſtuggine che decapitata continuò a vivere per ventitre giorni, l' altro d' un' altra teſtuggine che priva affatto di cervello campò ſei meſi? Dirà forſe il Sig. *Murray* che anche le rane, i roſpi, le ſalamandre, le biſcie, le vipere, le teſtuggini non hanno cervello? E ſe nol può negare in queſti animali, non oſtante che mancando di eſſo ſeguano a vivere per un tempo più o meno lungo, nol neghi tampoco o nol metta in dubbio nelle lumache, dovendoſi egli accorgere da

---

(*a*) Opuſcol. di Fiſ. Anim. e Veget.

queſti fatti che la ragion di negarlo o di metterlo in dubbio, tolta dal potere elleno vivere a lungo ſenza queſt' organo, è inſuſſiſtente e ridicola. Sebbene ſe ad onta del ſin qui detto rimaneſſe tuttavia nell' animo di queſto celebre Naturaliſta qualche ombra di dubbio intorno al cervello de' noſtri teſtacei, più altro far non ſaprei che invitarlo a farſelo moſtrare dal Sig. *Wrisberg*, a quel modo che preſo mi ſono l' ardire di pregarlo a voler conſultare quell' eſimio Notomiſta per oſſervar gli arti delle ſalamandre acquajuole.

Ma il Sig. *Murray* non ſolamente dubita del cervello delle lumache, ma quel che è più, e che certamente il mio lettore non ſi aſpetterebbe, dubita anche della teſta. Egli adunque nella ſua Memoria non ha difficoltà di dire che adopera tal vocabolo, meno per ſervire alla verità, che all' uſo introdotto dal volgo, e da molti eruditi. Io però per riguardo a un tal punto confeſſo la mia ignoranza di avere ſempre ſentito con queſti eruditi, e col volgo. Io aveva ſempre con loro creduto, che un animale che ha occhi, che ha nervi ottici, che è fornito di labbra, di bocca, di mandibole, di denti, di lingua, di palato, di cervello; e che di queſta bocca, di queſti denti fa uſo per prendere il cibo, per tritarlo, e mandarlo allo ſtomaco, aveſſe veraciſſima teſta. E per mia iſtruzione chiederò volentieri al Sig. *Murray*, che m' inſegni coſa vi ſi richiegga di più, perchè poſſa dirſi che un animale abbia teſta. Che ſe egli mi riſpondeſſe non trovarſi nella lumaca quell' intiero compleſſo di organi, che ſi oſſerva ne' quadrupedi, negli uccelli, non che in noi, non ſaprei acquetarmi a queſta riſpoſta, giacchè in forza di eſſa ſarebbero dunque privi di teſta i peſci, le ſerpi, le rane, ed altrettali animali, la quale ſtranezza non credo che ſia mai caduta in mente a neſſuno. Che ſe egli piuttoſto avviſaſſe che intanto la lumaca non ha teſta, in quanto che non ne ha punto la forma, non eſſendo una parte ſpiccata dal rimanente del corpo, ma bensì continuata con eſſo, riſponderei che il ragionare di queſto modo ſarebbe un voler adattare la riſtrettezza delle noſtre idee all' immenſità della Natura. Vero è che la teſta di molti animali ſporge in guiſa dal buſto, che fa come corpo da sè: ma in quanti altri non vi è ella unita in guiſa, che viene con lui a formare come un

ſol

ſol tutto ? Non è forſe tale nella famiglia delle balene , e degli altri cetacei ? Non in quella dell' immenſo popolo dei peſci ſquamoſi ? Non nell' altra pur numeroſiſſima delle ſerpi, e degli amfibj ?

Sebbene chi ſa che il Profeſſor di Gottinga più per motivo di ſiſtema , che d' altro dubiti che i noſtri rettili abbiano teſta , voglio dire che il faccia ſu la parola del Linneo , una volta ſuo Maeſtro , e di cui è grandemente ſeguace , il qual Linneo non ſolamente mette in dubbio queſta teſta , ma affatto la nega , per entrar le lumache nella claſſe de' vermi , i quali tutti per lui ſono acefali . Siccome però queſto illuſtre Naturaliſta di ſua negazione non adduce la più picciola pruova , e d' altronde ſiamo in un ſecolo , in cui poco ſi valuta l' autorità de' gran nomi , quando non è accompagnata dal peſo delle ragioni ; così a quel modo che non poſſo accordarmi con lo Scolare , nol poſſo neppur col Maeſtro . E del mio ſentimento mi luſingherei bene di avere non ſolamente *molti eruditi* , ſiccome ſuppone il *Murray* , ma tutti i Naturaliſti di Europa , a riſerva di quelli che idolatrando il già celebratiſſimo Profeſſore di Upſal , reputano gran peccato in Filoſofia l' allontanarſi per poco da' dogmi ſuoi .

Finiſco di ragionare del chiariſſimo Sig. *Murray* col purgarmi d' una lieve accuſa ch' egli mi dà . Quantunque ei convenga ch' io ſia lo ſcopritore della riproduzione del capo nelle lumache , non vuol però ch' io lo ſia di quella dei *tentacoli* , ovvero corna , come ſi fa chiaro dalle ſeguenti ſue parole . „ *Si de tentaculis ſolis ſermo eſt : non poteſt ille jure rei* „ *inventor haberi . Etenim illi a Linnè jam viginti annos an-* „ *tea cochleas reſumere tentacula poſt reſectionem edixit :* e ſi riporta alle ſue *Amenità Accademiche* . T. II. p. 58.

Quando nel 1768 pubblicai il mio *Prodromo* non avendo io letto le dette *Amenità* , confeſſo ingenuamente ch' io mi credeva di goder ſolo di queſta picciola gloria . Ma dopo anche di averle lette io non ho ſicurezza che altri l' abbia goduta prima di me . Conſultando adunque quel luogo io non trovo , quanto alla ſoſtanza , nè di più nè di meno delle riferite parole . Non dice quell' illuſtre Botanico ſe ſia ſtato egli che abbia fatta queſta oſſervazione : non dice ſe ſia ſtata inſtituita da altri ; molto meno aſſegna la maniera con cui è ſtata inſtituita. Il dirſi adunque da lui che le lumache riproducon le corna, non è altro che un nudamente aſſerirlo. Ora io domando al riſpettabile Sig. *Murray*, qual fede preſtar ſi debba ad una ſemplice e nuda aſſerzione? Finattantochè adunque non ſi compiacerà egli di farmi noto chi abbia prima di me oſſervato queſto fenomeno, e come ſia ſtato oſſervato, non aſcriverò a mia arroganza il credere d' eſſerne io ſtato lo ſcopritore, facendoſi per me mallevadore il grande Hallero, dicente: *æquo animo oportet expendiſſe, non eum verum inventorem eſſe, cui vaga aliqua cogitatio elapſa ſit, in nullo fundata experimento; ſed eum omnino eam laudem mereri, qui verum ex ſuis fontibus per ſua pericula, ſuaſque meditationes eruerit, & adeo firmis rationibus ſtabiliverit, ut veri cupidos convincant* (*a*).

Non più che di due Oppoſitori mi reſta ancora di ragionare prima di por fine alla preſente Memoria, voglio dire dei Signori *Preſciani*, e *Adanſon*. E per rifarmi ſul primo, ſe qualche illuminato Naturaliſta ſi foſſe mai abbattuto nelle ſue ſperienze, di cui è ſtata da me riferita la ſomma, facilmente ſi sarà accorto che non ſono un ſaggio di Logica applicato alla Fiſica; e quindi avrà potuto conoſcere, non eſſere punto a ſtupire ſe tali eſperienze ſono ſtate defraudate di quel buon ſucceſſo, che ſi poteva aſpettare. Ad onta però di queſto, volendole io comparare con le ſperienze degli altri Contraddittori fin qui menzionate, a me ſembrano meno difettoſe; e que' difetti medeſimi di che ſono avvolte, ſono perdonabili, per averle intrapreſe l' Autore in un' età, nella quale ſono meno da riprenderſi gli errori, che da commendarſi la volontà. Aggiunger debbo a favore di queſto ſtudioſo giovane, che quando pubblicò quel ſuo Saggio, non laſciò per lettera di rendermene inteſo, e obbligantemente di chieder da me qualche ſuggerimento, perchè in evento che foſſe per intraprenderne qualche altro ſu la ſteſſa materia, ſperar poteſſe miglior fortuna. E dal veder io la ſua docilità, e dal ſembrarmi non troppo addeſtrato nello ſperimentare, nè punto conſapevole delle belliſſime Memorie ſu le lu-

---

(*a*) Phyſ. T. I.

mache de' Signori *Müller*, e *Bonnet*, per tacere degli altri, che ſcritto hanno lodevolmente ſu lo ſteſſo argomento, io lo rimandai alla lettura di queſti prodi Naturaliſti, perchè da eſſi poteſſe apprendere il metodo di ſperimentar bene, e quindi ſi rendeſſe abile a riuſcir meglio ne' ſuoi tentativi.

Paſſiamo ora a parlare del Sig. *Adanſon*, ma per farlo nelle dovute maniere mi conviene prender le coſe alquanto da alto. Quando mi ragguagliava l' illuſtre Sig. *Bonnet* con ſua lettera de' 26 Agoſto 1769 (*a*) delle oſſervazioni de' Signori *Cotte*, e *Bomare*, e che moſtrava di reſtar perſuaſo ch' io non mi era ingannato, ſiccome pretendevano queſti due chiari Fiſici, la ſua ingenuità non gli permetteva però che diſſimulaſſe di dirmi " ſono ciò non oſtante obbligato a farvi „ ſapere che un celebre Naturaliſta Franceſe, che ha ſottopoſte a' ſuoi tentativi molte centinaja di lumache, è perſuaſo „ che quando venga reciſa tutta quanta la teſta, l' animale „ non ne rifabbrica mai una nuova. Pubblicherà ſicuramente la ſerie delle ſue ſperienze, e la ſua autorità ſarebbe „ d' un peſo di gran lunga maggiore di quella d' un *Cotte*, „ e d' un *Bomare*. Queſto valente Oſſervatore, notiſſimo ai „ Naturaliſti, e che non vuole ch' io lo nomini ancora, è „ grandemente convinto che quando voi avete creduto di tagliar *tutta la teſta*, non avete realmente tagliato che i ſoli integumenti della teſta, o una *parte* di queſti integumenti. Mettetemi dunque in iſtato di convincerlo, che „ egli ſteſſo ſi è ingannato, non voi.. Ditemi il più preſto „ che è poſſibile, ſe quando avete tagliata la *teſta*, voi avete uſata la cautela di eſaminare al microſcopio la teſta tagliata, per aſſicurarvi che conteneſſe quegli organi tutti „ che formano nella lumaca ciò che diceſi *teſta* „.

La gentile premura di queſto mio caro e riſpettabile Amico, e la parte ch' io prender doveva in queſta cauſa, fecero ch' io non indugiaſſi un momento a ſtendere una lettera, in cui deſcriveva il metodo praticato nelle mie ſperienze, il qual metodo non era eſpoſto nel *Prodromo*, per non accen-

---

(*a*) Queſta lettera è ſtampata nelle ſue opere T. V. Part. II.

narſi quivi che la ſomma dei riſultati. E queſta lettera che dettai in franceſe, e che mandai al Sig. *Bonnet*, fu pubblicata nell' *Avant-coureur* dei 30 Ottobre del 1769, e da lui è poi ſtata riprodotta nella ſeconda ſua Memoria *ſu le Lumache*. Il riſtretto della medeſima è il ſeguente.

Voi mi chiedete ſe la teſta da me reciſa conteneva veracemente tutti gli organi, che appartengono alla teſta delle lumache. Eccovi come io mi ſono regolato per aſſicurarmi della verità della coſa. Come io ſeppi che queſti rettili hanno la prerogativa di riprodurre, mi feci a notomizzarli per iſtruirmi fondatamente del loro organiſmo, ed in iſpezieltà di quello della teſta. La macchinetta anatomica del celebre *Lyonet*, munita delle ſue lenti, de' ſuoi ferruzzi, ecc. è ſtata quella di che mi ſono valuto in queſta, ed altre ricerche anatomiche relative alle lumache. Io le facea perir dentro all' acqua, così uſcivano ottimamente del guſcio, allungando quanto più potevano le corna, e la teſta, e in tal poſtura ſene morivano, laſciando così all' oſſervatore il poterle nella miglior maniera notomizzare. Con queſti mezzi ho potuto accertarmi che la teſta delle lumache comprendeva effettivamente quell' intiero numero di parti, che dal ſommo Naturaliſta *Swammerdamio* era ſtato oſſervato.

Non è dunque ſtato ſe non dopo queſti pratici ſtudj ch' io di propoſito applicato mi ſono a decapitar lumache, ed eccovi, illuſtre mio Amico, come io coſtumava di fare. Prima di decapitar la lumaca la laſciava uſcir beniſſimo del proprio nicchio, così che la teſta, e le corna foſſero interamente ſpiegate. Allora con forbici affilatiſſime io paſſava all' amputazione, che riuſciva mirabilmente, e la teſta già reciſa veniva da me poſta nell' acqua, dentro cui in poche ore ſi dilatava, ſi rammolliva, e in tal guiſa io poteva più facilmente notomizzarla.

Cominciava la notomia dalla parte dov' era ſeguito il taglio, e dopo l' avere levati gl' integumenti, aveva il piacere di oſſervar diſtintiſſimamente la diſtribuzione dei nervi, che vanno agli occhi, e all' altre parti del capo. Oſſervava eziandio con la medeſima diſtinzione i varj muſcoli, che ſervono ai diverſi movimenti del capo, e non rade volte tra mezzo vi ſcorgeva il cervello. Continuando la notomia mi era agevole il trovarvi l' altre parti, come ſono il principio dell' eſofago, la lingua, le labbra, la bocca, i denti, e le quattro corna munite de' loro nervi, de' loro muſcoli, e dell' altre loro dipendenze.

Ecco, mio illuſtre Collega, le parti più notabili che oſſervanſi alla mia viſta nella teſta reciſa. Vi domando ora ſe il compleſſo di tutte queſte parti da me vedute e rivedute innumerabili volte, non è altro che gl' integumenti della teſta, o una parte di queſti integumenti, ſiccome ha preteſo l' anonimo Naturaliſta Franceſe, di cui mi parlate? O ſe anzi tal compleſſo non viene interamente a formare ciò che diceſi *vera teſta*, così che nel cimentar le lumache io poteſſi tenermi ſicuro di averle veracemente decapitate?

Quelle minute oſſervazioni ch' io faceva ſu la teſta vecchia, le faceva ſu la nuova. Sarebbe ſuperfluo ch' io vi dettaglіaſſi le parti, onde queſt' ultima era compoſta. Non farei che ripetervi parola per parola quanto ho fin qui detto intorno alle parti, di cui è formata la teſta vecchia, oſſia la teſta reciſa. Dirovvi di più che ho avuto perfino l' avvertenza di miſurare la teſta tagliata, e di confrontar le miſure con la teſta rigenerata.

Così a giuſtificazion mia io ſcriveva, ſono già quindici anni, al Filoſofo di Ginevra, che non laſciò di comunicar la mia lettera al celebre Contraddittore Franceſe, ch' io ignorava allora chi foſſe, e che ſolamente dopo alcuni anni ſoſpettai chi poteſſe eſſere da una lettera che in Reggio favorì di leggermi il chiariſſimo Sig. Abbate *Corti*, attual Superiore del Collegio de' Nobili in Modena. Queſti era il Sig. *Adanſon* che gliela ſcriveva, il quale tra l' altre coſe venendo a ragionare della mia ſcoperta, dopo l' averla caratterizzata per una baja, per una menzogna, e me per un romanziere, per un impoſtore, uſava le dianzi citate fraſi d' *integumenti* o *invoglio della teſta;* che erano quelle parti ſole che a lui detta io aveva reciſe, quando io non aveva avuta difficoltà di pubblicamente ſpacciare di aver tagliata veracemente la teſta.

Queſti miei ſoſpetti io li trovai poſcia verificati allorchè nella ſtate del 1779 mi fu dato di godere per alcuni giorni a Ginevra della dottiſſima e amabiliſſima compagnia del Sig. Carlo *Bonnet*. Veduta avendo egli l' incredulità del Sig. *Adan-*

ſon ſul noto riproducimento, dichiarata già apertamente nella lettera ſcrittagli li 30 Luglio 1769, e da me riferita in riſtretto nel primo Articolo, ſtimò a propoſito d' invitarlo a leggere la ſua prima Memoria ſtampata già nel Giornale di Fiſica dell' Abbate *Rozier*, per vedere qual' impreſſione poteva fare ſu l' animo di quel rinomato Accademico. E certamente da quel poco ch' io ho detto di tal Memoria nel ſecondo Articolo, pareva che doveſſe convertirlo. Pure chi lo avrebbe creduto? Non servì eſſa che a conſermarlo nel ſuo pirroniſmo. Tanto io appreſi con ineſplicabile mio ſtupore da una lunga lettera che nel ſuo delizioſo villereccio ſoggiorno mi diede a leggere il Sig. *Bonnet*, e che egli in ſeguito ha poi fatta pubblica nel principio della ſua ſeconda Memoria. Non poſſo diſpenſarmi dal riferirne i tratti più principali. In eſſa dunque ci fa ſapere il Sig. *Adanſon* eſſer quaſi dieci anni che non ſi occupa quaſi in altro che nel decapitare lumache. Che l' immenſità di queſte decapitazioni lo ha vie più perſuaſo di ciò che dal bel principio preveduto aveva col ſenno, e ſi vuol dire che mozzata una volta radicalmente la teſta a queſti animali, non è mai che più la riſacciano. Quindi con la maggiore ſincerità del mondo quelle ſperienze che il Sig. *Bonnet* credeva deciſive per la riproduzione, egli non eſita punto ad opporgli, che le trova piuttoſto conſermatrici del contrario, o almeno ſommamente dubbioſe ed equivoche. Il Ginevrino Sperimentatore adunque ſi dava a credere di tagliar vere teſte, e a giudizio del Sig. *Adanſon* non ne tagliava che delle apparenti. Quindi le riproduzioni ch' egli ne ottenea non erano ſoſtanzialmente che invogli di teſte, che i loro *berrettini* o le loro *calotte*, come ama chiamarle queſto Accademico. Non era egli dunque nelle ſue ſperienze più oculato di me, nè più deſtro.

Tutto il male poi ne veniva dalla poca noſtra perizia nel fare il taglio. Perchè adunque noi due più non la ſgarraſſimo ſi vide il Sig. *Adanſon* come in una ſpecie di dover filoſofico di preſcriverci il metodo con che operare; ed io mi luſingo bene che i miei lettori ameranno di ſentir queſto metodo, per eſſere un Maeſtro che lo inſegna, e di ſentirlo ne' termini ſteſſi dell' Autore.

„ Prendete (così egli in quella ſua lettera iſtruiſce il Sig.

,, *Bonnet*) o la groſſa lumaca gialliccia di vigna, nomata *pomatia*,
,, oppure la lumaca bruna di giardino, da noi detta
,, il *giardiniere*, che è la più comune di tutte: dopo di averle
,, tenute immerſe uno o due giorni nell' acqua per iſminuire
,, la loro vivacità, e la loro lubricità, ſtrappate ad
,, eſſe la maſcella ſuperiore, lavorata a ferro di cavallo, e
,, circondata da cinque o ſei denti; ſtrappate il palato inferiore,
,, che è una membrana dentata come la lingua d' un
,, gatto, ſtrappate le due grandi corna fornite di occhi, ſervendovi
,, di picciole tanaglie munite di reſe o di ſtoppa per renderle
,, meno taglienti, meno sdrucciole, oppure ſtringendo
,, il collo dell' animale con due dita per eſtirpar le maſcelle:
,, prevaletevi di queſta ſituazione sforzata per iſnocciolare con
,, tagliente coltello botanico le due corna più grandi col bulbo
,, inferiore degli occhi: ſtrappate ad altre lumache le intiere
,, teſte, verificando ſe queſte ſtrappate teſte ſono corredate
,, di maſcelle, e d' occhi interi: e tenete con geloſia
,, cuſtodite tutte queſte ſtrappate teſte, tutte queſte ſtrappate
,, maſcelle, tutti queſti ſtrappati occhi, per aſſicurarvi che
,, avete tante teſte ſtrappate, quante ſono ſtate le lumache
,, per voi mutilate,,.

Noviſſimo e del tutto inaſpettato ſarà giunto ſicuramente a' miei lettori queſto metodo di decapitar le lumache, in grazia della qual novità io non dubito punto che ſtati ſieno da non lieve ſtupore compreſi. Ma oltre allo ſtupore è grandemente a temere non ſiaſi in loro riſvegliata un' altra affezione, ch' io quaſi non vorrei dire, cioè quella del riſo. Al certo che queſta doppia impreſſione venne cagionata ſu l' animo mio la prima volta che in caſa del Sig. *Bonnet* io leſſi quella lettera: e quello che accadde a me, accadde egualmente ad una ſcelta corona d' uomini ſcienziati, che quivi allor ſi trovavano; ed è accaduto del pari a tutti quelli, cui l' ho data a legger dappoi. E come di fatti rattenerſi dallo ſtupire, e dal ridere al ſentir cotal metodo? Gli altri miei Contraddittori, e tutti i miei Fautori non diſcordavan fra loro intorno al modo di mutilar le lumache, che era quello di farle uſcire ben bene del guſcio, e di decollarle allora d' un colpo ſolo per via d' una forbice, o d' un coltello o raſojo applicato alla radice delle corna maggiori. Ed un tal metodo ſembra il più ovvio, il più naturale, e inſiememente il più ſicuro. Sorge un Naturaliſta d'alto nome, uno che per giudizio di molti Franceſi, e più per ſuo proprio, è valentiſſimo nell'arte di ſperimentare, uno che per dieci anni quaſi continui ſi annunzia d' eſſerſi occupato nel laborioſo eſercizio di decapitar lumache, di oſſervarle, di notomizzarle, il quale ſentenzioſamente ci fa ſapere il metodo fin qui adoperato in queſte decapitazioni eſſer fallace, e ne propone un ſuo proprio, che reputa ſicuriſſimo; chi v' è tra curioſi della ſperimentale Filoſofia, che non deſideri ſentir queſto metodo? Ma chi v' è tra queſti, ſe Dio mi ami, che dopo l' averlo ſentito poſſa non traſecolare, e rattenere le riſa, al trovarlo, quanto inopportuno e chimerico, altrettanto ridicoloſo? Il Sig. *Adanſon* ci dà per primo precetto di tener tuffate nell' acqua per uno o due giorni le lumache, a fine che più non ſiano tanto ſdrucciolevoli, nè tanto vivaci. Ma dubito forte che con tal precetto egli c' inſegni a decapitar degli animali piuttoſto morti, che vivi. Che al certo e la *pomatia*, e la lumaca bruna de' giardini (le due ſpecie ch' egli conſiglia di uſare) o non la poſſono durare per sì lungo tempo dentro dell' acqua, o almeno s' indeboliſcono a ſegno, che difficilmente ſopravvivono al taglio. Io ho veduto innumerabili volte, che queſte, e tutte l' altre lumache terreſtri da me cimentate, ſubito che ſi trovano immerſe in queſto elemento, fanno ogni sforzo per uſcirne, inerpicandoſi ſu le pareti de' vaſi, e tirando anche ſeco que' corpi, a cui ſon legate, quando queſti non ſieno troppo peſanti. L' acqua è quel fluido che per la pelle s' inſinua troppo facilmente dentro queſti animali, che in poche ore li gonfia tutti, e che loro in ſeguito diviene fatale. L' obbligarli dunque a rimanervi dentro immerſi per tanto tempo, per quanto vorrebbe l' Accademico Parigino, non è ſoltanto uno ſminuire la loro vivacità, è un farli realmente morire. E a che ſerve allora il decapitarli? Ma quand' anche alcuni di loro non ſoccombeſſero, è però ſempre vero che una sì lunga dimora in quel liquido viene ad enormemente alterare lo ſtato di ſanità, per cui o finiſcon di vivere poco dopo l' amputazione, o rendonſi inetti al riproducimento.

Ma concediamo che l' acqua non ſia loro fatale, nè tampoco nociva;

nociva; chi non vede che quello che non fa coteſto elemento, lo dovranno fare neceſſariamente gli ordigni inventati dal Sig. *Adanſon* per mutilar queſti animali? Chi v' è d' ingegno sì ſtupido, sì tenebroſo, che non s' avvegga che quello ſtrappare ſeparatamente e maſcelle, e palato, e corna, ed occhi, quel ricorrere a tanaglie, e a coltelli botanici per queſti ſterpamenti di parti, è un cercar di farli morire, non riprodurre? Sentaſi il ſavio giudizio datone dall' illuſtre *Bonnet*. ,, Io ,, non trovo termini, onde eſprimere tutta la ſorpreſa che ,, cagionò in me la lettera del Sig. *Adanſon*, nè dubito punto ,, che il mio lettore non la divida con me. Ciò che il ,, mio dotto corriſpondente m' invitava di fare era perappunto ,, quello che direttamente ſi opponeva al buon ſucceſſo ,, dell' eſperienza; concioſſiachè come ſtrappare con tanaglia le ,, differenti parti del capo d' una lumaca, ſenza produrre i ,, maggiori diſordini nel ſuo interno? Come altresì poter riuſcire ,, a ſtrappare in tal guiſa tutte queſte parti? E ſupponendone ,, ancora il riuſcimento, non arriſchieremmo noi di ,, diſtruggere con tal mezzo le ſorgenti di riparazione di coteſte ,, diverſe parti? Non baſtava egli forſe ch' io aſſicurato ,, mi foſſi col più attento eſame della teſta reciſa alle mie ,, lumache, che queſta conteneva tutte le parti, che la caratterizzano, ,, come le quattro corna, la bocca, le maſcelle, ,, ecc.? Era egli neceſſario di ſnocciolare con botanico ,, coltello le grandi corna, per accertarmi ſe la lumaca ,, ne riprodurrebbe di nuove? Non baſtava egli che aveſſi veduto ,, e riveduto più volte la naſcita, e i progreſſi delle corna ,, novelle, e che oſſervato aveſſi il nuovo occhio, e il ſuo ,, nervo ottico comparire i primi in queſta ammirabile riproduzione? ,, (*a*)

Ma del metodo ritrovato dal Sig. *Adanſon* io ho detto abbaſtanza, e forſe anche troppo, vergognandomi omai d' eſſermi trattenuto tanto ſopra di un' inezia, cui pare impoſſibile poſſa eſſere venuta in mente a un Naturaliſta di tanto nome. Ed è fuor di dubbio che in grazia di sì ſtrano metodo

---

(*a*) L. c. T. V. Part. I.

non ha egli mai potuto riuſcire ne' ſuoi tentativi. Si è già veduto nel primo Articolo, che quando nel 1769 egli ſcriveva al Sig. *Bonnet*, infruttuoſamente mutilato aveva dentro d' un anno più di 1400 lumache. Dalla ſeconda ſua lettera nel 1778 indiritta al medeſimo ſi raccoglie che in tutto quel frappoſto intervallo non avea quaſi fatto altro che inutilmente trattenerſi nelle ſteſſe eſperienze. Onde chiaro appariſce quante migliaja e quante di queſti poveri rettili ſono ſtate la vittima di quel rinomato Franceſe, che per riſparmiare la vita ad altri animali da lui cimentati ſarà forſe ſtato ſperimentatore eccellente, ma che per i noſtri non poteva eſſer peggiore. Io però ſu la mia ſede poſſo accertarlo, che ſe mai aveſſe talento di ripigliare i medeſimi tentativi, potrebbe continuarli fino al *die judicj*, per parlar col Villani, ſenza ſperanza d' ottenere una ſola riproduzione; e a reſtar perſuaſo di quanto io dico, baſta l' avere, cred' io, il ſenſo comune.

Non poſſo laſciar di parlare del Sig. *Adanſon*, ſenza prima far parola d' un altro animale riproducente, voglio dire la ſalamandra acquajuola. Neppure i miei ſaggi ſu queſto picciol quadrupede hanno potuto incontrar la ſua grazia. Il numero delle ſalamandre, a cui tagliò egli quando le gambe, quando la coda, non è forſe ſtato inferiore a quello delle lumache decapitate. Ma con che pro? A quel modo che a queſte non è mai venuta in ſue mani la teſta, a quelle non ſono mai venute le gambe, nè la coda. Solamente in luogo di queſte membra ſono talvolta ſaltati fuora de' moncherini informi, delle maſſette di carne inorganiche. Qui adunque quando nel *Prodromo* io parlava di queſte riproduzioni, come di coſe reali, io aveva, ſecondo ch' egli avviſa, le traveggole agli occhi, prendendo per vere gambe, per vere code rigenerate ciò che non ne aveva che qualche ombratile ſembianza ſotto quelle forme ingannatrici di moncherini, di inorganiche maſſe carnoſe. E ſingolarmente per ciò che riguarda le code, egli mi redarguiſce ch' io doveva ſapere che quella coda, che sì frequentemente rifatta ſi oſſerva nelle lucertole, non è altrimenti una vera coda, una coda compoſta di vertebre oſſee, ſiccome è tale la coda naturale di queſti ſerpentelli, ma ſibbene un rozzo moncone ſcaglioſo. A quel modo adunque che non ſi può dire in rigore che le lucertole riſabbricano la coda perduta, io non dovea pur dirlo delle ſalamandre, per andar compoſta la coda di queſte di una numeroſa ſerie di vertebre oſſee, non altrimenti che ſi oſſerva nelle lucertole. Così mi ſgrida il chiariſſimo Sig. *Adanſon* nella ſua lettera dei 30 Luglio ſcritta al Sig. *Bonnet*, e da queſt'ultimo pubblicata nella ſua prima Memoria ſu le Lumache.

Cerchiam brevemente di liberarci da queſte due accuſe, l'una relativa alle ſalamandre, l'altra alle lucertole. E quanto alla prima, io crederei che la mia apologia foſſe in quel luogo del *Prodromo*, che tratta delle ſalamandre, e molto più ſi renderà manifeſta nella Memoria che pubblicherò ſu di eſſe. Qui adunque negli ſperimentali miei eſami io teneva preſſo a poco quel metodo, che ho praticato nelle lumache. La prima coſa era quella d' iſtruirmi eſattiſſimamente delle molte, e diverſe parti, onde compoſte ſono le gambe, e le code di queſti animalucci; poſcia mi faceva ad eſaminare con pari attenzione, ſe queſte parti tutte ſi rigeneravano nelle nuove membra. E quanto alla riproduzion delle code, io vedeva che la Natura operava di queſto modo. Sul troncone della coda tagliata cominciava ad apparire una ſpecie di piccioliſſima lingua, ſimile in miniatura a una gloſſopietra, oſſia a un dente di cane carcaria. La lingua andava creſcendo in lunghezza, e in groſſezza, e a poco a poco acquiſtava la forma, e le dimenſioni della coda reciſa, e dopo un dato tempo le divenía ſimiliſſima. Internamente poi ſi vedeva fornita di vertebre oſſee, di midollo ſpinale, di muſcoli, di vene, di arterie, di nervi, di glandole, ecc., che ſono appunto quelle parti medeſime, onde era compoſta la coda tagliata.

Riſpetto poi alle gambe reciſe, ſul loro troncone ſi mirava dapprima un minutiſſimo cono carnoſo, che in ſeguito andava creſcendo, e dopo l' avere acquiſtata una data grandezza ſi diramava all' eſtremità in quattro ſottili particelle, parlando delle gambe anteriori, e in cinque, parlando delle poſteriori; nè ſi tardava molto ad accorgerſi, che tai particelle non erano che le dita delle gambe, le quali dita appunto nelle anteriori ſono quattro, e nelle poſteriori ſon cinque. Intanto le gambe, e le dita riproducentiſi andavan di più ſvolgendoſi, e dopo un tempo più o men lungo ſi vedevano compiutamente formate, e di eſſe, come pure della coda novella, le ſalamandre facean già quell' uſo, che fanno di quelle che non ſono ſtate mutilate. L' organiſmo interiore nelle gambe novelle andava d' un perfettiſſimo accordo con quello delle vecchie, tanto nelle parti ſolide molli, quanto nelle parti ſolide dure, così che favellando di queſte ultime le gambe rifabbricate manifeſtavano nè più nè meno quel numero di officini, che trovato io avea nelle vecchie. Le verità fiſiche che qui accenno, e moltiſſime altre analoghe, che tralaſcio per brevità, ſono ſtate tutte pieniſſimamente confermate da diverſi valenti Naturaliſti, ma in iſpezieltà dal Sig. *Bonnet* in tre ſenſatiſſime ſue Memorie ſul riproducimento delle membra nelle ſalamandre (*a*). E mi luſingo bene che i ſavj ed imparziali lettori dal fin qui eſpoſto conoſceranno chiaramente, che quando ſcoperſi io il primo, e pubblicai che le ſalamandre acquajuole riproducono le membra perdute, io aveva ragione; e che quando il Sig. *Adanſon* cercò d' impugnarmi, e di farmi comparire poco buon Fiſico, egli avea il torto.

Accordo di buon grado al dottiſſimo mio Avverſario, che dopo la mutilazion delle ſalamandre, in luogo di code, e di gambe non abbia egli mai veduto riprodurſi, che moncherini, che maſſette carnoſe. Ma è ella queſta una logica conſeguenza, che dunque gli altri che dicono di aver vedute queſte code, e queſte gambe rifatte, hanno preſo abbaglio? O non è anzi più logico il dire che l' abbagliamento ſia tutto ſuo? Concioſſiachè tenendo dietro a quel ſuo sbozzo di eſperimenti non è difficil coſa l' accorgerſi dove l' errore abbia avuta ſua origine. Quel corpicciuolo che pullulava ſul troncone delle gambe reciſe, chiamato *moncherino* (moignon) dall' Accademico Parigino, non era in realtà che il principio della gamba novella, ma non ancora ſviluppatoſi a ſegno di avere la configurazione di gamba. Quindi volendo giudicar dall' eſterno, quel moncherino ſi ſarebbe creduto meno una gamba, che una maſſetta inorganica di carne *une maſſe de chair non organiſée*, ſiccome tale viene appellata da queſto

---

(*a*) L. c. T. V. Part. I.

Naturaliſta . Di fatto il Sig. *Bonnet* adopera lo ſteſſo vocabolo *moignon*, quando vuol denotare il principio della gamba riproducenteſi. Aveva dunque trovato il Sig. *Adanſon* un filo ſicuro che lo poteva condurre ad ammirare que' medeſimi riproducimenti , che il Sig. *Bonnet* , ed io abbiamo ammirati; ma queſto filo ſe lo laſciò preſto ſcappar di mano. Queſto poi foſſe, o perchè dopo l' aver veduto quel moncherino , non ſi curaſſe di cercare più in là , perſuaſo forſe in mente ſua per l' analogia delle lucertole , che la Natura riprodotto non avrebbe di più , o perchè anche per la poca cura uſata alle ſalamandre , foſſero queſte perite innanzi di manifeſtare riproducimento ulteriore. Comechè ſia, la verità è che intanto le ſue ſperienze ebbero un reo ſucceſſo , in quanto che non uſovvi attorno quello ſtudio, quella diligenza, quell' aſſiduità che eſigeva l' importanza del ſoggetto, e da cui come valoroſo Fiſico non doveva eſimerſi.

Paſſiamo al ſecondo capo di accuſa, ſperando d' eſſermi giuſtificato abbaſtanza del primo . Il Sig. *Adanſon* adunque me agramente rampogna, e fammi altamente ſapere che la riprodotta coda nelle lucertole, la quale non rigenera mai le vertebre oſſee , doveva ammonirmi che neppur queſte vertebre oſſee, e in conſeguenza una verace coda non ſi rigenera mai dalle ſalamandre.

Supplico d' un benigno perdono queſto inſigne letterato, ſe ardiſco aſſerire che in queſta ſua rampogna io trovo lo ſtrano inneſto di due errori , ſenza ſaper dire sì facilmente ſe l' uno ſia minore dell' altro. Primieramente adunque dalla non verace riproduzione nelle lucertole egli argomenta la non verace riproduzione nelle ſalamandre. Ma quale è quel Fiſico sì inavveduto , sì ineſperto che argomentato mai abbia di queſto modo nel gran ſoggetto delle riproduzioni animali ? Una immenſità di animaletti, ſingolarmente acquajuoli, per la ſemplicità dell' organiſmo ha moltiſſima ſomiglianza co' polipi . Siccome pertanto aſſaiſſimi di quelli non riproducono, così non dovrebbono riprodurre pur queſti , ſe valeſſe l' argomento analogico del più volte lodato Naturaliſta . Quanto all' eſſenziale dell' interna ſtruttura , non evvi differenza tra ſpecie e ſpecie di lumaca terreſtre , ſecondo gli eſattiſſimi eſami dello *Swammerdamio*. Trovato avendo io dunque che in diverſe ſpecie non ſi ottiene la riproduzione, neppur queſta ſi dovrebbe ottenere nell' altre. E così continuando a far uſo di quell' argomento in altri animali, noi paſſeremmo con la maggiore facilità del mondo di errore in errore.

In ſecondo luogo nel favellare delle lucertole ſuppone il Sig. *Adanſon* come un fatto dei più incontraſtabili, dei più ſicuri, che le loro code vadan compoſte di vertebre oſſee. Dio immortale! Quel Naturaliſta che nel riprendermi dice d' eſſere incanutito ſu lo ſtudio, e ſu le notomie de' minuti animali (*a*), non aveva dunque a' ſuoi giorni veduta una ſola coda di lucertola? Imperocchè ſe veduta l' aveſſe, come ſarebbe mai incorſo in ſimile errore? Qui adunque permetta il correttore d' eſſer corretto, col riſpettoſamente iſtruirlo, che la coda delle lucertole non è altrimenti corredata di vertebre oſſee, anzi neppur di vertebre, ma ſibbene d' una quantità di muſcoletti dall' un canto e dall' altro piramidali, ſtrettamente inſieme combaciantiſi; e attorno attorno faſciati da una ſottile membrana fatta a anelli, che a formar viene l' eſteriore della coda. E per quanto ſi frughi dentro di queſta coda o con l' occhio nudo, od anche armato, non è poſſibile di rinvenirvi la più picciola particella oſſea. E ſe il Sig. *Adanſon* non voleſſe preſtar fede a' miei detti, ſenza uſcir di Parigi ſi faccia recare una di quelle lucertole grigie, dette *parietarie* da alcuni, per eſſer ſolite nella buona ſtagione a correre ſu le pareti delle caſe, oppure uno di que' lucertoloni verdi, che ſoggiornano nelle campagne ed anche dentro degli orti, e dei giardini, e che da' Toſcani ſi appellan *ramarri*, e da' Franceſi *lezards verds* (che è appunto quella ſpecie, di cui favella l' illuſtre mio critico); ſi prenda egli ſteſſo la pena di eſaminar la coda a queſte due qualità di lucertole, e ſi avvedrà poi ſe ſono io che m' inganno, oppur egli.

Stupiranno facilmente i miei lettori, che un *Adanſon*, che è quanto dire uno de' più riputati Naturaliſti della Francia, caduto ſia in tanti sbagli, ed errori. Si è veduta la maniera da lui preſcritta nel decollar le lumache, maniera che ſem-

---

(*a*) Veggaſi la più volte citata lettera de' 30 Luglio 1769 ſcritta al Sig. *Bonnet*.

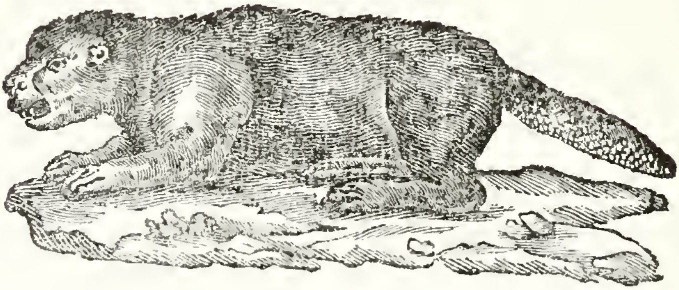
bra eſpreſſamente inventata per farle morire, non riprodurre, e ch' io non ſo ſe poſſa venire in mente a neſſuno ingenuo ed oneſto Filoſofo, che ſenza privato intereſſe, ſenza paſſione va in traccia del vero. Si è veduto come al di groſſo ſi è ingannato intorno alle ſalamandre col prendere, e con lo ſpacciare per un corpo informe, un corpo non organico ciò che era un verace rudimento di gamba, o di coda. Si è veduto come ſtranamente ha abuſato dell' analogia ſul propoſito delle lucertole riferite alle ſalamandre. Si è veduto in fine come ſia andato errato nel voler ragionare dell' organiſmo della coda nelle lucertole, ſenza avere la più picciola cognizione di tale organiſmo. Senza fallo che in viſta di tutti queſti sbagli ſtupiranno grandemente i miei lettori. Ma lo ſtupore più grande a mio avviſo ſarà, come a tanti sbagli unito abbia il mio Avverſario tanta confidenza, non oſando io dir tanto orgoglio. Quando nel 1778 egli ſcriveva al Sig. *Bonnet* ſul propoſito delle lumache, eſſendo già a ſtampa la maggior parte degli ſcritti favorevoli alle mie oſſervazioni, ei non poteva ignorar queſti ſcritti. Se con mente diſappaſſionata e libera da' pregiudizj ſi foſſe preſa la pena di peſatamente conſiderarli, aveva egli un' occaſion troppo bella di non luſingar tanto le idolatrate ſue idee, di ragionevolmente diffidare delle proprie eſperienze, e forſe ancor di ricrederſi. Veder doveva che tra' miei favoreggiatori vi erano uomini di primo ordine, uomini che godono della confidenza del pubblico, e che poſto hanno il ſuggello dell' immortalità alle ſperimentali loro fatiche. Aveva egli dinanzi agli occhi le giudizioſe oſſervazioni di alcuni ſuoi illuſtri Colleghi, regiſtrate negli Atti della Reale Accademia, quelle in iſpecie de' Signori *Heriſſant*, e *Lavoiſier*, che d' un modo sì convincente, sì luminoſo confermano la realtà de' contraſtati riproducimenti. Ma a diſpetto di queſte palpabili dimoſtrazioni il Sig. *Adanſon* ben lontano dal riconoſcere i proprj errori, ſi è riconfermato ne' medeſimi, e perſuaſo d' eſſere ſtato quel ſolo che ſu tale materia oſſervato abbia, e ragionato dirittamente, ha con ſorpreſa de' buoni Fiſici accagionato gli altri che non ſentivan con lui, qual gente inetta per le ſperienze, e me ſopra ogni altro, onorandomi inſieme col gentil nome di venditore di falſi miracoli, e di chimere. Queſta ſua noncuranza però, e queſti ſuoi diſpregi per me, non ſaranno mai una ragione, onde ſminuire nell' animo mio quella ſinceriſſima ſtima, che profeſſo al non vulgare ſuo merito; e ſe quando ha contraddetto ad alcune mie ſperienze, ho fatto vedere che ſi è ingannato, non ho avuto altro in mira che difendendo me ſteſſo di patrocinare la verità.

Terminiamo la preſente Memoria con una rifleſſion generale. Una delle principali apparenti ragioni, per cui ſi è tanto meſſa in dubbio, ed anche aſſolutamente negata la mia ſcoperta ſul riproducimento della teſta nelle lumache, ſi è quella a mio avviſo, perchè tale ſcoperta riſguardava appunto la teſta. Se ſi dica eſſere ſtato trovato un animale che ha la facoltà di riprodurre le gambe, di riprodurre la coda, e che queſte gambe, queſta coda non ſono già d' una ſempliciſſima ſtruttura, come quelle di molti inſetti, ma preſſo a poco compoſte come quelle dei quadrupedi, non v' ha dubbio che non poſſiamo non eſſer tocchi di maraviglia. Ciò non oſtante la coſa non ſembra a noi del tutto impoſſibile. Ma ſe riferito ci venga eſſere ſtato ſcoperto un altro animale, che tagliandogli il capo, ſa riprodurlo, e che queſto capo ha occhi, e bocca, e maſcelle, e denti, e lingua, e nervi, e cervello, non ſolamente ne meravigliamo, ma la fantaſia ſtordiſce, s' impunta, ſi ributta, e quindi ci ſentiamo diſpoſti a giudicare un tal fatto più favoloſo, che veritiero. Volendo noi rintracciar l' origine di queſta ritroſia, di queſta incredulità, è facile l' accorgerci appoggiarſi tutta all' analogia. Abituati dall' infanzia a vedere certi animali, tra mezzo a' quali del continuo viviamo, come ſono molti quadrupedi, molti uccelli, molti rettili, molti amfibj, molti inſetti, dalle idee particolari di queſti diverſi generi formiamo l' idea generale dell' intiera maſſa degli animali. Dal veder dunque che ſe a un cane, per atto d' eſempio, a un colombo, a una ſerpe, a una rana, a una moſca venga reciſa la teſta, queſti animali ben lungi dal riſabbricarla, ſen muojono, penſiamo che lo ſteſſo debba ſuccedere a una lumaca, e a qualunque altro vivente. Così giudica il popolo, e quella parte di letterati, che nelle filoſofiche materie non ſente più alto del popolo; ma non così il vero Fiſico, non così il vero Naturaliſta, quegli che letto avendo quanto da prodi Indagatori è ſtato è ſtato oſſervato nell' illimitato regno degli animali, vede per tutto anomalie, per tutto eccezioni, e quanto per conſeguenza l' analogico argomento poſſa eſſer fallace. Maraviglierà egli bensì all' udir queſto fenomeno, come non poſſiamo non maravigliare all' udire qualunque altra inaſpettata novità, ma non per queſto negherà la poſſibilità del medeſimo, pel numero troppo grande di altri fatti niente meno in apparenza ributtanti di quello delle lumache, e ciò non oſtante veraciſſimi. Tali ſono i prodigj dei polipi, de' lombrichi terreſtri, di alcuni vermi d'acqua dolce, quelli de' gorgoglioni, de' gallinſetti, de' rotiferi, delle libelle, delle fecondazioni artificiali, e tanti altri analoghi, che ſembrano eſſere più veroſimili che veritieri. Quanto adunque nel filoſofare ſi ſono allontanati dal vero Fiſico, dal vero Naturaliſta quegli autori che hanno meſſa in dubbio queſta riproduzione pria di cercare di verificarla col fatto, come un *Bomare*, che comincia con queſte parole sì poco degne d' un Filoſofo: *Io confeſſo che non potendo credere a queſta riproduzione ho tentato molte eſperienze ſu queſto ſoggetto* ecc. (*a*): e un *Adanſon* che in termini niente diverſi dà principio alla lettera ſcritta al *Bonnet*: *Ho cominciato a dubitare filoſoficamente il primo intorno alla rigenerazione della teſta, delle corna, e delle mandibole delle lumache*. E rifleſſivamente conſiderando noi quanto ſu tale ſoggetto è ſtato pubblicato dagli altri miei riveriti Contraddittori, ſi vede ſpirare in tutti o quaſi in tutti una cert' aria di diffidenza, di dubbietà, che non laſcia celare che quando co' loro tentativi ripetevano i miei, erano già ſvantaggioſamente prevenuti verſo di eſſi. Ed io non penerei molto a credere, che queſta sfavorevole prevenzione ſia ella pure concorſa a rendere infruttuoſi que' loro ſaggi ſperimentali, in quanto che nel farli, ſiccome non erano troppo bene diſpoſti a riceverne un felice ſucceſſo, non vi hanno peravventura poſta attorno quella diligenza, quell' intereſſe, quello zelo, che tanto ſono neceſſarj perchè le ſperienze vengano a bene; e chi ſa ſe nel raccontare i riſultati di queſti ſag-

---

(*a*) Articolo: *Lumaca*, del ſuo Dizion. ed. del 1776.

gi hanno pure uſato di quella lealtà, di quella ſchiettezza, che eſigeva l' amore del vero? Le prevenzioni tanto contrarie che favorevoli per qualche ſiſtema, per qualche teoria, per qualche penſamento, ſono per lo più ſtate fatali per le oſſervazioni, per le ſperienze. Ed io ſe qui moſtrar lo voleſſi, non ſarei imbarazzato che nella ſcelta degli eſempi. Quando ci facciamo ad interrogar la Natura ci è d' uopo l' eſſer liberi d' ogni pregiudizio, d' ogni paſſione, che la viſta appanna, nè ci laſcia apparire la bella faccia del vero; e con amica indifferenza dobbiamo eſſer giudici tanto contra degli altri, quanto contra di noi. Che ſe per l' oppoſito ſaremo preoccupati da deſiderj, da diffidenze, da dubbj, e da altrettali intempeſtive affezioni, mireremo le eſperienze da quella parte che favoreggia qualche noſtro gradito penſiere, non dall' altra che può contrariarlo, giudicheremo non rettamente di eſſe, ed in vece di accreſcere alla Fiſica il teſoro delle utili verità, accreſceremo il numero degli errori.



LETTERA PRIMA

RELATIVA A DIVERSE PRODUZIONI MARINE

Del Sig. Ab. LAZARO SPALLANZANI Regio Profeſſore
di Storia naturale nell' Univerſità di Pavia

Al Sig. CARLO BONNET Membro delle più illuſtri
Accademie di Europa,

Scritta il giorno 15 *Gennajo* 1784 *Pavia*.

SApendo voi, amatiſſimo ed illuſtre Collega, il piacere che io provo nell' intraprendere nelle noſtre eſtive vacanze qualche picciol viaggio filoſofico, o a fine di accreſcere di qualche rara produzion naturale queſto pubblico Imperiale Muſeo della Regia Univerſità di Pavia, o moſſo dal deſiderio di fare acquiſto di cognizioni novelle, obbligantemente voi mi chiedete quai luoghi io abbia ſcorſi, ed eſaminati la ſtate paſſata, e quale ſia ſtato il frutto di queſta recente peregrinazione. Non differiſco a ſoddisfare, come per me ſi potrà, le erudite voſtre brame, e tanto più volentieri mi affretto di farlo, quanto che queſta ſarà per me un' occaſion favorevole, onde trarre ulteriori lumi, e dottrine da un letterato a me sì caro, e a cui tanto debbo, e che da lungo tempo l' Europa tutta venera e onora come uno de' più gran Genj del ſecolo. Sul finir della lettera da me indirizzata l' anno ſcorſo al Sig. Marcheſe *Lucchesini*, Ciamberlano di S. M. il Re di Pruſſia, la quale io ebbi il piacere di comunicarvi, avrete facilmente compreſo quale ſoave e forte impreſſione abbia fatta ſul mio ſpirito il mare, dappoichè ho avuta l' occaſione di ſcorrerne rapidamente qualche tratto; e quale acceſiſſimo deſiderio abbia in me laſciato di viſitarlo di nuovo; argomentando io da quelle poche, ma belliſſime e utiliſſime cognizioni che allora ne ebbi, quale ſarebbe ſtata la copia che tratta ne avrei, ſe rioſſervato lo aveſſi con maggior agio (*a*). Da ciò non penerete molto a inferire qual genere di occupazioni trattenuto mi abbia la ſcorſa eſtate, le quali appunto in gran parte hanno verſato ſopra oggetti marini, ſiſſata avendo a tal fine la mia dimora a Portovenere ſu la riviera di levante di Genova, per eſſere un paeſe contiguo al golfo della Spezia, tanto famoſo nelle ſtorie sì antiche che moderne, e tanto degno di eſſerlo pel ſicuro aſilo che preſta a' baſtimenti d' ogni maniera, che dentro vi approdano, ma tuttinſieme adattiſſimo per la calma quaſi continua che vi regna ad appagar le voglie degli avidi ricercatori. Quivi adunque ſoggiornai ſopra due meſi e mezzo, ſenza però laſciar ſovente di uſcire dalle bocche del golfo, e co' legni peſcherecci d' inoltrarmi in alto mare dalla parte di Livorno, e della Corſica; e durante quel tempo le produzioni marine furono il favorito mio oggetto; non ommettendo tuttavia l' eſame delle adiacenti littorali montagne, e di alcune proſſime iſolette; e notando altresì le molte e varie circoſtanze che inſieme concorrono a render quel golfo non men vago ſopra ogni credere e dilettoſo, che unico in tutta Europa. Sebbene ſtando io a Portovenere aveva di rincontro dalla parte di levante un altro grande oggetto, che a sè rapiva i miei guardi, e che in certa guiſa invitavami a viſitarlo. Delle vicine Panie io parlo, sì rinomate pe' nobiliſſimi carrareſi marmi e maſſeſi, onde in buona parte vanno compoſte. Dalle ricerche marittime paſſai adunque alle montane, eſaminando non ſolamente quelle numeroſe antichiſſime cave, ma la ſtratificazione, la ſtruttura, l' impaſto delle materie, onde riſulta quella grand' alpe. E ſiccome le Panie giacciono in vicinanza dell' Appennino, o a dir meglio ſono un braccio continovato con lui, perciò dopo l' avere eſaminate le prime, volli eziandio eſaminare il ſecondo. E queſta doppia diſamina, ragguagliata anche a quanto era ſtato prima da me oſſervato in altri luoghi dell' Appennino, mi fornì diverſi termini di confronto, che per l' Orittologo mi parvero intereſſantiſſimi.

Voi avete, illuſtre mio Amico, le traccie, e l' idea dell'

(*a*) Queſta lettera è ſtampata negli *Opuſcoli ſcelti* di Milano.

ultimo intrapreſo mio viaggio. Ma voi di ciò non ſarete ſicuramente contento. Senza fallo che vorreſte di più ch' io ſcendeſſi a' particolari, o almeno ch' io vi narraſſi quanto di più notabile è ſtato da me oſſervato. Cercherò di ubbidirvi, non però in tutta quell' eſtenſione ch' io vorrei, e che a voi forſe non diſpiacerebbe. Le produzioni naturali, in queſta occaſione da me eſaminate, ſono troppo numeroſe, troppo fra loro diverſe, per poter eſſere eſpoſte col dovuto dettaglio, e con gli opportuni rifleſſi in una ſola lettera o in due, che anzi ne addimandan parecchie, le quali mi farò a ſcrivere, come avrò baſtante ozio per eſſe. Adeſſo adunque per acquiſtare il merito di avervi ubbidito, non potrò far altro che riſtrignere i riſultati delle principali mie oſſervazioni in due lettere, la prima delle quali concernerà gli oggetti marini, la ſeconda i montani. Entro adunque ſenza più in materia, dividendo a maggior chiarezza l' una e l' altra lettera in tanti paragrafi, quanti ſono gli articoli più importanti che a mano a mano andrò diviſando.

§. I.

Luce notturna del mare.

Fino a' tempi più rimoti era ſtata oſſervata riſplender di notte in moltiſſimi luoghi l' acqua del mare; e di un tal fenomeno ſono poi ſtate immaginate da' Fiſici diverſe ſpiegazioni, la più appagante delle quali ſembra eſſere oggigiorno la ſeguente. Si vuole che tal luce derivi in parte da fosforici animalucci marini, ſcoperti già nelle Lagune di Venezia da' Signori *Vianelli*, e *Griſellini*, e nel mare dell' Indie dal Sig. di *Riville*; ed in parte da viſcide materie oleoſe, onde abbondano le acque del mare, come ultimamente ha preteſo moſtrare il Sig. *Canton*.

Quanto agli animaletti fosforici, oſſia alle lucciolette marine, io ho avuto tutta la comodità di oſſervare sì bel fenomeno. Non vi ho trovata la ſpecie deſcritta dal mentovato Franceſe, ma bensì l' altra eſaminata dai due Italiani. Ho di più il compiacimento di dirvi che ne ho ſcoperto cinque ſpecie affatto nuove. I tre accennati Scrittori pare che abbiano poſto quaſi tutto il loro ſtudio nel deſcrivere l' organica ſtruttura di tali lucciolette, e il picciol fosforo che nell' acqua producono: due oggetti a dir vero molto intereſſanti, ma che tuttavia laſciano la ſtoria di queſte curioſe beſtiolucce aſſai tronca e imperfetta. Nelle mie cinque ſpecie, oltre alla deſcrizione che darò di eſſe, e del lume loro ſoggettato a molti e variati cimenti per intenderne meglio le ſue qualità, la ſua natura, parlerò di altre circoſtanze che ho creduto non dover traſcurare; ſe la loro luce, per atto d' eſempio, ſi eſtende a tutto il corpo, o ad una parte ſoltanto di eſſo: ſe ſi manifeſta del continuo, ovveramente a ripreſe: ſe, e quanto ſeguita ad averſi, eſtratti che ſieno queſti maraviglioſi animalucci dall' acqua: quali ſono i ſiti del mare che abitar ſogliono: ſe hanno facoltà di nuotare, o ſe ſerpono ſoltanto ſu que' corpi, ne' quali ſi trovano: ſe trasferendoli dal mare all' aria periſcono, ed in tal caſo ſe ridonandoli al nativo elemento rivivono, come è prerogativa di qualche altro animale: ſe la naturale loro moltiplicazione ſi ottiene per via di uova, o di ſeti, o mediante altro mezzo, analogo a quello dei polipi. E queſto è ciò che riſguarderà quel genere ſingolare di minuti viventi, che co' loro ſplendori ci fanno apparire di notte tempo in più luoghi lucido il mare.

Per conto poi di quell' altra parte di luce, che ſi vuole generarſi in eſſo da pingui ſoſtanze viſchioſe, prodotte dallo ſcomponimento di ſoſtanze animali, io accordo al chiariſſimo Sig. *Canton*, che oltre al fosforeggiamento creatoſi nel mare dalle noſtre lucciolette, ve ne ſia un ſecondo affatto independente dal primo, anzi di gran lunga diverſo; e a ſuo luogo moſtrerò i caratteri che eſſenzialmente diſtinguono l' uno dall' altro, la qual coſa io non ſo che finora ſia ſtata da neſſuno avvertita; che anzi queſte due luci, quantunque provenienti da principj diverſi, facilmente ſi confondevano inſieme. Ma non poſſo mica convenire con lui, che la cagione di queſta ſeconda luce ſieno diverſe ſoſtanze di animali (ſegnatamente di peſci) periti, e ſcomponentiſi nel ſeno del mare. Egli è noto che la ſua ipoteſi ſi appoggia tutta alla lucentezza, onde ſi ornò l' acqua marina in diverſi vaſi, allorchè alcuni pochi peſci da lui ripoſti dentro di eſſa cominciarono a infracidare, e a ſcomporſi. Il prodigioſo numero de' peſci ſpecificamente diverſi che peſcanſi in quel tratto di mare, dov' io mi trovava, era un' opportunità troppo grande per mettere alle prove coteſta ipoteſi. Vero egli è dunque che qualche peſce vicino al corromperſi facea nell' ore notturne naſcere nell' acqua marina riposta ne' vaſi un chiarore che prima non v' era. Ma è vero egualmente che la maſſima parte di loro era inetta a produr queſto effetto. Di più nel novero de' peſci non lucenti vi erano d'ordinario quelli che hanno molta pinguedine, e che ſecondo il più volte citato Ingleſe devono eſſer più idonei, nello ſcomporſi che fanno, a rendere l' acqua fosforica. Un' altra ragione, ſecondo ch' io giudico, fortiſſima ſi oppone a queſta ſentenza. Se quel brillare notturno del mare, che non dipende punto da lucciolette, foſſe cagionato da ſoſtanze oleoſe di peſci ſcompoſti, ſiccome tali ſoſtanze ſoprannuotano ſempre all' acqua, chi non vede che tale brillamento eſſer dovrebbe ſuperficiale? Che è appunto ciò che non ſi accorda col fatto. Imperocchè da replicate ſicuriſſime eſperienze che addurrò, voi vedrete, illuſtre mio Amico, che anche alla profondità di 40 piedi parigini il mare è fosforeggiante. E però io non peno molto a credere che a qualunque profondità ſia pur tale. Il che eſſendo, ſi fa chiaro abbaſtanza eſſere tal luce una proprietà inſeparabile dall' acqua marina, la qual proprietà faſſi ſoltanto ora più, ora meno ſenſibile a norma della diverſità de' venti, delle ſtagioni, e di altre circoſtanze, ſiccome dalle mie oſſervazioni parmi di aver potuto baſtantemente raccogliere. Quale ſia poi, od eſſer poſſa l' origine di un tal fulgore, io vi confeſſo con la mia ſolita ingenuità, che non ſaprei ora dirvelo con ſicurezza, non avendo io ſu queſto curioſo fenomeno che conghietture, che mi riſerbo di commettere all' eſperienza la prima volta che rivedrò il mare.

§. II.

Penne marine.

E' noto che con tal nome vogliono deſignare i Naturaliſti un genere ſingolare di piantanimali, per avere qualche rozza ſomiglianza con le penne dell' ali degli uccelli; al qual nome ſenza veruna ragione è ſtata ſurrogata la barbara voce di *Pennatule* dal Cavaliere *Linneo*. Anche queſti viventi ſono foſforici, favellando almeno di alcune ſpecie, quale ſi è la penna marina *grigia*, e la penna marina *roſſa*. Ma prima di farmi a dire della loro qualità foſforica, toccherò alcune mie oſſervazioni, che mi ſembrano atte a dilucidare qualche punto controverſo, relativo alla ſtruttura, e al naturale di queſti piantanimali.

Vuole il *Pallas* ſu l' autorità dell' *Ellis* ch' eſſi ſieno ſprovveduti di bocca, o almeno d' un foro analogo. Ma il vero è che un tal foro vi eſiſte beniſſimo, e trovaſi in entrambe le ſpezie ſituato all' eſtremità del gambo della penna, pel qual foro entra l' acqua, e ne eſce ſotto forma d' un picciol zampillo. Non nego però che l' animale poſſa anche valerſi, e ſi valga di fatto di moltiſſimi altri forellini per attrar dentro sè l' acqua, e con eſſa il neceſſario alimento, voglio dire delle boccucce de' polipi, onde abbonda la parte oppoſta al gambo, la quale chiamerò *piumata*, per eſſer ſimile in qualche modo alle piume. E favellando di queſti polipi, ſiccome ho potuto eſaminarli vivi, e a lungo, e in aſſaiſſimi di queſti piantanimali, così crederei di avere ampliata la loro ſtoria, che fino adeſſo ſi può dire naſcente.

E' ſtato creduto che le penne marine ſi trasferiſcano da ſito a ſito nel mare; e ciò ſi è inferito da alcuni contorcimenti, e moti parziali del loro corpo, ſenza però che neſſuno, a quel ch' io mi ſappia, le abbia mai vedute muoverſi progreſſivamente. La comodità di averne molte a mia diſpoſizione, e di poterle oſſervare ſenza che uſciſſer dell' acqua marina, mi ha reſo più fortunato degli altri. Ho adunque nelle due penne, roſſa, e grigia, veduto chiaramente queſto movimento locale, picciolo in vero e lentiſſimo, ma baſtante a darvi un' idea che queſti piantanimali ſono eſſeri vaganti dentro del mare. Non laſcierò di deſcrivere come eſeguito venga cotal movimento. E queſta facoltà *loco-motiva* contradiſtingue i noſtri piantanimali da tanti altri, quali ſono le gorgonie, le madrepore, le millepore, gli alcionj, de' quali più ſotto dovrò parlare, i quali tutti immobilmente fitti rimangono a' ſiti del mare, dove ſon nati, nè in loro ſi ſcorge verun altro moto, che quello de' polipi che per certi forellini

rellini o cellette eſcono dal corpo di queſti piantanimali, e a lor talento ſi naſcondono dentro di eſſi. Per l' oppoſito le noſtre penne, oltre al movimento particolare de' loro polipi, hanno quello di tutto il corpo; e quindi ſi poſſono conſiderare, non ſenza noſtra ſorpreſa, come un grande animale, ſu cui in certa guiſa inneſtati ſono tanti altri piccioli, quanti ſono gl' innumerabili polipi, di che ſi adorna.

La moltitudine da me trovata di queſte penne mi ha eziandio fatto ſcoprire come ſi ſviluppano, e creſcono, il qual fenomeno non era ſtato conoſciuto da que' Naturaliſti, che favellato hanno di eſſe, probabilmente per averle ſempre trovate già ſviluppate, e creſciute.

Ma paſſiamo a far parola del loro fosforeggiamento, attiſſimo egli pure per le novità che comprende a piccare la nobile voſtra curioſità. Voi ſapete che era già noto, che tanto la penna grigia, quanto la roſſa riſplendono vive nell' ore notturne dentro del mare. Quindi da alcuni Siſtematici ſono anche ſtate appellate penne *fosforiche*. Il fatto è veriſſimo, ma queſto fatto abbiſogna di ſchiarimento. Se adunque le noſtre penne reſteranno immote nell' acqua marina, non riſplendono nè punto nè poco. Solamente la luce accendeſi in eſſe, ogni qualvolta vengono moſſe: queſta mozione poi o ſia loro propria, o venga cagionata dall' urto dell' acqua. Di più non riſplendono ſolamente vive, ma anche quando ſono morte: baſta ſolamente toccarle, e il fosforo brilla egualmente fuori dell' acqua, che dentro. Poco dopo però che è ceſſato il moto nelle penne, prodotto dal toccamento, ſi ſpegne ogni luce; ſebbene, toccandole di nuovo, non laſcia di ricomparire. E qui vedete come il moto ſia una condizione per averſi la luce in queſti eſſeri organici, quando tal condizione non è punto richieſta in tanti altri. Saprete quel che riferiſce il *Bartolino* di una ſeppia (*a*), la quale aprendola mandava un lume sì copioſo e sì vivo, che allontanata di ſera la candela, parea ne avvampaſſe tutto il palazzo. Il Mediterraneo che abbonda di queſti *molluſchi* mi ha fornita più

(*a*) Sepia octopodia. Linné Syſt. Nat.

d' un' occaſione di cercar di avverare queſto prodigio, che ſenza ulteriori eſami ſembra adottarſi dal celebre *Linneo* . A dir vero non ha corriſpoſto alla mia eſpettazione. Una luce però aſſai forte ſi è qualche volta prodotta: e ciò che ora fa al caſo ſi è, che la medeſima era belliſſima, ancorchè le ſeppie già morte non ſi toccaſſero punto, nè ſi moveſſero. E un ſomigliante ſenomeno mi accadeva pur di vedere in que' pochi peſci, de' quali ho ragionato più ſopra (§. I.), della cui luce, come di quella delle ſeppie dovrò a ſuo luogo parlare con qualche dettaglio.

Ma ritornando alle penne marine, io oſſervo che quegli autori che incidentemente hanno ſcritto della loro luce, non ci dicono punto ſe queſta occupa tutto il loro corpo, o una porzione ſoltanto; eppure era queſta una circoſtanza da non tacerſi. Dirovvi adunque che quando ſon vive o morte da poco tempo, il gambo della penna non appariſce mai lucido, ma la parte ſoltanto piumata. Sebbene neppur queſta lo è per tutto egualmente. Ma voi non indovinerete forſe sì facilmente dove riſegga la maggiore intenſità della luce, o a dir meglio dove tragga la ſua ſorgente. Sapete voi dunque dove tal luce emana precipuamente? Dai polipi. Quanti adunque ſono eſſi di numero, tanti ſono i lumicini bianco-cerulei che brillano; e il loro brillare è tanto vivo, che di notte dal lume di candela poco rimane eccliſſato. Toccando poi i lembi della parte piumata, ſcorre tal lume rapidamente dai polipi verſo il mezzo di lei. Nel mio libro fermerò alquanto la penna nel deſcrivere queſto fenomeno, e allora dimoſtrerò che la luce de' polipi ſi eccita in grazia di una materia mucoſa, di che abbondano. Ecco adunque come alle tante portentoſe prerogative di che godono i polipi, ſi aggiunge quella d' eſſer fosforici, parlando almeno dei preſenti. Se poi le penne già prive di vita continuino a ſtare per più giorni nell' acqua (giacchè eſpoſte all' aria, d' indi a non molto ſi ſeccano, e del tutto perdono il fosforeggiamento), cominciano internamente a ſcomporſi, e ſcomponendoſi a convertirſi in un viſcidume, occupante tutta quanta la porzione piumata, il qual viſcidume quantunque volte col dito o con altro ſi tocca, di oſcuro che era improvviſamente sfavilla.

Ho detto più ſopra che eſſendo le penne nell' acqua, queſta s' inſinua ſu pel foro ſituato all' eſtremità del loro gambo. Ogni penna, ſia grigia o roſſa, dopo qualche tempo s' imbeve talmente di cotal fluido, che da fondo a cima ne rimane ſatolla. Se allora ſe ne eſtragga una dall' acqua, e ſi comprima con la mano la parte piumata, laſciando libero il gambo, ſchizza dal mentovato foro un rigoglioſo zampillo; e ſe l' eſperimento ſi faccia nelle tenebre, il zampillo rappreſenta una picciola, ma luminoſiſſima fontana, la quale ſe venga a rompere ſu la mano, o ſu i panni, li tinge di un vaghiſſimo colore argentino; ſe poi cada ſul pavimento, vi crea a poco a poco un laghetto di candida luce.

Un fosforo così nobile, quale ſi è quello delle noſtre penne, meritava ch' io cercaſſi di conſervarlo a lungo, mentre ſciogliendoſi eſſe a poco a poco nell' acqua, in capo a pochi giorni ſpariſce. Note vi ſono le premure, e lo ſtudio del celebre noſtro Italiano *Beccari*, per conſervar buona pezza la luce delle foladi, quantunque al certo lungamente inferiore a quella delle penne marine. Curioſo non ſolo, ma eziandio utile alle fiſiche mie ricerche ſi era un ſecondo tentativo, contrario al primo, cioè quello d' indagare con quali mezzi veniva a ſpegnerſi un sì bel fosforo. Ma ſopra ogni altro l' inveſtigazione dell' indole, e delle qualità della materia producitrice di queſto fosforo, impegnar doveva i miei rifleſſi: e ſe tale o analoga materia ſia pur quella che rende fosforici tanti altri viventi marini, così che ſi poteſſe peravventura avere fondamento di credere, che il principio producente in loro tal luce foſſe generalmente un ſolo. Ed avendo rapporti troppo diretti tutti queſti viventi marini con le lucciole terreſtri, non ſi poteva quaſi entrare in un maturo e filoſofico eſame dei primi, ſenza farſi ad eſaminare ancor le ſeconde. Attorno a queſte ricerche mi ſono adunque eſercitato; e parlando delle lucciole marine, e de' polipi fosforici, le une e gli altri mi hanno abbaſtanza inſtruito in qual conto debba tenerſi l' opinione del chiariſſimo Profeſſore *Forſter*, penſante che l' interrotto lucicamento di certi vermi terreſtri dipenda dall' inſpirazione, e dall' eſpirazione dell' aria (*a*).

(*a*) Rozier 1783.

§. III.

Alcionj.

Queſto genere di piantanimali, per quel lato con cui guarda i vegetabili, ha con loro maggiori relazioni di quel che abbiano le penne marine, sì perchè nel mare trovaſi ſempre radicato, sì perchè alcune ſue ſpecie ſono corredate di tronco, e di rami, quale ſi è l'alcionio *palmato*, detto da alcuni *mano marina*, di cui ora prendo a parlare (*a*). Quel tratto di mare che guarda il mezzodì, e che è poſto in dirittura del golfo, abbonda di queſta ſpecie di alcionj, e per lo più ſi peſca in compagnia delle penne roſſe, e grigie, cioè a dire alla profondità di 200 piedi d' acqua, ed anche di vantaggio. Dice il *Pallas*, che eſſa naſce ſu gli ſcogli, e ſu le conchiglie. Ciò è veriſſimo, purchè non pretendaſi eſſer queſta una condizione neceſſaria al ſuo naſcimento, mentre l' alcionio palmato naſce, e creſce egualmente ſul fondo terroſo del mare.

Queſto piantanimale, quando ſi peſca già adulto, è ramoſo. Ma è egli tale quando naſce, oppur ſemplice? Lo ſcioglimento di tal queſtione, come d' infinite altre, indarno lo avrei cercato ſu i libri. Per averlo ho dovuto conſultar la Natura.

Quantunque i noſtri alcionj non abbiano tutti un colore, ma altri ſieno più o meno roſſi nei rami, altri cenerognoli, altri bianchi, ciò non oſtante io non li giudico ſpecie diverſe, per eſſere la loro conformazione, e la loro ſtruttura ſimiliſſima in tutti, e per oſſervarſi pure la ſteſſa coſa ne' loro polipi, comechè queſti pure ſieno partecipi del colore dell' alcionio, a cui appartengono. Queſti curioſi animalucci, creduti già dal *Marſilli*, e deſcritti come veraci fiori, hanno

---

(*a*) Il *Linneo* che innumerabili volte cangia a capriccio i nomi alle produzioni naturali, chiama queſto alcionio *exos*, ſenz' oſſo. Vero è che gli alcionj in generale conſiderare ſi poſſono piantanimali ſenz' oſſa, come ſaviamente riflette il *Pallas*, per andare ſprovveduti di quella ſoſtanza dura, che ſi trova in tanti altri piantanimali. Ma la voce *exos* in tal caſo è generica, e perciò malamente ad una ſola ſpecie ſi adatta.

per preferenza impegnata la mia attenzione. Quando l' alcionio ſi tira fuori del mare, ſi naſcondono tutti nelle lor cavernette. Non è però che in ſeguito non tornino ſuora, con queſto ſolo divario, che ſeguitando a reſtare l' alcionio all' aria, non ſi preſentano che ſotto forma di papille o bottoncini; laddove rituffando l' alcionio nell' acqua marina, ne eſcono beniſſimo, e ſpiegano i loro braccini, ſomigliando ciaſcheduno allora ad un vago fioretto ottopetalo. Agitando però forte l' acqua, ſi ritirano, e ſi perdono quaſi di viſta, e laſciandola quetare, tornano a farſi vedere. Se poi l' alcionio ſeguirà a reſtare nell' acqua ſenza mutarla, quell' eſercito di polipi ceſſa di vivere, rimanendo però ciaſcuno in maſſima parte fuor della propria celletta, come fa una lumaca terreſtre fuori del guſcio, ſe ſi obblighi a morire nell' acqua.

Quantunque il dottiſſimo *Pallas* nel ſugoſo ſuo Trattato de' piantanimali dica che gli alcionj vengon dall' uova, io non veggo però che lo moſtri mai nel deſcriverne tutte le ſpecie finora conoſciute. Quindi io opino che egli aſſeriſca ciò, più per l' analogia di altri piantanimali, che naſcon così, che per avere qualche fatto che lo comprovi. E però io quaſi oſerei aſſerire d' eſſere ſtato il primo a ſcoprire le uova negli alcionj palmati. Quale adunque ſia la loro forma, e grandezza, in qual parte del piantanimale riſeggano, da qual ſito ne eſcano per naſcere, ſaranno queſti i punti ch' io mi proporrò di diſcutere.

L' effetto luminoſo che producono le penne marine nol producono gli alcionj: anzi dirovvi, per non averlo inutilmente a ripetere, ch' elleno ſono le ſole fra tutte le produzioni polipifere da me eſaminate, che godono di queſta prerogativa.

Ma oltre all' alcionio palmato, ne ho ſcoperta un' altra ſpecie differentiſſima, da me non trovata da altri deſcritta. Non può negarſi che ſia un vero alcionio, avendone tutti i caratteri, ma è privo de' polipi, non oſtante che abbia quelle ſtelluzze ſu la ſua ſuperficie, che ſogliono eſſere le boccucce o le aperture, per dove eſcono queſti piccioliſſimi viventi. Nè accorto mi ſono che altra parte del ſuo corpo dotata ſia del più picciolo indizio di ſenſo, o di moto. In rigore adunque non può queſto dirſi un piantanimale; e però ſi vede che la natura nel formar gli alcionj non ha ſempre infuſo in loro un principio ſenziente.

§. IV.

Millepora Retepora.

Non per altro prendo io brevemente a parlarvi di queſto piantanimale, detto non impropriamente da alcuni Franceſi *Manichino di Nettuno*, per avere qualche ſomiglianza co' manichini di merletti, ſe non ſe per accennarvi di avere trovati in eſſo i ſuoi polipi. Sono prodigioſamente minori di quelli delle penne marine, e degli alcionj, ma laddove queſti ſi oſſervan dotati d' una vita ſenſitiva torpidiſſima, in tanto che eſcono con infinita lentezza dalle loro cellette, e con lentezza quaſi eguale vi entrano, nè ſi determinano ad entrarvi ſe non ſe quando o vengono irritati, o l' acqua dove ſono immerſi ſia molto agitata; i polipi per contrario della millepora retepora ſono d' un ſenſo vividiſſimo, così che ad ogni lieviſſimo tremito dell' acqua ſi naſcondono di preſente nelle loro cavernette, ſenza però laſciare di tornar ſuora, ceſſato il commovimento. Numeroſi ſono i loro braccini, e vengono talvolta à formare quaſi un imbuto, cha ha l' apice all' apertura della cavernetta.

Queſta millepora ſi peſca in fondo al mare a non molta profondità, e naſce, e ſi attacca dove che ſia.

§. V.

Madrepora.

Malgrado la quaſi infinita diverſità delle ſpecie, che dai Naturaliſti riferita viene, e deſcritta di queſta marina produzione, tanto ſomigliante per la qualità della materia, onde è compoſta, al corallo volgare; e malgrado i giudizioſi ſoſpetti dell' *Imperato*, e le aſſerzioni del *Rumſio*, e del *Peyſſonel*, che una tal produzione appartenga al regno animale; certa coſa è però che a confermazione di tutto ciò noi non abbiamo finora che una ſola oſſervazione, laſciataci dal *Donati*, per la quale chiaramente appariſce, che la madrepora detta *ramoſa* alberga i ſuoi polipi, come è proprio di tanti altri piantanimali. In sì grande inopia pertanto di oſſervazioni non crederò far coſa diſcara al pubblico verſato in queſte materie, nè a voi, ſe al fatto del celebre noſtro Italiano ne accoppierò un mio proprio, appartenente alla madrepora *calycularis*, come la denomina il *Pallas*, o *a bottoncini*, come la potremo dir noi. In que' fondi marini adunque dove trovanſi le millepore retepore ſi trova pur la madrepora a bottoncini, formante molti gruppi di cilindri corallini d'un bianco ſudicio, groſſi quanto una penna da ſcrivere, inſieme ſtrettamente attaccati, quali più numeroſi, e quali meno, e queſti gruppi non ſono mai radicati a ſcogli o a pietre, o ad altro corpo ſtabile, ma giacenti ſemplicemente ſul ſango. Ogni gruppo fa corpo da sè, e quanti ſono i cilindri, tanti ſono i polipi che dentro vi abitano, quando queſti però o per vecchiaja o per altro non ſieno periti, raro non eſſendo il trovar molti di queſti gruppi ſpogliati affatto di abitatori. Ciaſcun cilindro alla ſommità è tronco, e quivi pronſondaſi in un picciol calice, che riempiuto viene dal polipo, quando che eſce. Queſti polipi ſono molto più groſſi che quelli delle penne marine, e degli alcionj, ma ſomigliano però loro per la lentezza del moto. Perchè eſcano, e ſtendano i braccini, egli è ſempre d' uopo che la madrepora ſi trovi nel nativo elemento. Così perchè campino a lungo dentro a' vaſi, fa di meſtiere cambiar l' acqua ſovente, come dee praticarſi parlando degli altri piantanimali: ma non cambiandola, i polipi della preſente madrepora ſoggiacciono a una vicenda, da me non oſſervata ne' polipi degli altri piantanimali. Se una penna marina, un alcionio, una millepora ecc., ſoggiornino ſempre nella medeſima acqua, i riſpettivi polipi, quando periſcono, rimangono tuttavia uniti alle loro cellette: per l' oppoſito diverſi polipi della noſtra madrepora partono da eſſa, e ſi traſferiſcono altrove dentro all' acqua, quantunque però molti altri non ſi allontanino punto da' ſiti nativi. Queſto paſſaggio di più polipi dalla madrepora ad altri luoghi, aſſai volte da me veduto, ſiccome è ſtato a me, così probabilmente ſarà a voi di non leggiere maraviglia. Concioſſiachè eſſendo così la coſa, parrebbe adunque che le madrepore altro non foſſero che ſemplici *polipari*, oſſia nidi di polipi, a quel modo, per atto d' eſempio, che i veſpaj ſono nidi di veſpe; di maniera che ſiccome le veſpe fanno un corpo da sè, independente affatto dal veſpajo, così pronunciar ſi doveſſe il medeſimo di queſti polipi relativamente alle madrepore; la qual opinione quantunque altre volte abbia avuto a ſautori de' prodi Fiſici, pure oggigiorno da' più limati Naturaliſti viene rigettata, ammettendoſi che i polipi ſono talmente legati con le madrepore (e così dicaſi di altre produzioni polipiſere) che a formar vengono un tutto ſolo con loro: e queſto è pure il ſentimento voſtro. Voi però ſoſpendete intanto per poco i voſtri giudizj, riſerbandomi più ſotto a ventilare con maggiore apparato di fatti queſta importantiſſima queſtione, fino ad ora per quanto io ne penſo, da altri non pienamente deciſa. Noterò qui ſolo che quella ſeparazione di alcuni polipi dalla madrepora mi è ſtata utiliſſima, in quanto che così ſeparati, e liberi da qualunque impaccio, io ho potuto meglio oſſervarli, e farne eziandio qualche rozza notomia.

§. VI.

Gorgonie.

Poſſo dirvi che queſta fatta di piantanimali è ſtata una delle principali cagioni di recarmi di nuovo ſul mare. Sentite in pochi tratti, illuſtre mio Amico, come è ita la coſa. Nel Settembre del 1781 ritornando io da Marſiglia a Genova, dopo l' aver fatta in quella città di Provenza doviziosa raccolta di peſci ad uſo del pubblico Reale Muſeo dell' Univerſità di Pavia, ed eſſendomi un giorno, viaggiando ſul mare, poſto a leggere l' *Elenco de' Piantanimali* del Sig. *Pallas*, m' abbattei ad un luogo, ſcorrendo il quale, come buono Italiano, e affezionato alla mia nazione, non potei non concepire qualche ſdegnuzzo verſo il rinomatiſſimo Accademico di Pietroburgo. Cotal luogo riſguarda le gorgonie, delle quali per avviſo di lui ſappiam così poco per l' imperdonabile traſcuranza degl' Italiani. Sentite le parole ſteſſe dell' autore, che non poſſono eſſere più gentili, nè più obbliganti. *Certiora & ſpecialiora ex vivis Gorgoniis diſci debent; quorum nos cognitione,*

cognitione, *ob Italorum*, *quos maris Mediterranei divitiæ*, *in tanta vicinitate*, *fruſtra invitant*, *ſupinam negligentiam*, *hucuſque carere dolendum eſt* (*a*). Pur troppo debbo convenire col Sig. *Pallas*, eſſervi in Italia qualche città alle ſponde del Mediterraneo, che potrebbe eſercitarſi con lode nell' oſſervare filosoficamente le produzioni marine, e che ſi occupa di tutt' altro. Ma queſta mancanza non è tanto noſtra, che non vada anche a cadere ſopra qualche altra nazione; e il nominato Naturaliſta, giacchè con cinica libertà così parla di noi Italiani, ſe era equo, non dovea riſparmiare i Signori Franceſi. Ma laſciati da parte queſti odioſi diſcorſi, dirovvi che determinai allora (non da altro ſtimolato che da voglia d' imparare) di ſtudiar le gorgonie, ſe peravventura ſcoperto ne aveſſi, e ſopra tutto di far diligenti eſami ſu i loro polipi, in evento che ve gli aveſſi trovati. E da Genova eſſendo io poſcia paſſato in quel meſe iſteſſo al delizioſiſſimo golfo della Spezia, e ſu di eſſo avendo io un giorno gli occhi rivolti ad una ricca ſorgente d' acqua dolce, che ſollevaſi ſopra il livello del mare, della qual ſorgente parlerò nella ſeconda mia lettera, vidi fortunatamente da un lato celarſi in poco fondo un numero ben grande di arbuſcelletti, alcuni de' quali avendo io fatti eſtrarre dall' acqua, conobbi da qualche eſame iuſtituito ſu loro, eſſere le tanto ſoſpirate gorgonie. Ma per la ſtagione inoltrata non potendomi io allora trattenere di vantaggio in que' luoghi marittimi, deliberai di riviſitarli a tempo migliore, nè queſto da altre mie occupazioni mi è poi ſtato accordato che la proſſima ſtate paſſata.

Si ſa che per gorgonie ſi vogliono intendere certe produzioni marine radicate cornee ramoſe, ſpinate alla baſe, veſtite d' una molle corteccia, ricca di cellette e di forellini, da' quali ſi vuole che eſcano i polipi. Le gorgonie da me trovate ſul fondo del golfo in vicinanza della mentovata fontana ſono tutte d' una qualità; e quantunque per una moltitudine di picciole *verruche* che hanno alla ſuperficie ſi accoſtino alla ſpecie denominata *verrucoſa* dal *Linneo*, e dal *Pal-*

(*a*) Pag. 163.

las, hanno però altri caratteri che a mio giudizio le rendon diverſe.

Nel reſtante del golſo, anzi neppur fuori di eſſo non trovandoſi queſta qualità di gorgonia, ma ſolamente ne' luoghi proſſimi a quella groſſiſſima fonte, dove cioè l' acqua marina miſchiata alla dolce è meno ſalſa, ſarebbe mai la minor ſalſezza del fluido una condizione richieſta alla naſcita, e all' incremento di queſto piantanimale?

Gli alcionj, le penne marine, le millepore pullulano ne' ſondi marini dove che ſia. Le noſtre gorgonie vogliono ſempre per baſe una pietra. Nel tempo ch' io le ho eſaminate, ne avrò tratto dal mare per ben dugento, e tutte quante erano tenacemente attaccate alla loro pietra. Di più quando il mare era tranquillo, e nel tempo ſteſſo illuminato dal ſole, ne vedeva ſott' acqua, dove queſta era poco profonda, degl' intieri boſchetti, ſenza che mai una ſola gorgonia ſi oſſervaſſe radicata alla nuda terra, o a qualche pianta ſubacquea. A riſerva di non aver radici, ma di reſtare attaccate o piuttoſto incollate al ſaſſo con la ſpianata loro baſe, nel rimanente ſomigliano in picciolo a un albero sfogliato, avendo e tronco e rami e ramoſcelli, e alla maniera pur degli alberi il tronco ſuole eſſer perpendicolare all' orizzonte, i rami poi, e i ramoſcelli ſono rivolti all' insù. Ne ha di varie grandezze, e le maggiori giungono in lunghezza fino a un piede e mezzo, e queſte a proporzione hanno anche un intreccio di rami più numeroſi e più larghi, le più picciole poi ſono ſenza rami, e non arrivano tante volte a un terzo di pollice. Ma ſe le noſtre gorgonie tanto ſomigliano nell' abito eſteriore alle piante, hanno altresì con eſſe molti tratti di ſomiglianza nel loro interno, eſſendo corredate di corteccia, di legno, e di midollo. Solamente il corpo ch' io chiamo legno, e che è di mezzo tra la corteccia e il midollo, è di ſoſtanza cornea, o almeno molto analoga al corno; e perciò non immeritamente venivano con greco vocabolo le gorgonie appellate *ceratofiti* dagli antichi, cioè *corna-piante*. Proccurerò di eſporre con la dovuta preciſione le oſſervazioni da me fatte intorno a queſto triplice corpo, corticale, legnoſo, e midollare. Qui noterò ſoltanto che la corteccia così del tronco che dei rami è ſempre avvolta da una ſottile buccia calcare.

Fin qui conſiderate abbiamo le gorgonie per quella parte, con cui ſembrano collegarſi con le piante: paſſiamo ora ad eſaminarle per l' altra, con cui s' intrecciano con gli animali, voglio dire entriamo a dare un cenno dei polipi che le abitano, riſerbandomi poi a ragionarne in dettaglio nella mia Opera, maſſimamente per non eſſere ſtati deſcritti da altri prima di me. Tirata dall' acqua nativa una gorgonia, ſi mira nel tronco, e più aſſai ne' rami, e nei ramuſcelli piena di picciole verruche, che eſaminate alla lente ſi ſcorgono forate nel mezzo, e fatte a modo di ſtelluzze otrangolari allungate. Se la gorgonia continuerà a reſtar fuori d' acqua, non ſopravverrà alle verruche novità alcuna; ma ſe metteraſſi di nuovo nell' acqua, allora dal foro centrale d' ogni verruca uſcirà ſpontaneamente un corpicciuolo, che per eſſere più groſſetto del foro ſteſſo, lo obbligherà ad allargarſi; nè s' indugerà molto ad accorgerſi che quel corpicciuolo è un polipo. Ha otto braccini, la ſua figura è cilindrica, e finchè l' acqua rimane quieta, reſta ognuno dei polipi fuori delle verruche; agitandola poi, o traſportando la gorgonia all' aria, ſi naſcondono dentro di eſſe. Se quando vi ſono naſcoſti, frugheremo con la punta d' un ago attorno alle verruche, troviamo i polipi rannicchiati nel fondo di eſſe, e pungendoli ſi contraggono vie maggiormente in ſe ſteſſi. Sono grandicelli abbaſtanza per eſaminarli, e diſegnarli convenientemente.

Ma la diſcuſſione delle ſeguenti queſtioni doveva iſtruirmi di vantaggio ſu i polipi delle gorgonie, e ſu la loro economia. Che loro accade ſe la gorgonia matrice ſi ſtacchi dal ſaſſo, ſul quale è come incollata, laſciandola tuttavia dentro del mare? La vita de' polipi dipende ella dall' integrità della gorgonia, così che tagliandola in più parti ſieno eſſi ſoggetti a perire? Oppure baſta ad ogni polipo per vivere, che illeſa rimanga quella porzioncella di tronco, o di ramo, dove egli ſi trova? Che avviene a queſti animaletti, ſpogliando ſolamente la gorgonia o in tutto o in parte di ſua corteccia? Reciſo uno o più rami di una gorgonia, rimette ella novelli rami, come fanno le piante? Ho il compiacimento di ſignificarvi che tengo dalla Natura la ſoluzione di tutti queſti Problemi, e qui ſolo dirovvi che per riguardo all' ultimo, la riproduzione che ſi ottiene nelle gorgonie non è ſimile a quella delle piante, le quali ſi ſa che al di ſotto del ramo reciſo gittano rampolli novelli, ma piuttoſto è ſomigliante a quella degli animali, in quanto che ſu la cima d' ogni troncone pullula un cono, come ſi oſſerva ne' lombrichi terreſtri mutilati, e ne' voſtri vermi d' acqua dolce. Qualòra poi il cono è alquanto creſciuto, mette fuora egli pure lateralmente nuove verruche, e nuovi polipi.

Quantunque queſte gorgonie non allignino, come già diſſi, che in vicinanza di quella ſonte, non è però che il golſo della Spezia non dia ricetto a qualche altra ſpecie. Due altre certamente ve ne hò ſcoperte ſpecificamente fra loro diverſe. Quantunque la ſcarſezza degl' individui peſcati non mi abbia conceduto il farvi attorno quella mano di oſſervazioni, che ho inſtituite nella gorgonia ſopra deſcritta, mi trovo però averne baſtantemente per poter ragionare con fondamento di ſicurezza della natura di tali gorgonie, e di quella de' loro polipi.

Per ſentimento del *Linneo* le gorgonie ſono un parlante eſempio del paſſaggio che fa un vegetabile in un animale; giacchè oltre all' avere elleno i caratteri di piante veraci, l' animata loro midolla ſi manifeſta all' eſterno in que' floridi animaluzzi, che chiamiamo polipi.

Per le mie oſſervazioni però credo di poter dimoſtrare quanto qui vada errato quel ſolenne Naturaliſta; e dir biſogna che quantunque viciniſſimo al mare, veduto egli mai non aveſſe una viva gorgonia.

§. VII.

Spugne.

Riporremo noi nell' ordine de' piantanimali queſta produzione marina? Così oltre al *Linneo* vuole il *Pallas*, penſante che le ſpugne ſieno il termine della vita, e della natura animale, ſoſtenuto da una lunga ſchiera di autori, che pretendono di avere in eſſe veduti non equivochi ſegni di ſenſo, quantunque altri opinato abbiano contrariamente.

Le mie oſſervazioni verſato hanno ſopra due ſpecie, che ſono le ſole da me vedute ſul luogo, dov' io mi trovava. La prima è una ſpugna arborea, belliſſima per l'intreccio de' rami, e per la finezza della ſtruttura, che ſi ſuol peſcare in alto mare alla profondità di 200, ed anche 300 piedi; l'altra è una ſpugna più fitta, più compatta, più ſolida, di forma più o meno globoſa, naſcente nel golfo a poca profondità, e trovanteſi attaccata agli ſcogli, alle pietre, ed anche alle vive conchiglie. Vedrete in quante, e quanto ſvariate maniere io ho cimentate coteſte due qualità di ſpugne, per veder pure ſe manifeſtano qualche indizio di vita, richiamando ſopra tutto ad eſame il più ſcrupuloſo quella ſoſtanza gelatinoſa, onde abbondano, e che ſi pretende eſſer la ſede del ſenſo, e del moto. E queſti cimenti ſono ſtati intrapreſi quando le ſpugne erano nel loro elemento, anzi parlando delle globoſe, mentre che tuttavia reſtavano aderenti agli ſcogli. Ma offenderei le parti dell' ingenuo Filoſofo, s' io diceſſi di avere in loro ſcoperto pur ſegnale, pur ombra di vita o di moto: e però, quanto almeno a queſte due ſpecie, non mi ſento punto diſpoſto a riporle, come vorrebbono i due lodati ſcrittori, nel novero de' piantanimali; e quindi io non le giudico che ſemplici vegetabili; e per ciò che riſguarda le globoſe, crederei anche di poter dire qualche coſa intorno al loro creſcere, e al loro maturare, di cui nulla finora ſi ſapeva in queſto genere di produzioni.

§. VIII.

Coralline.

Le ſpecie da me trovate ſono la corallina *officinale*, la *pavonia*, l' *opuntia*, e un' altra ch' io non la crederei che una varietà di quella che viene rappreſentata dall' *Ellis* nella Tavola XXIII, e da lui chiamata: *corallina articulata dichotoma, internodiis ſubcylindricis, cellulis rhomboideis, omnino tectis, & tubulis membranaceis exiguis, colligatis* (a). Uno degli ſcopi precipui di mie ricerche è ſtato quello di eſami-

---

(a) Eſſai des Corallines ecc.

nare con la maggior diligenza poſſibile, ſe queſte coralline ſono ricettacoli di polipi, ſiccome vuole queſto chiariſſimo Ingleſe, indotto a così penſare, non già perchè ve gli abbia effettivamente veduti, ma e dall' analogia, e dalle cellette minutiſſime che vi ha ſcoperte, che per lui avviſo debbono eſſere deſtinate a queſt' uſo. Dirò io pure di avervi trovate queſte cellette, o a dir meglio queſti piccioliſſimi forellini, ma non mai dentro ad eſſi il più picciol vivente, ad onta anche de' più acuti microſcopj adoperativi attorno, e di aver ſempre oſſervate le coralline dentro all' acqua marina. Tai forellini ſono ben diverſi dalle ordinarie cellette, che ne' piantanimali alloggian de' polipi, e non ſono in ſoſtanza che pori, ſimiliſſimi a quelli di aſſai piante marine, deſtinati a nodrire le coralline, ſapendoſi che la più parte de' vegetabili marini ſi nutrono per l' abito di tutto il corpo, non delle radici, di cui vanno ſenza. Io però penſo col dottiſſimo *Pallas*, che le coralline ſi debbano ſeparare dai piantanimali, ai quali erano ſtate dall' *Ellis*, e dal *Linneo* male a propoſito unite, e riferire ſemplicemente alle piante; e tanto più mi confermo in queſta credenza, quanto che in qualche ſpecie mi è riuſcito di trovar le ſemenze.

So che il citato Botanico di Upſal, malgrado il non poter moſtrare i polipi *floſculoſi*, vuole tuttavia che le coralline appartengano al regno animale, per eſſere d' ordinario veſtite di ſoſtanza calcare; la qual ſoſtanza come appunto calcare, è canone infallibile per lui, che non può eſſere che d' origine animale. Ma in primo luogo voi non ignorate quanto cotal canone, ſicuriſſimo per *Linneo*, ſia a tutta ragione controverſo per altri. In ſecondo luogo volendolo anche paſſar per vero, quindi ne verrebbe che trovato avendo io nel mare altre produzioni veſtite come le coralline, ed anche di vantaggio, di materia calcare, queſte non meno dovrebbono riporſi fra gli animali; eppure non ſono che veriſſime piante, riconoſciute anche per tali dal *Linneo*, non che dagli altri Botanici. Io parlerovvi alquanto alla ſteſa di così fatti vegetabili pietroſi, perchè riſguardano un punto intereſſantiſſimo, e che ſo che picca di molto l' illuminata voſtra curioſità. Voglio dunque dire che la diſamina di tai prodotti mi guiderà a cercare, ſe eſſi fornir ci poteſſero quell' anello o quegli anelli, che legano inſieme il regno foſſile col regno vegetabile. Il chiariſſimo *Donati* penſava che queſto anello foſſe il *muſco petroſo* dell' *Imperato*, e voi ſteſſo lo avvertite nella voſtra *Contemplazione*. Se la coſa foſſe così, lo dovrebbero pur eſſere per la ſteſſa ragione le varie piante petroſe teſtè menzionate. Ma prima che con qualche fondamento ſi poſſa queſto aſſerire, fa d' uopo a mio avviſo l' aſſicurarſi d' una coſa, a cui non ſo ſe ſia ſtato da altri ſinora penſato. O la ſoſtanza lapidea in queſte piante è puramente avventizia, nata cioè dalle particole terroſe depoſitate ſopra di eſſe dall' acqua marina; e in tal caſo queſte piante eſſer non poſſono il ricercato anello, altrimenti lo ſarebbero egualmente tutti que' vegetabili terreſtri, che in vicinanza di certe fontane ſi veggono talvolta intonacati di tartaroſa materia, e che da' Geologi *incroſtati* ſi appellano. O tale ſoſtanza lapidea ſi è compenetrata con eſſe piante, ed è parte delle medeſime, preſſo a poco come è la calce nella compoſizione delle conchiglie; e allora penderei a credere che queſte piante conſiderar ſi poteſſero come punti di paſſaggio dal regno vegetabile al regno lapideo. Mi luſingherei che le mie analiſi dilucidar poteſſero queſto punto ancor tenebroſo. In tal'occaſione moſtrerò quanto ſi allontana dal vero il chiariſſimo *Ellis*, penſante che i muſchi, i fuchi, ed altrettali produzioni marine non ſono ſemplici vegetabili, ma veriſſimi piantanimali.

§. IX.

I Piantanimali ſopra deſcritti non ſono nidi di polipi, o come dicono Polipari.

Dopo le ſamoſe ſcoperte del *Peyſſonel*, e le luminoſe conferme di Bernardo di *Juſſieu*, ſi era univerſalmente penſato, che le penne marine, gli alcionj, le millepore, le madrepore, le gorgonie, i coralli, ecc., altro non foſſero che polipari, o nidi di polipi, a quel modo che i favi, e i veſpaj ſono nidi di api, e di veſpe. Ma per conto delle madrepore, delle millepore, e dei coralli, ſi ſa che un tal ſentimento è ſtato combattuto dal Sig. *Heriſſant*, il quale fatto avendo ſcomporre nello ſpirito di nitro alcune di queſte produzioni, ha trovato che riſultano dall' unione d' innumerabili tubetti teſtacei, ciaſcun de' quali è compoſto, come le conchiglie, di una ſoſtanza animale oſſia membranoſa, e di una ſoſtanza terroſa, e che queſti tubetti ſono continuati co' polipi che dentro vi albergano, come è continuata la conchiglia col proprio animale (*a*). Coteſti polipi non ſono adunque ſemplicemente rinchiuſi nelle loro cellette, ma formano un tutto ſolo con eſſe, e conſeguentemente con la madrepora, o millepora, od altro marino prodotto dove ſi trovano.

Non può negarſi, l' oſſervazione è nobiliſſima, e degna veramente di un tanto Accademico. Pure mi ſi conceda di accompagnarla da un picciol rilievo. Egli ha inſtituita quell' ingegnoſa ſua analiſi a Parigi, o almeno in luogo diſtante dal mare, che è quanto dire allorchè le ſopraſcritte produzioni marine erano già mancanti de' loro polipi, avendo io veduto che reſtando queſti qualche giorno fuori dell' acqua, non ſolo periſcono, ma per eſſere al ſommo gelatinoſi ſpappolano, e ſi riducono al nulla. Le medeſime adunque ſottopoſte a quel diſſolvente, quantunque ſi ſieno ſcompoſte in quella doppia ſoſtanza, membranoſa, e terroſa (mentre un tal fatto è veriſſimo) non potevano però fargli vedere che i tubetti, onde riſultano, ſono continuati co' loro polipi, giacchè queſti polipi allora non v' erano. Eſaminando però quel luogo della ſua bella Diſſertazione, dove il Sig. *Heriſſant* favella di queſta continuazione, chiaro appariſce averla lui dedotta dall' analogia delle conchiglie, le quali ſciolte che ſono dallo ſpirito di nitro in quelle due ſoſtanze, terroſa, e membranoſa, fanno vedere che queſt' ultima è un' appendice o una continuazione dell' animale medeſimo. La pruova di queſto eſimio Anatomico non è dunque diretta, ma analogica, e per conſeguente non affatto perſuaſiva. Queſta perſuaſione, ſe pur vi era, biſognava dunque cercarla ne' mentovati piantanimali, quando ſono forniti de' viventi loro polipi.

(*a*) Mem. ſur l' Oſſification. Mem. de l' Acad. 1766.

lipi. Io però ad accertarmi del ſatto non poteva avere più bella occaſione di quella della madrepora a bottoncini (§. V.), col metterne alcuni gruppi ricchiſſimi di vivi polipi nello ſpirito di nitro indebolito con l' acqua comune, come praticato aveva il Sig. *Heriſſant*. Tanto io feci, ed ebbi il piacer di vedere che queſto celebre Fiſico, uſando l' argomento analogico, non ſi era ingannato. Ma da queſta madrepora animata io traſſi lumi anche maggiori. Le conſeguenze furono adunque le ſeguenti. Primieramente i polipi non erano ſtati da quel meſtruo niente pregiudicati. In ſecondo luogo ad alcuni polipi più grandi ſi vedevano attaccati de' polipi più piccioli, o piuttoſto formavano un tutto con loro, come i rami che pullulano da un albero, o i piccioli polipi a braccio quando ſono uniti al corpo materno. In terzo luogo tutti i polipi comunicavano inſieme per via di numeroſe ſottili faſcie membranoſe, che prima dell' intiero ſcomponimento della madrepora ſi vedevano continuate con le cellette calcari, dentro cui dimoravano i polipi. Le notizie che mi fornì l' acido di nitro, me le fornì pure l' aceto, anzi per operar queſto con più di lentezza, la parte animale della madrepora rimaneva anche più conſervata. La concluſion generale tratta da queſti fatti ſalta dunque agli occhi, cioè a dire che un gruppo di madrepora non è altro che un gruppo di polipi moltiplicanti per polloni, come quelli del *Trembley*, e incroſtantiſi a poco a poco d' una materia terroſa.

Da queſte verità di fatto voi raccoglierete facilmente ciò che ſi può ragionevolmente penſare d' intorno a que' polipi della madrepora a bottoncini che talvolta ſi veggon nei vaſi abbandonare le loro cellette, e recarſi altrove (§. V.). Eſſendo per loro l' acqua de' vaſi non così amica, come quella del mare, gli è certo che faranno ogni sforzo per ſuggirſene, e ſtante la loro natura gelatinoſa quelli che ſono attaccati a' compagni con minor numero di punti, facilmente ſi ſtaccheranno da loro. Di più moltiplicando eglino, come ſi è veduto, per polloni, non è naturale il penſare, che diverſi di queſti polloni giunti a maturità ſi ſtacchino ſpontaneamente dal comun ceppo, come fanno appunto i polipi Trembleyani, e ſi trasferiſcano in altre parti per fondare novelle colonie? Nella qual ſuppoſizione non potremo noi credere che i polipi ſuggenti dalle madrepore eſſer poſſano di queſto numero.

I tentativi da me felicemente intrapreſi ſu le madrepore, non ho potuto intraprenderli ſu le millepore. I piccioliſſimi, e appena diſcernibili loro polipi non me lo hanno conceduto.

Lo ſpirito di nitro che ſtato mi era sì vantaggioſo per le madrepore, mi ſi rendeva inutile per gli alcionj, e per le penne marine. Per analizzare queſti piantanimali biſognava aſſolutamente ricorrere al coltello anatomico, lavoro che mi riuſcì tanto più geniale, quanto che non era ſtato da altri tentato. Che immagignereſte voi, illuſtre mio amico, che foſſe un alcionio, quello almeno che, per ſomigliar rozzamente a una mano, detto viene da alcuni *mano marina*? Un prodigioſo aggregato di animaletti, lavorati a guiſa di altrettanti membranoſi tubetti ſchiacciati, che tutti s' aprono all' eſterno dell' alcionio con quelle picciole bocche ſtellate che chiamiam polipi. La compoſizione delle penne marine non diſcorda molto nell' eſſenziale da quella degli alcionj.

Quanto poi alle gorgonie, giacchè anche di queſto piantanimale qui debbo parlarvi, l'azione degli acidi, e più la notomia mi ha moſtrato che i polipi ſono una continuazione della corteccia delle ſteſſe gorgonie, che queſta corteccia per via di molti attacchi ſi uniſce e ſi collega col corpo corneo che chiamato abbiam *legno*, e che queſto legno mediante ſimili attacchi fa lo ſteſſo con la midolla. Sicchè in rigore ſi può dire, che i polipi, la corteccia, il legno, e la midolla vengono a formare un tutto ſolo. Dal fin qui detto rimane dunque evidentemente provato, che le madrepore, le gorgonie, le penne marine, gli alcionj (parlando almeno del ricordato di ſopra) non ſono per verun conto nidi di animali, o polipari che vogliam nominarli, ma ſono eglino ſteſſi famiglie numeroſiſſime di animali ſotto l' apparenza di piante, e perciò chiamati piantanimali, del qual vocabolo io ho fatto uſo, più per adattarmi alla vulgare eſpreſſione dei Naturaliſti, che per ſervire alla verità.

§. X.

Diverſi animali nuovi.

Crederò di poterli chiamar tali per non aver trovato alcuno che ne favelli. Il primo ha figura rozzamente cilindrica, è ſuſcettibile di accorciamento e di allungamento; e quando ſi accorcia ha di lunghezza tre pollici circa, e di larghezza più d' uno; e quando ſi allunga, ſcema in larghezza, e creſce in lunghezza quaſi del doppio. Queſti diverſi movimenti gli eſeguiſce l' animale ſenza il miniſtero di anella, che anzi il ſuo corpo è tutto liſcio, e ſi vede ſempre ſpalmato d' un lubrico e leggermente viſchioſo ſuco. La parte anteriore che chiamerò *capo* è ornata di due ordini circolari di punterelle allungate, l' uno concentrico all' altro, le quali punterelle direbbero *tentacoli* i Nomenclatori, ed io chiamerò *corna*, per avere qualche tratto di analogia con quelle delle lumache. Sono di fatti pieghevoliſſime come loro, e l' animale fino a un dato ſegno, quando vuole, le accorcia. Quelle che conſtituiſcono il circolo eſteriore ſono più lunghe dell' altre del circolo interno, giungendo le prime ad un pollice e mezzo, e le ſeconde ad un pollice dimezzato. Del rimanente l' une e l' altre ſono ſomigliantiſſime, e tutte inſiem compreſe arrivano a più di dugento. Internamente ſon piene d' un liquor traſparente, che al guſto ſi manifeſta eſſere acqua marina, e ſono anche forate all' apice, mentre comprimendole ne ſchizza da eſſo apice un zampilletto di tal liquore. Non ho laſciato di fare qualche rozza notomia di queſto animale.

Sta egli ſempre alla profondità di pochi piedi d' acqua; e ſembra preferire que' luoghi, in cui ſuol regnare perfetta calma. Ma queſte circoſtanze non baſtavano probabilmente per la conſervazion ſua. Così nudo come io l' ho deſcritto, e d' altronde inetto al muoverſi localmente, malgrado quegli allungamenti, e accorciamenti del proprio corpo, ſarebbe forſe ſtato eſpoſto a troppi pericoli; e però la natura ha voluto metterlo in ſicuro, mediante una ſpecie di borſa, nella quale ſi trova ſempre rinchiuſo. Coteſta borſa è lunga un piede, perpendicolare all' orizzonte, chiuſa nel fondo, e quivi ſempre raccomandata a radici di piante marine, ſegnatamente di alga, per cui rimane diritta; nella parte poi ſuperiore è aperta, ed è da queſta apertura che l' animale mette fuori il capo, e que' due ordini di corna. Se il mare è tranquillo, o poco agitato, ſporge immobilmente fuor della borſa, e per la varietà del colore nelle corna, e la regolare poſizion loro, ſi crederebbe più preſto un fiore, che un animale. Ma queſto fiore ſi ritira di preſente, e ſpariſce, quando l' acqua venga agitata, o la mano ſe gli accoſti per coglierlo. In quel momento adunque l' animale ſi naſconde tutto dentro la borſa, ſenza laſciar però di ricomparire, ceſſata l' agitazione o rimoſſo il pericolo. E ſe la borſa entrovi l' animale ſi ſtacchi dal fondo del mare, e ſi collochi in un vaſo pieno d' acqua con l' apertura all' insù, l' animale fa quel giuoco ſteſſo di uſcire, e di naſconderſi, come faceva nel luogo nativo. Eſtrattine alcuni dalle loro borſe, ſi vede che a proporzione che l' animale è più grande la borſa è maggiore. Queſte borſe ſono di materia molliſſima, e affatto membranoſa. Non manifeſtano ſenſo di ſorta, non oſtante che abbiano tutte le apparenze di ſoſtanza animale. Ho eſaminata la ſtruttura di alcune, e non laſcierò di deſcriverla. Qui avverto ſolo che l' animale è libero affatto dentro alla borſa, così che non ha veruna conneſſione, verun legame con eſſa, coſa ch' io non avrei mai creduta.

Non ignorate eſſervi un genere di animali chiamato *tubularie* dai Naturaliſti, per annidare nell' acque dolci o ſalate dentro a dei tubi, da' quali eſce con la parte anteriore del corpo, corredata di filamenti o cornetti. Il noſtro animale apparterrebbe mai a un tal genere? In queſta ſuppoſizione verrebbe a formare una ſpecie novella, anche per la parte del tubo a borſa, che non è di ſoſtanza cornea, come ſono quelli dell' altre tubularie.

Que' tratti marittimi, che danno ricetto al ſopra deſcritto animale, ne albergano un altro alquanto analogo ad eſſo, in quanto che anche queſto ſta dentro ad un tubo, ed ha il capo attorniato da una moltitudine di filamenti, quantunque però ſi conoſca ſubito eſſere di ſpecie affatto diverſa. Queſto con ſicurezza ſi può chiamare una tubularia, ſimile alcun poco alla rappreſentata dall' *Ellis* nella Tavola XXXIV, da lui chiamata, *corallina tubularia melitenſis* (*a*), ma che però ha caratteri eſſenzialmente diverſi, e perciò a tutta ragione ſi può dir nuova. Sentirete un ſaggio della ſua ſtoria, tanto per ciò che riſguarda i coſtumi dell' animale, quanto per ciò che concerne il ſuo organiſmo, e quello del tubo albergatore. Adeſſo non farò che darvene un cenno. Cotal tubo che è di forma cilindrica, e di ſoſtanza cornea, oltrepaſſa il piede in lunghezza, ma il ſuo diametro è di poche linee. Eſſo pure s' innalza dirittamente col foro all' insù, la parte inferiore poi alla diſtanza d' un pollice e mezzo dalla ſua eſtremità s' incurva, e fa gomito, e queſto gomito trovaſi ſempre attaccato o piuttoſto *ferruminato* ad una pietra, che ſerve al tubo di fermo ſoſtegno per non cadere. Eſſendo l' acqua in moto o nel mare o dentro d' un vaſo, il foro del tubo appariſce vuoto, ma ceſſata l' agitazione ſi vede riempierſi da un corpo, che a poco a poco ſi ſolleva ſopra di eſſo; e che dall' allargarſi ſuperiormente che fa, richiama alla mente l' idea d' un pennello, il cui manico in certa guiſa rappreſentato viene dal tubo iſteſſo. Il pennello ſi fa ſempre più largo per diſopra, a tal che arriva ad acquiſtare il diametro di quattro pollici. Così a noi ſi rappreſenta quel corpo animato uſcito dal tubo, e riguardato di faccia; ſe poi ſi miri in profilo, il pennello rimane come diviſo in cinque minori, punta a punta vagamente inſieme conneſſi. Ma ſi cagiona egli qualche nuova ſcoſſa nell' acqua? Sul momento ſi perde di viſta queſto gradito ſpettacolo, precipitatoſi, e ſeppellitoſi nel tubo il pennello, di dove prima era uſcito. E' l' animale, come voi ben vedete, che dal venir fuora crea agli occhi noſtri quell' inaſpettata piacevoliſſima ſcena, che le prime volte che mi ſi offerſe non potea ſaziarmi di rimirarla. Il pennello non vien compoſto di corna, come nell' altro animale, ma di fila ſimili in certo modo alle penne, in quanto che ogni filo va guernito di un doppio ordine di barboline.

Anche queſto animale non è punto attaccato al tubo. Ne

(*a*) L. c.

ho argomenti i più ſicuri, i più deciſivi. Se ne venga tolto, e così nudo ſi riponga nell' acqua, non laſcia di riſare il pennello, ſenza però muoverſi di luogo. Solamente ſi allunga, e ſi accorcia, preſſo a poco come l'altro animale. E' di fibra molto irritabile, ed ha qualche ſomiglianza, anche per la grandezza, con le mignatte. Ve ne ſono però de' più grandi, e de' più piccioli, e la mole del tubo è ſempre proporzionata a quella dell' animale che dentro vi abita.

Le ricerche ch' io faceva attorno a que' granchietti, denominati volgarmente *bernardi eremiti*, de' quali più ſotto dovrò parlare, mi fecero ſcoprire un terzo animale, che come i due antecedenti a me parve nuovo. Cinque individui adunque della medeſima ſchiatta erano tenacemente aderenti al guſcio d' un murice, la cui nicchia interna era occupata da uno di queſti piccioli granchi. Quando il guſcio mi fu recato da' peſcatori, era più di mezz' ora che ſi trovava fuor d' acqua, e allora ciaſcheduno di queſti individui rappreſentava un cono troncato, la cui baſe del diametro all' incirca d' un pollice era come incollata al ſuddetto guſcio. Ripoſto queſto guſcio nell' acqua non indugiarono i cinque coni troncati a preſentarmiſi ſotto un aſpetto novello. La parte adunque troncata del cono ſi allargò di vantaggio, e venne a formare un piano circolare, da cui ſpuntò un eſercito di molli cornetti pieghevoli di varia grandezza, come dal capo d' una lumaca ſpuntan le corna. Su quel piano apparivano altresì due fori, uno centrale, e l' altro laterale. Oltracciò queſto piano vedevaſi a fior di pelle tutto gremito di ſifoncini, i più de' quali s' imboccavano con le picciole corna. Queſte poi erano turgide d' acqua marina, come ſi vedeva dal premerle, giacchè allora una porzione entrava ne' ſifoncini, e un' altra ſotto forma di zampilletto uſciva per l' eſtremo delle corna, per eſſer quivi ſottilmente forate; e guſtandolo non ſi poteva negare che quel liquido foſſe acqua di mare. Comprendevaſi adunque come mediante un tal meccaniſmo ricevono queſti curioſi animali l' acqua marina dentro di loro. Tutti queſti fenomeni cadevano ſott' occhio o quetaſſe il murice, o per opera del rinchiuſo eremita veniſſe recato da luogo a luogo. Ma toccando col dito gli animali, o movendo fortemente l' acqua, di preſente ſi naſcondevan le corna, ſi perdeva quel piano circolare, ed ogni individuo ripigliava la figura d' un cono troncato. Queſti viventi ſembrano eſſer fatti dalla natura per rimanere ſempre attaccati al medeſimo ſito. Nel tempo almeno ch' io gli ho tenuti nell' acqua de' vaſi, non hanno mai laſciato quel morto teſtaceo.

Ma non erano eglino ſoli che ne occupavano la ſuperficie. I ſiti vuoti rimanevano riempiuti da un eſercito infinito di animaletti, tanto che baſta diſcernibili dall' occhio nudo, ma aſſai più chiari, contemplandoli alla lente, così fitti, così addenſati ſu quel teſtaceo, che di più eſſer nol ponno i peli che ſorgono dalla pelle d' un cane o d' un gatto. La lunghezza de' più grandicelli era di tre linee, quella de' più piccioli di una linea dimezzata. La loro traſparenza permetteva di eſpiarne le interne viſcere. Ho adunque potuto eſaminarli, e deſcriverli come conveniva. L' eſtremità inferiore d' ogni animaletto era radicata ſul nicchio, la ſuperiore, in cui ſcorgevaſi la bocca, era rivolta all' insù. Se il nicchio veniva eſtratto dall' acqua, o laſciandovelo dentro ſe queſta fortemente ſi agitava, gli animaletti contraendoſi ſubito in ſe ſteſſi s' impicciolivano; diverſi cornetti poi, che a guiſa di corona attorniavano le parti ſituate al di ſotto della bocca, s' internavano, e naſcondevanſi dentro del corpo. Non ho potuto ſapere come moltiplicano queſti minuti viventi, per non averli veduti che quella volta ſola. Mi ſono però accorto che tagliandoli a brani, riproducono le parti mancanti, e che tal riproduzione ſi ha prontiſſimamente. Mi hanno offerto un altro fenomeno che non debbo tacervi. Al corpo di parecchi ſi vedevano attaccate delle veſcichette. Queſte alla lente oſſervate ſi ſono traſmutate in tanti uteri con dentro i feti ſemoventi. Queſti feti non indugiavano a romper l' utero, e ad uſcirne, dandoſi a nuotare liberamente nell' acqua. La ſingolariſſima maniera, onde nuotano queſti animalini, e l' interiore loro conſormazione, crederò due coſe degne d' eſſere riferite. Ma queſti uteri come ſi trovano aderenti al corpo di quegli altri numeroſiſſimi viventi? In origine appartengono forſe eſſenzialmente ad eſſi, ovveramente ſono produzioni paraſſitiche?

§. XI.

Moto progreſſivo ne' Ricci marini.

Parrà forſe ſtrano a taluno ch' io mi occupi di queſto argomento , per eſſere ſtato trattato da due prodi Naturaliſti, *Reaumur*, e *Jano Planco* , per tacere di alcuni altri non incelebri Autori, quaſi che io qui null' altro far poſſa che ridire unicamente il già detto . Ma per queſto appunto che i ſoprammentovati Fiſici ne hanno parlato , imprendo a parlarne io pure; giacchè non convenendo eſſi ſu di un tal punto , anzi eſſendo l' uno diametralmente oppoſto all' altro , credo opportuno l' entrare io a terzo nella queſtione , ſu la luſinga che per le mie oſſervazioni poſſa rimaner deciſa per ſempre. Si ſa che i ricci marini ſono croſtacei di forma globoſa , armati di ſpine ; e ſi ſa egualmente dai conoſcitori , che quando ſono nell' acqua caccian fuora , e ritirano a lor piacimento una portentoſa copia di corna lunghe e carnoſe . Secondo il *Reaumur* ſono le ſpine che ne' ricci marini fanno le veci di gambe. Le corna poi, ben lungi dal concorrere ai loro movimenti, ſervono a fiſſarli a que' ſiti dove vogliono, e quaſi ad ancorarli. Vuole per l' oppoſito *Jano Planco*, che delle ſpine non ſi ſervano punto queſti animali per andare , ma che l' efficiente ed unica cauſa de' progreſſivi loro movimenti ſieno le corna . E tutti e due recano in mezzo dei fatti da loro ſul Mediterraneo veduti (*a*) . Se mi è lecito però l' inframmettere qui il mio ſentimento , dirò che queſti fatti ſono troppo pochi per decidere o per l' una parte o per l' altra . I nominati chiariſſimi Naturaliſti hanno detto in que' brevi loro racconti qualche coſa di vero, ma non hanno detto tutto quel vero che abbiſognava per chiarire pienamente la coſa. A conſeguir ciò vi voleva più ozio ſul mare, maggior copia di ricci da ſperimentare, e tentativi più ripetuti,

---

(*a*) Mem. de l' Acad. 1712 Atti dell' Accad. di Bolog. T. V. Par. I. Ambedue queſti Autori hanno inſtituite le loro oſſervazioni ſu la ſpecie medeſima di ricci marini , che è ſtata pure eſaminata da me.

tuti, e più variati. E tenendo dietro a quanto ſu tal materia hanno eglino pubblicato, appariſce che tali circoſtanze ſono loro mancate. Diviſai adunque di fare io ciò che non hanno potuto far eſſi, e preſſo i Fiſici mi riputerei degno delle maggiori riprenſioni, ſe a ſommo ſtudio cercato non aveſſi di levare ogni controverſia, per eſſermi trovato in un luogo che non poteva di più abbondare di ſomiglianti croſtacei. Io qui però null' altro farò che accennarvi alcuni de' precipui miei riſultati, riſerbandomi poi nel mio libro a farvene ſentire le pruove.

I ricci marini ſono ſtati da me ſperimentati ora fuori dell' acqua, giacchè avea veduto che ci poſſono vivere per qualche tempo, ora dentro di eſſa. Parlerò prima di quanto ho oſſervato fuor d' acqua. Se adunque ſi collocano freſchi ſopra d' un piano orizzontale aſciutto con la bocca all' ingiù, cioè a dire in quella ſituazione che è loro naturale quando vanno nel mare; allora o non ſi muovono punto di luogo, raggirandoſi ſoltanto lentamente una o due volte attorno a ſe ſteſſi, e ciò anche di rado; o ſe ſi muovono progreſſivamente, ſanno pochiſſimo viaggio, come d' uno o di due pollici, poi del tutto ſi arreſtan per ſempre. Se poi ſono capovolti, così che la bocca ſia rivolta all' insù, e il podice, che giace nella parte oppoſta, ſia volto all' ingiù, allora i ricci d' ordinario nè punto nè poco ſi muovono. Ma udite un fenomeno veramente ſtrano. Se con ſezione perpendicolare al diametro che termina alla bocca, e al podice ſi tagli il riccio in due emisferi, e ſe l' emisfero fornito di bocca ſi metta ſul medeſimo piano in quella poſtura che ha il riccio quando va nell' acqua, allora queſto emisfero non indugia a muoverſi, e a trasferirſi alla diſtanza di molti e molti piedi dal ſito dove prima ſi era poſto. Nè credeſte voi già che queſto foſſe un caſuale avvenimento. Avrò fatta la pruova ſopra ſeſſanta di queſti emisferi, nè vi è ſtato pur uno che fatto non abbia qualche conſiderabile viaggio. Vi dirò di più. Que' ricci che eſſendo intieri, erano immoti, ſe nel modo già detto ſi dividevano in due emisferi, quello che aveva la bocca, cominciava di ſubito a muoverſi localmente. Univerſalmente poi gli emisferi corredati dell' ano non davano quaſi mai il più picciol paſſo. Ma quale può mai eſſer la cagione di così fatte apparenti bizzarrie? Non ho laſciato di rintracciarla, nè laſcierò a ſuo tempo di dirvene quel ch' io ne penſo. Frattanto mi conviene farvi ſapere, che que' picciolisſimi viaggi ne' ricci intieri, e que' grandemente più lunghi ne' ricci dimezzati ſi eſeguiſcono tutti col miniſtero delle ſpine, ſenza che mai vi concorrano punto le corna; che anzi queſte corna, eſſendo i ricci fuor d' acqua, non appariſcono punto, per eſſere allora ritirate dentro al croſtaceo. Ho ſtudiato con quale meccanica operano le ſpine tali movimenti.

Reſta ora a narrare i riſultati dei ricci ripoſti nell' acqua. Per veder nettamente quanto accade in loro, è ottima coſa lo ſperimentarli ſul fondo piatto di un bacino di majolica bianca. Subito adunque che tal fondo reſta coperto da un ſottile ſtrato di acqua, il riccio mette fuori le corna, le muove, e le agita in varj ſenſi, ma ſenza che gli diano il minimo ajuto per muoverſi localmente. Nel tempo che agita le corna, agita anche le ſpine, e mediante queſte ultime fa alquanto girare attorno a sè il corpo, ma quaſi mai non lo reca da luogo a luogo, o ſe ve lo reca, picciolisſimo è lo ſpazio traſcorſo. Se lo ſtrato d' acqua è più groſſo, allora le ſpine non ſi muovono più, ma ſibbene le corna, e dall' azione di queſte corna naſce il traſporto dell' animale. Che ſe aggiungaſi nuov' acqua, talchè lo ſtrato ſia alto mezzo pollice, l' azione delle corna ſi rende maggiore, anche per le corna che prima non agivano, e che adeſſo agiſcono; e in conſeguenza il riccio cammina ſul bacino con accreſciuta celerità, e ſempre independentemente dalle ſpine. E' una maraviglia il vedere più centinaja di corna impiegate co' moltiplici, e diverſificati lor movimenti a traſportare da luogo a luogo quella macchinetta animata. Ho con attenzione oſſervati queſti movimenti, e ne riferirò le varie circoſtanze.

Il muoverſi de' ricci per via delle corna è diverſisſimo dall' altro per via delle ſpine. Il moto cagionato dalle ſpine, qual ch' egli ſia, faſſi a picciole ripreſe; quello che prodotto viene dalle corna è continovato. Di più quello dura pochisſimo tempo, queſto ſeguita per molto. Se il catino abbia pareti alte e verticali, e riempiuto ſia d' acqua, il riccio con facilità ſomma s' inerpica ſu per le pareti, e giunge fino al pelo dell' acqua, anzi più volte ſporge da eſſo con parte del corpo, e quivi arreſtaſi, e poſa. Altre volte poi dopo l'avere alquanto poſato, diſcende fino al ſondo del vaſo, oppure fa varj giri or alti or baſſi attraverſo alle ſue pareti. E queſti diverſi, e talor contrarj movimenti ſi eſeguiſcono egualmente bene dal riccio ſpogliato delle ſue ſpine raſente il corpo. Le corna oltre al traſportarlo da luogo a luogo, lo fiſſano anche dove a lui piace, e ciò mediante un glutine gemente dalle loro eſtremità, in grazia del quale rimane attaccato e ſoſpeſo alle pareti verticali de' vaſi, malgrado il contrariante ſuo peſo. Se un riccio dividaſi in due emisferi, come ſi è detto di ſopra, e tutti e due ſi mettano nel fondo dell' acqua con la conveſſità all' ingiù, l' emisfero che ha la bocca ſi muove quaſi come ſe foſſe un riccio intiero, facendo ſempre uſo delle corna, e non mai delle ſpine; l' altro emisfero che ha l' ano non laſcia di metter fuori le corna, ma quaſi ſempre reſta immobile. Che ſe un intero riccio venga capovolto, facendo l' ano andar di ſotto, e la bocca di ſopra, allora non va niente o quaſi niente, ma cerca ſoltanto di rivoltarſi, e di ripigliare la primiera naturale poſitura, preſſo a poco come ſuol fare una teſtuggine roveſciata, e purchè il riccio ſi trovi in un fondo ſufficiente d' acqua, vi rieſce mirabilmente col miniſtero delle ſole corna. Lo ſteſſo accade ſe in vece di metterlo ſupino ſi collochi di fianco. La meccanica che opera queſti raddrizzamenti del corpo è qualcoſa di ſingolare, e vuole eſſer deſcritta.

Ma contentato io non mi ſono di eſaminare i noſtri ricci dentro a' vaſi, ho voluto anche eſaminarli nel mare, ſcegliendo a bella poſta que' luoghi, il cui fondo per la ſcarſezza grande dell' acqua ſi vedeva chiariſſimamente. Sebbene quanto ai loro moti, le cauſe erano pure le ſteſſe; e vo' dire che o moveſſero ſul fondo del mare, o ſu qualche ſcoglio, il principio efficiente di tai movimenti erano d' ordinario le corna, e di rado vi concorrevan le ſpine.

Da queſti miei riſultati, che per appoggiarſi ad una immenſità di eſperienze ſono ſicuriſſimi, ſi fa chiaro ciò che debba dirſi intorno ai ſentimenti fra loro contrarj di *Jano Planco*, e del *Reaumur*. Aveva ragione il primo, quando ammetteva che le corna ne' ricci marini faceſſer l' ufficio de' piedi; ma aveva il torto, volendo affatto eſcludere da tale uſſicio le ſpine. Il ſecondo poi s' ingannava a partito, ſtabilendo che le ſpine foſſero le ſole motrici dei ricci, e che le corna non faceſſero che tenerli fermi. Si eſamineranno le poche oſſervazioni recate in mezzo da queſti due chiariſſimi Naturaliſti per ſoſtenere ciaſcheduno la propria opinione, e ſi moſtrerà come la ſcarſità di queſte abbia potuto indurli in errore.

Ma le maniere praticate da' ricci marini per recarſi da luogo a luogo dentro del mare non ſono ſtate l' unico oggetto di mie ricerche. La loro soprabbondanza in que' luoghi dov' io mi trovava, l' agio grande di poterli oſſervare, e diciam anche il pochiſſimo che intorno ad eſſi è ſtato ſcritto, erano motivi per me troppo forti, onde cercare di apprendere nuove notizie da loro. I ſiti adunque marittimi dove amano ſoggiornare queſti croſtacei, gli alimenti che prendono, come ſi mettono al ſicuro nelle burraſche, ſe vero ſia, come è volgare opinione, che le preſagiſcono, ſe ſono ermafroditi, oppur ſe hanno differenza di ſeſſo, quale ſia il loro organiſmo, tanto nelle parti eſterne, come ſono le corna, e le ſpine, quanto nel guſcio calcare, e nelle parti interne, ſono ſtati punti da me diſcuſſi, e chiariti. E per ciò che appartiene alla loro organizzazione, la completa decompoſizione della parte calcare, mediante un meſtruo adattato, illeſa la parte animale, mi ha dato luogo ad alcune nuove e intereſſanti oſſervazioni.

§. XII.

Moto progreſſivo in altri Animali marini.

Dovendo eſſer breve nel ragionare di un tal moto, riſtringo tutti queſti animali nel preſente paragrafo, cominciando da quello che il *Redi*, il *Valliſneri*, *Jano Planco*, ed altri chiamano *mentula marina*, giacchè quantunque queſti Autori ſi accordino nel dire che è un animale che ſtriſcia ſu i fanghi, e ſu le arene del mare, neſſuno però ci fa ſapere di quali mezzi ſi ſerva per eſeguir queſti moti. Coſtui è di forma cilindrica, la ſua larghezza arriva ad un pollice e mezzo, e la ſua lunghezza a diciotto, parlando almeno de' più grandi. Il colore ſuole eſſere cenerino, più aperto però nel ventre, e più foſco nei fianchi, e ſul dorſo. Ha due fori patenti, l' uno all' eſtremità poſteriore del corpo, che è l' ano, l' altro all' eſtremità anteriore, che è la bocca. Queſta bocca ſta ſituata nel centro d' un riſalto circolare, dal quale ſcappano, e diramanſi in giro venti cilindretti muſcoloſi, corredati in cima di quattro come foglie dentate, così che ogni cilindretto emula bellamente un fiore. Queſta mentula va provveduta d' una ſtrabocchevole quantità di papille, con queſta differenza però che quelle del ventre eſcono immediatamente dal corpo, e quelle del dorſo eſcono dall' apice di piccioli tumori fatti a imbuto. Di queſti cilindretti, e di queſte papille, che non mette fuora l' animale ſe non quando è nell' acqua, ſi ſerve egli per attaccarſi dove a lui piace, mediante un viſco che fa uſcire da loro; e un ſimil uſo era già ſtato conoſciuto dal chiariſſimo *Bohadsch* nella ſua *Idra*, qualità di animale diverſa sì nella ſpecie, ma non nel genere da quella, di cui ora favello. Ma per conto delle papille, avrebbe egli eziandio conoſciuto un altro uſo, ſe inſtituito aveſſe i neceſſarj eſami, cioè a dire di ſervirſi la ſua idra di tali papille per muoverſi progreſſivamente. Le mentule almeno da me oſſervate ſi prevalgono ſempre delle loro papille, ed in iſpezieltà di quelle del ventre per paſſare da luogo a luogo ſu i fondi del mare: quantunque poi un tal moto venga ancor ſecondato dal vario ingroſſarſi, e impicciolirſi, e allungarſi, e abbreviarſi del corpo delle mentule ſteſſe. Di quanto io qui aſſeriſco produrrò fatti i più ſicuri, i più incontraſtabili. Que' due ufficj adunque che ne' ricci marini fanno le corna, lo fanno nelle mentule marine le loro papille.

Il *Redi* dove favella delle mentule marine (*a*), oltre le notate di ſopra, che vagano liberamente nel mare, fa menzione di un' altra ſpecie, da lui denominata anche *pinco marino*, che ſta ſempre radicata a qualche corpo ſubacqueo, ſen-

---

(*a*) Degli Anim. viv. negli Anim. viv.

za mai diſtaccarſene, la quale ſpecie ſi fa ora cadere ſotto altro genere di animali, appellato *Tethyum* dal *Bohadsch*, e *Aſcidia* dal *Linneo*. Queſta così chiamata mentula dal celebre noſtro Italiano quantunque eſtranea al preſente paragrafo, per non godere della facoltà *loco-motiva*, tuttavia io qui ve la accenno, non ſolamente per dirvi che dalle oſſervazioni fattevi attorno io crederei di averne trovata una ſpecie novella, ma per notificarvi eziandio che queſta ſpecie mi è paruta appartenere ad uno di quegli eſſeri organici, ne' quali va a finire il ſenſo, e la vita.

La comodità accordata al *Reaumur* dalle coſte del Poitou, e dell' Aunis di potere eſaminare il moto progreſſivo delle ortiche di mare, è ſtata a me conceduta dal Mare liguſtico. E' notiſſimo preſſo i Naturali ſcrittori, che per ortica di mare s' intende un genere di animali molluſchi, di figura tondeggiante, corredato di corna pieghevoli, e attaccanteſi a' corpi ſubacquei (in varie ſpecie almeno) dal *Linneo* denominato *Medusa*. Se non ho trovato le ſpecie oſſervate dal citato Naturaliſta Franceſe, mi ſono però abbattuto a due altre, una delle quali io giudico nuova. Concepite un cilindro molle e carnoſo, lungo 18 linee, e largo 12, attaccato col piano inferiore a una pietra, e forato nel centro del piano ſuperiore, ſotto il qual piano ſpunti in giro dalla ſuperficie conveſſa una ſerie di 90, e talora di 95 filamenti, ed avrete qualche rozza idea della forma del corpo, della bocca, e delle corna della ſpecie di ortica ch' io non trovo deſcritta. Reſta ſempre attaccata alle pietre, e agli ſcogli ſubacquei, e allora volendola giudicare dall' occhio ſi crederebbe immobile. E' però capace di movimento progreſſivo quando vuole, e per conoſcer bene la cagione producitrice di un tal movimento, baſta attaccarla col piano oppoſto a quello dove ha la bocca (il qual piano chiamerò baſe) ai lati d' un vaſo di vetro pieno d' acqua. Siccome ordinariamente non ama queſta ortica di ſtarſi nel luogo, in cui è ſtata poſta, così per la traſparenza del vetro ſi vede come fa a mutar ſito. Supponiamo che l' ortica voglia venir giù per le pareti del vaſo. La porzione di baſe che è più alta ſcorre uno ſpazietto all' ingiù, ſtaccandoſi dal ſito dov' era, e recandoſi un poco più baſſo, ſenza però che l' animale cangì ancora di luogo. Intanto la parte ſtaccata forma un labbro o cordone, che a guiſa di placida onda s' inoltra nella baſe, andando ſempre dall' alto al baſſo, e in tal maniera ſi tira anche dietro l' animale: quando poi il cordone è giunto alla parte ima della baſe, ſiccome allora va innanzi per un picciol tratto, così per un picciol tratto diſcende pur l' animale, e queſto ſi può dire il primo paſſo ch' ei fa. Per farne un ſecondo non ha che a ripetere la meccanica di prima, e così dicaſi del terzo, del quarto paſſo, ecc. Comechè queſte ortiche per andare ricorrano il più a un tal mezzo, non è però che in certe circoſtanze non ne pratichino qualche altro, come ſi è quello di aver ricorſo alle corna, quaſi convertendole in piedi, oppur l' altro che è più ſingolare, cioè a dire di ſtaccar la baſe dal ſito dove impiantavaſi, e allungando il corpo di ſpignerla più in là, ed attaccarla di nuovo, accorciando in ſeguito il corpo coll' accoſtarlo alla baſe, venendo a fare in tal guiſa un paſſo a ritroſo; e ripetuta la medeſima operazione giugnendo a farne un ſecondo, poi un terzo ecc., e per tal modo recandoſi da luogo a luogo con movimento retrogrado.

L' altra ſpecie di ortica marina da me oſſervata ſembrami eſſere quella ſteſſa che accenna *Jano Planco*, e che paragona a un garoſano (*a*). Certamente queſto animale quando è pienamente ſpiegato, ed ha fuori le corna ſomiglia ad un fiore, ma in quel caſo, eſſendo tutto rubicondo, lo comparerei piuttoſto a quello d' un melagrano. Che che ſiane però, neppur queſta ortica è mai vagante nel mare, ma è ſempre attaccata a qualche corpo ſtabile. Per gl' innumerabili cangiamenti di figure che prende ſi può chiamare un vero Proteo. Mi è piaciuto di oſſervare con qualche minutezza queſti cangiamenti, e notati ne ho i principali. Tratti diverſi individui di queſta ortica dal mare, e attaccati alle interne pareti di un vaſo di vetro pieno d' acqua, ſiccome fatto aveva nell' altra, accorto mi ſono ch' ella ama di rimanerſi a lungo fiſſa ſul medeſimo ſito. Non è per queſto però che non ſi muova progreſſivamente quando a lei piace; ma per diſcernere cotal mo-

---

(*a*) De Conch. min. not.

to, e come ſi eſeguiſce, gli è d' uopo ricorrere alla lente. Volendo a cagion d' eſempio diſcendere dal vaſo l' ortica, ſpinge avanti con infinita lentezza quella porzione di baſe del ſuo corpo, non già che è in alto ſiccome ſi è veduto nell' altra ortica, ma che è al baſſo, alla qual porzione tien dietro con pari lentezza il rimanente della baſe, e conſeguentemente del corpo, e così l' ortica traſportaſi al baſſo per uno ſpazietto arcipiccoliſſimo. Iterando l' operazione, viene ella a ſcorrere un ſecondo ſpazietto eguale al primo, e nella medeſima maniera ne deſcrive altri e poi altri. Ma eſſendo queſti ſpazietti, ſiccome io diceva, breviſſimi, quindi è che traſcorſo l' intervallo d' un' ora, appena è giunta l' ortica ad aver fatto un mezzo pollice di cammino. L' altra ortica è men pigra a muoverſi progreſſivamente. E queſto è l' unico mezzo, per quanto è a me noto, onde ſi ſtraſcica da ſito a ſito la preſente ortica.

Queſte due qualità di viventi non eſſendo ſtate da' curioſi ſtudiate, ho proccurato di ſtudiarle io, eſercitandomi ſopra tutto in quella parte che riguarda l' economia animale, ſiccome la più intereſſante. Ve ne ragguaglierò altra volta, non potendo qui però trattenermi dal favellarvi brevemente d' una coſa, che non ſolo riguarda le ortiche di mare, ma preſſo che tutti gli animali fin qui menzionati. Parlo di que' braccini, e picciole corna che ho detto ſpuntare da' loro corpi: eſſendo a voi noto che ingegni analoghi ſono deſtinati in più altri animali acquajuoli a creare col loro moto di vibrazione un tenue vortice nel fluido, impellente alla bocca dell' animale i corpicciuoli che dentro vi nuotano, è più che probabile che nata in voi ſia la curioſità di ſapere, ſe coteſti braccini, coteſti cornetti ſono fatti pel medeſimo uſo, e il mio ſilenzio ſaravvi forſe rincreſciuto. Ma io non potea nulla dirvi di un tal vortice, perchè non ha luogo nei noſtri animali. Che anzi ſe ſi eccettuano i ricci marini, le mentule, e la prima ſpecie di ortica, le corna, e le papille de' quali ſi agitano in varj ſenſi, ſenza però creare nell' acqua verun moto ſenſibile, queſte parti nel rimanente de' noſtri animali, ſpiegate che ſieno, ſi rimangono continuatamente in pieniſſima quiete. E' dunque per sè chiaro che il loro ufficio in queſte generazioni di viventi è diverſo. Quanto alle papille delle mentule, e alle corna de' ricci marini, ſi è già veduto che la loro deſtinazione è quella di far muovere l' animale, e di ancorarlo. Le corna poi delle ortiche, e quelle degli animali del paragraſo X. io ſono perſuaſo che ſieno tubi fatti dalla Natura per ricevere l' acqua marina, e traſmetterla al corpo dell' animale, ſiccome ha penſato delle ſue ortiche il *Reaumur*, e crederei di poterlo evidentemente moſtrare. Per conto poi de' filamenti penniformi della mia tubularia, e de' braccini de' polipi dei piantanimali già deſcritti, io vi manifeſterò ſul loro uſo le mie congetture.

Oltre alle ortiche che ſembrano fiſſe, parla il *Reaumur* di alcune altre, che chiamano *erranti*, per trasferirſi, nuotando, da luogo a luogo nel mare. Queſte imitano la forma di un fungo a ombrello capovolto, del diametro talvolta di due piedi: hanno la conſiſtenza, o a dir meglio la tenerezza di una gelatina, e per poco che ſi tengano fra mani ſi ſciolgono in acqua. L' ombrello che è conveſſo al di fuora, e concavo dentro, è dotato d' un moto alterno di reſtrizione, e di dilatazione, emulante quello di ſiſtole, e di diaſtole, e mediante queſta ſiſtole, e queſta diaſtole nuota l' animale, ed erra nel mare.

Queſta nobile oſſervazione, che è tutta del ſopraccitato illuſtre Accademico, l' ho verificata con piacere in diverſe ortiche erranti. Sonomi ſopra tutto trattenuto a contemplare quella ſpecie di ſiſtole, e di diaſtole, e tra alcune particolarità che riferirò, ho ammirato che un tal moto reciproco dura nell' ortica da tre quarti d' ora cavata dall' acqua marina. Ho veduto di più che il ſuddetto moto pare che ſia l' unico argomento che queſto ſtrano eſſere ha vita, giacchè irritandolo, ferendolo, tagliandolo a pezzi, non dà egli il più picciolo indizio di ſenſo o di moto. Per altro le mie ortiche erranti quantunque laſciate in aſciutto ſi ſciolgano a poco a poco preſſochè tutte in acqua, ſono ciò non oſtante ben lontane dall' eſſer tenere a guiſa di gelatina, come ſi erano quelle che oſſervato aveva il *Reaumur*. Hanno anzi una ſodezza, che è di mezzo tra la membrana e la cartilagine. Quando ſi ſcompongono, e ſi ſciolgono, traſmutanſi in un foſforo nobiliſſimo.

Nelle ſue ricerche ſu le ortiche tanto fiſſe, quanto erranti eſamina il *Reaumur* ſe vero ſia, che toccando queſti animali producano in noi quel moleſto prurito, che produce la pianta che porta un tal nome, ſiccome hanno ſcritto gli antichi, i quali per queſto appunto gli hanno caratterizzati col nome di *ortiche*. Quantunque però egli non ſi opponga direttamente a un tal ſentimento, afferma tuttavia che le ortiche ſperimentate da lui non hanno mai cagionato un ſimile effetto. Era troppo naturale che anche ſu di un tal punto ſoddisfar volea la mia curioſità. Senza però dar torto al Naturaliſta Franceſe, dirò che gli antichi Filoſofi non ſi erano ingannati. Vero è che qualche ortica marina, per quanto venga da noi toccata, e ſtropicciata, ſi trova innocente. Tale ſi è quella che ho paragonata ad un fiore di melagrano. E tali ſicuramente ſtate ſaranno le cimentate dal *Reaumur*. Ma è ben diverſa l' altra ortica a figura cilindrica, corredata di 90 corna all' incirca. Vo' adunque dire che ſe queſta a toccar venga qualche parte dilicata del corpo, come ſarebbe il collo, oppure il volto, produce effetti a quelli dell' ortica niente inferiori. L' ho provato replicatamente in me ſteſſo, e ve ne particolarizzerò le conſeguenze, come altresì la cagione efficiente e immediata che le produce. Ed è ben credibile che queſta ortica marina non ſia la ſola a poſſedere tal rea qualità.

§. XIII.

Picciol granchio, denominato Bernardo l' Eremita

Anche in una ſingolarità di queſto curioſo animale non ſi accorda con la veneranda antichità uno de' più grandi Naturaliſti del ſecolo. Fino a' tempi di Ariſtotele fu detto, ed è poi ſtato ripetuto da cento altri, che una ſpecie di granchietto marino per avere la pelle dell' abdome non già dura e croſtoſa, come quella degli altri ſuoi ſimili, ma molliſſima e dilicatiſſima, va a naſconderſi e a vivere dentro alla prima chiocciola vuota che trova; dal che ha poi tratto il nome di *Bernardo l' Eremita*, per la profonda ſolitudine nella quale vive là dentro. Queſta antichiſſima opinione, che anche oggigiorno non laſcia di avere i ſuoi ſeguaci, è ſtata fortemente impugnata col valido mezzo della notomia dallo *Swammerdamio*, la cui autorità ſola in ſomiglianti materie può valere per mille. Egli adunque pretende che la conchiglia oſſia il nicchio, dentro cui alloggia queſto picciol granchio, non è ſtato altrimenti da lui uſurpato, ma è ſuo proprio, in quella guiſa medeſima che è loro proprio il nicchio degli altri teſtacei. Concioſſiachè a quel modo che il nicchio di queſti rimane attaccato, e come immedeſimato al loro corpo per via di produzioni tendinoſe; così mediante un ſimil legame queſto granchietto ſi trova attaccato, e come incorporato al nicchio, dentro cui ſoggiorna: nè laſcia l' Olandeſe Naturaliſta di aſſegnare il ſito preciſo di queſto attaccamento, facendo nel tempo ſteſſo le maraviglie come tal coſa non ſia ſtata da altri oſſervata. Quel fatto adunque che dai Naturaliſti ſi ammetteva per ſicuriſſimo, viene per lo meno con queſta oſſervazione a renderſi incerto, e dubbioſo, e l' incertezza e il dubbio ſi accreſcono da un' altra oſſervazione del medeſimo celebre Fiſico, la quale ſi è che quegli tra noſtri granchietti, che ſono della medeſima ſpecie, ſi trovano ſempre rinchiuſi in conchiglie fra loro conſimili.

I ſiti del golfo contigui alla terra, e poveri d' acque formicolano di una immenſità di bernardi eremiti. E come dunque non dovevano invogliarmi ad entrare io pure in queſta diſamina, per accertarmi co' proprj occhi ſe le ragioni moſſe dallo *Swammerdamio* veramente ſuſſiſtono? L' ho fatto effettivamente, quantunque poi allettato dalla materia contentato io non mi ſia di queſto ſolo, ma ho voluto eſtendere le mie ricerche più in là, coll' indagare ciò che ſi oſſerva di più curioſo, e più importante intorno agli andamenti, e alla vita di queſti minuti croſtacei, tanto allorchè ſi trovano nel natio loro elemento, quanto ogni qualvolta ne ſono fuora; come pure ciò che loro accade, facendoli uſcire del guſcio, e riconſegnandoli all' acqua, oppur tenendoli in terra; a far breve ingegnato io mi ſono di abbozzare la naturale loro ſtoria, che aſſolutamente mancava. Della quale ſtoria però per amore di brevità non farò qui punto parola, ma accennerò ſoltanto alcuni fatti, da cui apparirà, come mi luſingo, che il più volte lodato Olandeſe da una ſeducente apparenza è ſtato indotto in errore. Primieramente quantunque i bernardi eremiti da me oſſervati foſſero tutti della medeſima ſpecie, non lo erano però le conchiglie albergatrici, che anzi bene ſpeſſo ſi ſcorgevano di genere fra loro diverſiſſimo. In ſecondo luogo quelle conchiglie della ſteſſa ſpecie, o di ſpecie diverſa che in un ſito del mare allogavano dentro loro queſti granchietti, in altro ſito le medeſime contenevano dentro vivo il loro animale. Da queſti due fatti chi non vede adunque che di quelle conchiglie ſi erano impadroniti i noſtri granchietti, per eſſere rimaſte vuote per la morte de' naturali loro animali? La qual verità viene a renderſi più manifeſta e palpabile dalla conſiderazione di queſte medeſime conchiglie, dentro cui annidavano i noſtri piccioli Diogeni, altre delle quali ſi oſſervavano logore, e talvolta in più d' un luogo bucate, altre nella ſuperficie eſteriore ſpogliate della liſcia loro corteccia, altre mancanti d' un terzo, ed anche della metà della parte ſuperiore. Finalmente non tutti queſti granchietti erano abitatori delle conchiglie, ma ne trovava pur diverſi della ſteſſa ſpecie rincantucciati o negli ſcrepoli degli ſcogli ſubacquei, o in alcuni pezzetti di canna, gittati o caduti a caſo nel mare, e immerſi in parte nel fango, o infine nei fori delle pietre, prodotti da' vermi litoſagi.

Ma come dunque conciliar queſte mie oſſervazioni con l' altre dell' Olandeſe Anatomico, per cui ſi ricava la forte adeſione di queſti granchietti col nicchio che li rinſerra? Rifletto primamente che i ſuoi eſami ſono ſtati inſtituiti intorno a queſti animali, eſſendo già morti, e conſervati da qualche tempo nello ſpirito di vino. Rifletto ſecondamente che per atteſtazion ſua non tutti, ma alcuni ſoltanto ſi vedevano attaccati al guſcio verſo la metà del loro corpo (*a*). Ho voluto cavarmi la curioſità d' immergere nello ſpirito di vino diverſi di queſti croſtacei quando eran vivi, e dopo più giorni d' immerſione avendoli eſtratti, ed eſpiati dentro al loro guſcio, ho trovato preſſo a poco quanto dice lo *Swammerdamio*. Alcuni adunque per quella protuberanza ſteſſa, e che è poſta verſo la ſommità dell' abdome (la qual protube-

---

(*a*) Bibl. Natur.

ranza è per lui il ſito che lega l' animale al guſcio) ſi vedevano attaccati all' interno del guſcio ; ma eſaminando bene quell' attaccamento , dava eſſo chiaramente a conoſcere, che non proveniva già da alcuna appendice tendinoſa o muſculoſa, ma bensì da un ſuco alcun poco viſcido , ripoſto ſu quella protuberanza, il qual ſuco probabilmente era ſcaturito da lei. E di vero ſe quell'attacco derivaſſe da muſcoli o tendini, come non dovrebbe manifeſtarſi più chiaramente in queſti animali quando ſon vivi ? Eppure niente di queſto ſi oſſerva. Ho rotto con ſorti mollette una infinità di queſti guſci per la parte della loro apertura oſſia bocca , ſtaccandone a poco a poco dei pezzetti, finchè arrivava al naſcoſto granchietto , e a quella protuberanza carnoſa , ſenza che abbia mai queſta trovata una ſola volta attaccata al guſcio . Solamente per eſſere queſta particella più riſaltante dell' altre vedevaſi in maggior contatto col medeſimo guſcio ; e queſta probabilmente è la ragione per cui dopo la morte del granchietto ſi trova talvolta in qualche adeſione coll' interna faccia del guſcio. Que' minuti granchi adunque, quando io andava via via per la parte ſuperiore rompendo le portatili loro caſette, erano liberi affatto dentro di eſſe: e da ciò naſceva che di mano in mano, che per i pezzetti tolti rendeva le caſette più picciole , coloro diſcendevan più baſſo , in tanto che in ultimo li trovava rannicchiati nel fondo : il che non ſarebbe accaduto ſe verſo la metà de' loro corpi ſtato vi foſſe con le caſette quel ſuppoſto tenace vincolo . Se poi in vece di rompere con le mollette la parte ſuperiore del nicchio , rompeva l' inferiore, ſenza offendere l' interno ſolitario, non indugiava egli ad uſcir per la bocca, e a fuggire, altra pruova egualmente dimoſtrativa, che egli da neſſun legame colà dentro era attaccato. Da ultimo ſe ai granchietti eſpulſi dai guſci ne offeriva dentro all' acqua degli altri già vuoti , taluno ſe ne impadroniva , e viveva nel nuovo come viſſuto aveva nel vecchio.

§. XIV.

Mitili litofagi, *vulgarmente chiamati* dattili.

Queſto marino animale non ſi dee confondere con un altro che porta altresì il nome di dattilo, e che *folade* anco ſi appella. Il guſcio del primo riſulta di due pezzi, e quello del ſecondo di tre ſenza che queſti due animali nell' organiſmo ſono affatto diverſi. Il noſtro dattilo, così forſe chiamato per avere qualche ſomiglianza con le frutta delle palme, l' ho trovato prodigioſamente moltiplicato in Iſtria vicino a Rovigno, ed ho pur veduta la ſteſſa abbondanza nel golfo della Spezia. Vien ripoſto dal *Linneo* nel genere dei mitili, e da lui chiamaſi *litofago*, quaſi *mangiapietre*, perchè ſta ſempre imprigionato dentro di eſſe. Non evvi ſcoglio o pezzo di ſcoglio ſottoſtante all' acque del golfo, che forato non ſia da queſto teſtaceo, e che non ne racchiuda ben molti. Potete immaginarvi, dottiſſimo amico, quanto un tal vivente sì poco finora eſaminato, e per la ſua ſingolare maniera di vivere tanto meritevole di eſſerlo, punto abbia la mia curioſità. Con l' eſemplo delle foladi, viventi eſſe pure dentro gli ſcogli, e che per le giudizioſe oſſervazioni del *Reaumur* ſappiamo che vi ſono entrate allorchè quegli ſcogli eran teneri, ſi preſenta come da sè la ricerca, ſe lo ſteſſo debba penſarſi de' noſtri dattili. Il contrario però è ſtato deciſo da due celebri Naturaliſti, *Vallisneri*, e *Fortis*; e ſe tuttavia intorno alla loro deciſione rimaneſſe qualche dubbietà, io ſarei al caſo di toglierla, avendo molti e irrefragabili fatti che i noſtri dattili foran le pietre già dure duriſſime. Delle tante queſtioni però che intorno ad eſſi venir poſſono in mente de' Fiſici, queſta mi par l' unica che ſia ſtata ſciolta. Se i dattili bucano gli ſcogli nello ſtato già petroſo, quale dunque ſarà lo ſtromento o il mezzo che praticano per far ciò? Si valgono forſe di piccioli denti oſſei, come fanno le brume che trivellano le tavole de' baſtimenti? O più veramente della parte anteriore del guſcio, in quanto che ſtropicciando con eſſa del continuo la pietra, giungono con l' andar del tempo a logorarla, e ad aprirla? O dobbiam piuttoſto penſare che anzi che eſſere un corpo ſolido quello che fora, ſia un corpo fluido, voglio dire un liquore ſtillante dalla bocca dei dattili, il quale eſſendo per ventura acido ſciolga a guiſa d' acqua forte le parti petroſe che tocca? Ma ſi hanno veramente prove accertate di un tal liquore, e d' altronde gli ſcogli che ne vengon forati ſono proporzionati ad eſſo liquore, cioè a dire ſono calcari? I dattili forano le pietre per mangiarle, come per un fine analogo ſi bucano i legni dalle brume, e dai tarli? Ovvero que' fori a null' altro ſon deſtinati che a dar loro ricovero, e aſilo, nutrendoſi piuttoſto di ſoſtanze animali o vegetabili introdotte là dentro dall' onde del mare? Ma quelle petroſe cellette mettono veramente all' eſterna ſuperficie dello ſcoglio, e comunicano col mare per via di qualche patente forellino? Si preſume che i dattili ſieno ermafroditi, per non trovarſene mai che un ſolo in ciaſcuna nicchia. Ma è egli dimoſtrato che queſte nicchie non s' incontrano mai? Il ſeſſualiſmo ha luogo in queſti animali? Quanto con lungo volger degli anni ſogliono eſſi internarſi nel ſaſſo? Si trovano liberi i dattili dentro alle tane, oppure attaccati ad eſſe per qualche legame? Ed avendo io trovato che ogni dattilo per via di due appendici tendinoſe, che eſcono da lui, e s' attaccano robuſtamente a due ſiti della celletta, non è quivi entro mai libero, che gli accadrà dunque ſe vengano a reciderſi queſte appendici? Che gli accadrà ſe venga tolto da quell' amato covile, e abbandonato all' acqua del mare? Si metterà egli di nuovo a forare la pietra? Nati appena che ſono i dattili, ſi danno eglino ſubito a fabbricarſi le petroſe cellette? Le foladi, e vive, e morte ſono fosforiche. Si oſſerva egli lo ſteſſo nei dattili?

Tali ſono le queſtioni che ſul mare io proponeva a me ſteſſo, col fine di promuovere la ſtoria fin qui appena cominciata di queſti animali, le quali queſtioni io vorrei credere di avere in maſſima parte levate.

§. XV.

Torpedini,

La copia di queſti peſci, che mi è riuſcito di avere ſul Mediterraneo, mi ha ſomminiſtrata la deſiderata opportunità di potere accreſcere, ed anche rettificare le poche oſſervazioni, e ſperienze ch' io pubblicai l' anno ſcorſo, riſguardanti l' elettrica ſcoſſa, e diverſi altri fenomeni che tendono a perfezionare la naturale iſtoria di queſti maraviglioſi viventi (*a*). Qui però conforme il piano propoſtomi, altro non farò che accennarvi i principali riſultati de' nuovi miei tentativi.

Il *Walsch* nella ſua prima lettera ſcritta a *Franklin*, e relativa al preſente ſoggetto, oſſerva che la torpedine volendo dare il colpo, accompagna lo sforzo che allora fa con una ſenſibile depreſſione degli occhi. Paruta eſſendomi rilevantiſſima tal circoſtanza, per venir eſſa a moſtrare che la ſcoſſa è dipendente dalla volontà dell' animale, dirovvi che non vi è quaſi ſtata volta che provato abbia la ſcoſſa, che i miei occhi non ſieno ſtati fiſamente rivolti verſo quelli di un tal peſce. Il ſegno marcato dal valente Fiſico Ingleſe mi ſi è offerto con la maggiore incoſtanza. Qualche rara volta nel momento che ſi avea lo ſcuotimento, gli occhi s' internavano, è vero, nella loro caſſa; ma altre volte per l' oppoſito ne uſcivano: più frequentemente poi ſe ne rimanevano immobili. Coteſti occhi di forma tondeggiante, quantunque piccioli, riſaltano aſſai bene dal capo. Così riſaltanti venivano da me preſi di mira fuori dell' acqua ora con l' occhio nudo ora con la lente nel tempo ſteſſo che determinava le torpedini a darmi la ſcoſſa, ma per lo più nè quando io la ſentiva, nè prima, nè dopo, non appariva in eſſi il più picciol moto, la più picciola mutazione.

E' ſtato da me altrove notato (*b*) che in una torpedine, finchè

(*a*) Queſto primo Saggio di oſſervazioni, e ſperienze intorno all' elettricità delle torpedini è contenuto nella lettera da me accennata ſul principio della preſente.

(*b*) L. c.

finchè ſi mantenne vigoroſa, la ſcoſſa andò ſempre congiunta ad una notabile agitazione del corpo. In queſte mie nuove oſſervazioni ho pur veduta in qualche altra torpedine la ſteſſa coſa. Ma neppur queſto ſi può chiamare un ſegno o indizio univerſale e coſtante. Speſſo egli accade che maneggiate ſi agitano nel modo ſteſſo, ma innocentemente; e con pari frequenza addiviene altresì che reſtiam da eſſe colpiti, ſenza che ſenſibilmente ſi muovano.

Venivano da me aſtrette a ſtarſi in maniera, che eziandio volendolo non potevano muoverſi o agitarſi nè punto nè poco: eppure non laſciavan per queſto di ſcuotermi potentemente la mano, e il braccio, e ciò a replicate riprese. La ſcoſſa dunque non ha nota alcuna o ſegnale del corpo, viſibile almeno, che ce la poſſa indicare. E' però ſubordinata alla volontà, e quaſi direi al capriccio dell' animale. Di due torpedini peſcate ad un tempo, d' egual vigore, e grandezza, l' una talvolta per quanto ſia brancicata, anzi punta, e ferita (non oſtante che queſti ſieno, come vedremo, mezzi efficaciſſimi per conſeguire le ſcoſſe) non ſarà mai che ſi determini a darne pur una: quando l' altra toſto che preſa venga tra mani ne ſcaglia ben molte. Avverrà eziandio che taluna dopo l' eſſerſi moſtrata ſorda a qualunque ſtimolo, qualche tempo appreſſo rimaneggiata, vibra il colpo.

La mano purchè d' un pelo ſia diſtante dalla torpedine non ſoffre punto. Qui il contatto è aſſolutamente neceſſario. Sebbene ſoventemente neppur queſto baſta, ma vi ſi richieggon gli ſtimoli, anzi le ferite. Il più delle volte adunque le torpedini che ſemplicemente toccate non danno commozione di ſorta, ſi obbligano a darla premendole con la mano, e ſtuzzicandole: e con tai mezzi ſi aſtringono pur qualche volta a vibrarla quelle di nuovo, che ceſſato aveano dopo l' eſſere ſtate replicatamente tocche. Le punture in fine, e molto più i piccioli tagli fatti qua e là agli organi elettrici ſono ſtimoli potentiſſimi per richiamare le ſcoſſe, in quelli eziandio tra noſtri peſci che, per eſſer reſtati lungamente fuori dell' acqua, perduta hanno buona parte del lor vigore: e ſe la punta delle ſorbici o del coltello ſeguirà così a tormentarli, ſeguiranno eziandio le ſcoſſe, e queſte fortiſſime, a farſi ſentire. Proſeguendo in tal guiſa, e non interrottamente, a malmenar gli organi, giunto ſono a numerare 23 ſucceſſive ſcoſſe, ſenza che l' ultime parute mi ſieno meno violente delle prime. L' ammaccamento dei detti due organi fatto dalla gagliarda compreſſion delle mani produce però il medeſimo effetto, e queſto effetto dura finchè non ſieno conſiderabilmente ſchiacciati, che allora le ſcoſſe, prima alla mano moleſte, ſi fanno picciolisſime e quaſi inſenſibili.

Sembra eſſer regola non ſoggetta a eccezioni che l' intenſità della ſcoſſa ſta in ragione diretta della grandezza dell' animale. Sta eziandio in ragione del vigore del medeſimo, purchè quella non ſi ecciti per via di qualcuno dei ſoprammentovati ſtimoli, che allora un individuo eſtremamente illanguidito può renderſi abile a dar colpi fortiſſimi. Se l' individuo però col ridonarlo al nativo elemento ripigli le forze primiere, che perdute avea col tenerlo fuori di eſſo, ſi ripriſtina in lui la naturale attitudine per le ſcoſſe.

Diſſi già altrove, ed altri detto lo avevano prima di me, che quelli che chiamati hanno *muſcoli falcati* della torpedine, e più acconciamente *organi elettrici*, ſono la ſede verace della ſcoſſa. Ma queſta è ella egualmente forte per tutto? Ho trovato che è maſſima, dove è maſſima la groſſezza degli organi, e in conſeguenza vicino alle branchie. Scema ella poi di forza in ragione che ſcema tale groſſezza. Quindi al lembo dei medeſimi è minima.

Se la faccia inferiore degli organi venga toccata da una mano, e la faccia ſuperiore dall' altra, frequentemente la ſcoſſa o ſi prova ſoltanto per diſopra, o provandoſi ancor per diſotto, quivi è minore. Se poi la faccia inferiore ſi freghi o in altro modo s' irriti nel tempo che la ſuperiore ſolamente ſi tocca, la prima ad eſcluſione della ſeconda ſuol dare la ſcoſſa (*a*). In entrambi i caſi però ſuccedono delle irregolarità, delle apparenti ſtranezze che crederò degne di riferire nella mia Opera. Quando poi la ſcoſſa ſi ottiene da ambedue le faccie, ſenteſi ſempre nel medeſimo punto di tempo.

Ma qui cadevano due ricerche, a mio avviſo, importantiſſime. Si ha la ſcoſſa, toccando una ſola faccia? Toccando

---

(*a*) Per faccia inferiore s' intende quella che corriſponde al petto, e per faccia ſuperiore quella che corriſponde alla ſchiena.

contemporaneamente i due organi, ſuccede egli che la ſcoſſa ſi provi da un ſolo? Quanto al primo, io riſpondo affermativamente: ſoltanto aggiugnerò che la ſcoſſa lanciata da una ſola faccia ſuole eſſer più debole, che quando lanciata viene da due. Per conto poi del ſecondo, o ſi tocchino i due organi in una ſola faccia, o in tutte e due, ordinariamente la ſcoſſa ſembra ſpiccarſi egualmente, e nel tempo ſteſſo dall' uno e dall' altro. Pure v' ha delle volte, e queſte non tanto rariſſime, che nel tempo che un organo agiſce, l' altro rimane ozioſo. Ciò è ſtato replicatamente da me provato con la palma della mano ſpiegata ſu la faccia ſuperiore dei due organi, ma l' ho ancora con maggior preciſione ſperimentato, toccando nella medeſima faccia un organo col pollice, e l' altro organo con l' indice della ſteſſa mano, poichè mi ſi comunicava la ſcoſſa ad un dito, ſenza che ſi comunicaſſe punto all' altro. E ciò non di rado mi è accaduto, ſe irritando un organo, non facea che contemporaneamente toccar l' altro, quaſi che il primo con la ſcoſſa cercaſſe di vendicarſi, il che non facevaſi dal ſecondo, per non eſſere ſtato punto offeſo.

I riſultati fin qui menzionati partono da tentativi quaſi tutti inſtituiti ſu le torpedini laſciate nell' acqua. Dirovvi però che i medeſimi ſono ſtati da me ripetuti nell' aria, ſenza che trovato vi abbia altro divario, fuorchè qui le ſcoſſe erano più gagliarde.

Udito che avete gli addotti riſultati, piacciavi di ſentire anche i ſeguenti. Sono relativi a torpedini cimentate tutte nell' aria. Se eſſendo io iſolato toccava in una ſola faccia una torpedine non iſolata, leggeriſſima era la ſcoſſa ch' io ne ſoffriva, ma queſta era fortiſſima, toccando entrambe le faccie. Nè più nè meno accadeva, ſe oltre l' eſſere iſolato io, lo era pur la torpedine. La leggiere ſcoſſa però in ambi i caſi provata avea luogo ſoltanto, vigoroſiſſimo eſſendo il peſce. Diverſamente più non ſi ſentiva, e allora per provare la ſcoſſa mi era d' uopo contemporaneamente l' una e l' altra faccia toccare. Che ſe queſto circolo io veniva ad allungarlo mediante un altr' uomo, egli pure iſolato, il quale con una mano toccaſſe una faccia della torpedine, nel tempo ch' io l' altra faccia toccava, tutti e due ſentivamo la ſcoſſa non ſolo alle mani toccanti l' animale, ma all' altre due inſieme intrecciate per l' allungamento del circolo. Nel caſo poi dell' iſolamento di me, e della torpedine, più d' una volta mi è accaduto, che toccando con due dita della ſteſſa mano i due organi alla medeſima faccia, io qui pure provava la ſcoſſa da un organo ſenza provarla dall' altro. Queſta ſcoſſa poi, che era aſſai piccola, non oltrepaſſava il dito che la provava.

Se i fatti ſin qui allegati provano baſtantemente, che la virtù dolorifica dei noſtri peſci parte da un principio elettrico, i ſeguenti mi ſembrano atti a perſuaderlo anche di più. Coteſta virtù non ſi è mai trasfuſa alle mie mani, toccando il peſce per via d' un coibente, quale ſi è un corto cilindro di ceralacca. Ma ſi è bene trasfuſa, valendomi di un deferente, voglio dire di una chiave, di un chiodo, o di altrettale corpo metallico. Queſti due fatti diverſi gli aveva prima di me oſſervati col medeſimo eſito il chiariſſimo *Walſch*. L' ultimo fatto però che riſguarda i corpi deferenti accorto io mi ſono che biſogna intenderlo con le dovute limitazioni. Primieramente la ſcoſſa non è qui mai sì gagliarda, come toccando immediatamente il peſce. In ſecondo luogo perchè ſi abbia, è neceſſario che in sè ſia fortiſſima: e però quaſi ſempre è nulla, toccando con qualche deferente le torpedini molto infiacchite. Uno ſciugatojo, un reticello, un fazzoletto, ravvolgenti a più doppj il corpo della torpedine, tramandano la ſcoſſa alla mano, ſe ſono bagnati: ma per neſſun conto, ſe ſono aſciutti, non oſtante che ſieno di canape o di lino. Per l' oppoſito un velo d' olio d' oliva che copra le due faccie, oppur una degli organi elettrici, quantunque in sè coibente, non impediſce la ſcoſſa. Cotal fluido però in tal guiſa aſſottigliato non la impediſce tampoco nella elettricità artificiale.

I riſultati ſin qui addotti ſono a mio avviſo i ſoli abili a moſtrare la maſſima analogia tra i fenomeni elettrici e quello della torpedine, giacchè niun altro fenomeno ho io potuto trovare, che m' indichi il principio elettrico. Non cenno di ſcintilla nella più profonda oſcurità, non iſtrepito di ſorta, non venticello, non attrazione, e repulſione di corpi leggieri, niuno indizio di carica nella boccia leideſe meſſa a contatto con la torpedine iſolata e vibrante le ſcoſſe, niun ſegnale di elettriciſmo in me iſolato, e tenente tra le mani il peſce quando ſcagliava i colpi.

Veduto avete che le ſperienze del primo mio ſcritto contrariavano a quelle del Sig. *Schilling*, volente che la calamita attragga le torpedini in quell'a guiſa che tira a sè il ferro. Ripetute avendole aſſaiſſime volte, e con la maggior attenzione per via d' una calamita potentiſſima, che teneva attaccato un peſo di 25 libbre, queſte novelle eſperienze non mi hanno moſtrato niente di più delle prime. La calamita accoſtata ai noſtri peſci, e poſta ancora in contatto con loro, dava quel ſegno di attrazione che darebbe avvicinandola a un mattone o ad un legno. Vi dirò bene che per eſſere artiſiciale, aveva la poſſanza di tradurre al mio corpo la ſcoſſa elettrica.

Prima ch' io finiſca di ragionarvi di queſte ſcoſſe voglio con brevità trattenervi ſopra alcune ſingolari novità atte ad accreſcere la voſtra attenzione. Nel citato mio ſcritto ragionando delle ſcoſſe elettriche, dico che nell' avvicinarſi il peſce alla morte ſi traſmutano queſte in una continuata batteria di leggeriſſimi colpi, che finiſcono col finir della vita dell' animale. Un ſimil fenomeno mi ſi è manifeſtato di nuovo, ſe non che perite le torpedini, mi ſono accorto di un altro fenomeno più maraviglioſo ancora e più ſtrano. E queſto è che la batteria quantunque in ordine all'eſſer doloroſetta alla mano, termini affatto col terminar della vita animale, ſeguita però per più ore ad averſi alla maniera di un ſemplice polſo. Se la mano adunque, morta affatto che ſia la torpedine, premerà i ſuoi organi, ſente un battito frequentiſſimo e regolare, ſimile a quello del cuore, e lo ſente in tutta l' area degli organi, ſe non che in vicinanza delle branchie, cioè a dire dove ſono eſſi più groſſi, è più vigoroſo. In altre parti poi della morta torpedine non ſi ſente nulla. Il fenomeno è lo ſteſſo, e dentro l' acqua, e fuori. Di più non viene eſſo a toglierſi, reciſi che ſieno dalla torpedine gli organi. Dopo alcune ore da che è ſeguita la reciſione, dura ancora la batteria, e traſcorſo poi ulterior tempo va a perderſi. La mano la ſente con diſtinzione tanto nella faccia ſuperiore, che nella inferiore. Se uno degli organi che pulſano ſpogliato venga della pelle che nella faccia ſuperiore lo copre, quaſi di ſubito la batteria ſi ſminuiſce, poi ſi fa nulla. Accorto eſſendomi di queſte particolarità in una torpedine, le ho verificate in cinque altre col medeſimo ſucceſſo. Perchè poi non ſi aveſſe a penſare, che qualche ingannatrice apparenza mi aveſſe impoſto ſu di queſto fatto, per accertarmene ho uſato, come ſentirete, le maggiori circoſpezioni, e cautele.

Ma ſe haſſi quella batteria, e per più ore continua ad averſi negli organi ſtaccati dalle torpedini morte, che accaderà in eſſi, ſtaccati che ſieno dalle vive?

Il tentativo era troppo curioſo per non eſſere inſtituito. Comechè adunque ne vengano ſcelte di quelle, i cui organi ſono prontiſſimi a ſcagliare le più valide ſcoſſe, queſte ſcoſſe ciò non oſtante ceſſano ſubito che gli organi mediante il taglio rimangono ſeparati dall' animale. La mano tuttavia, che allora li comprime, ſoffre da prima un informicolamento molto moleſto, che poi a poco a poco va ſminuendo, ridottoſi in ultimo a quella ſpecie di polſo o innocente batteria, che non finiſce ſe non dopo qualche ora. Le torpedini così ſpogliate de' loro organi ſeguitano a vivere, ed a nuotare per qualche tempo; dal che appariſce che non ſono eſſi di prima neceſſità alla vita; rendonſi poi inette alla ſcoſſa, ed era ben facile il preſagire che queſto doveva ſuccedere: che anzi private di un ſolo organo, non danno bene ſpeſſo neppur la ſcoſſa dall' altro. Siccome però talvolta avviene il contrario, così ſempre più rimane dimoſtrato che ciaſcun organo da sè è dotato di queſta virtù.

Tre gran tronchi nervoſi riceve dentro di sè ogni organo. Che ſarà egli ſe uno degli organi ſi ſtacchi col taglio dal peſce per l' intiera porzione dove mettono queſti nervi, laſciando il rimanente dell' organo tuttavia unito al corpo? Anche queſta prova mi parve degniſſima d' eſſer tentata, l' eſito della quale ſi fu la ceſſazion d' ogni ſcoſſa all' organo così offeſo, non oſtante che ſottentraſſe però quel formicolamento di ſopra accennato.

Io diſſi già che nell' atto che ſi ha la ſcoſſa gli organi ſoventemente rimangono immobili. Non facea però allora che premerli, che palparli. Trovandomi adeſſo in queſte nuove eſperienze ho voluto ſottoporli a cimenti più forti. Sentirete in quante e quanto diverſe maniere gli ho tormentati col tagliente metallo, per veder pure ſe l' elettrico colpo veniva preceduto o accompagnato da qualche tremito o commozione, o ſcuotimento o contrazione delle parti componenti gli organi: a far breve quale ſi era allora la material mutazione cui andavan ſoggetti coteſti organi. Nè ho laſciato di eſplorarli per fino col microſcopio ne' momenti che precedevano, che accompagnavano, e che ſeguivan la ſcoſſa. Ma debbo dirvi con illibato candore, che accorto mai non mi ſono del più picciolo movimento di parti, ſe ſi eccettui quell' univerſale agitazione del corpo, non ſempre però, come ho già detto, compagna fedele del colpo elettrico. Dirovvi di più che tormentati gli organi elettrici con diverſi e potenti ſtimoli, non mi hanno manifeſtata quella proprietà che caratterizza il muſcolo vivo.

Tali ſono i riſultati più principali di mie oſſervazioni relativi a queſto ſtraordinario fenomeno delle torpedini, riſerbandomi poi nel mio libro a corredarli delle neceſſarie pruove, come pure a trarne quelle teorie, che giudicherò più confacenti alla verità, e più proprie ad illuſtrare queſto ſoggetto *Fiſiologico-elettrico*.

Le maſſime fra le torpedini da me eſaminate erano lunghe all' incirca 18 pollici, e larghe 8. Le loro ſcoſſe quantunque inſtantanee mi erano alquanto tormentoſe, e ſi ſtendevano fino al petto. Quelle poi delle torpedini minori mi riuſcivano meno incomode. Crederò di aver prove dirette per far vedere, che la ſcoſſa è quell' artificio che uſano le torpedini per impadronirſi di que' peſci, che loro ſervono di cibo. Ho poſto ogni ſtudio per venire a lume de' loro andamenti, de' luoghi che ſogliono abitare, e dove coſtuman occultarſi per aſpettare al varco, e predare i peſci di gran lunga più vivi al moto, e più leſti di loro.

Il modo onde le torpedini propagano la ſpecie è ſtato un altro oggetto non indifferente alle mie ricerche. Nella lettera già pubblicata moſtrato aveva che le torpedini quantunque ſieno vivipare, in quanto che partoriſcono i feti, hanno però le uova come gli animali ovipari. E queſta verità con le mie nuove oſſervazioni l' ho amplamente confermata. Quivi aggiugneva che trovato avendo alcuni feti nell' utero di una torpedine, ſi vedevano queſti feti attaccati mediante il funicolo ombelicale alle interne pareti dell' utero. Mi accorgo adeſſo che queſta propoſizione vuole eſſere rettificata. Vero è che ulteriori eſami mi hanno pur moſtrato in qualche feto l' attaccamento di detto funicolo all' utero; ma queſto attaccamento è accidentale, in quanto che ſolendo gemere dall' utero un umore viſchioſo, in grazia di eſſo l' eſtremità del funicolo oppoſta all' altra, che ſi collega col feto, quivi rimane attaccata. Del rimanente il funicolo ombelicale, diſceſe eſſendo le uova dall' ovaja nell' utero, ſi vede eſſere per una eſtremità attaccato all' uovo, o a dir meglio continuato con lui; giacchè queſta continuazione ſi pruova maniſeſtiſſima. Detto funicolo coſta di due coſe, di un invoglio eſteriore membranoſo, e di un canale interno pur membranoſo. Ora l' invoglio eſteriore non è che una continuazione dell' eſterna membrana dell' uovo, e il canale interno che una continuazione della membrana interna dell' uovo ſuddetto. Il funicolo poi dall' altra eſtremità è pure continuato col feto, in quanto che l' invoglio eſteriore è una eſpanſione o continuazione della pelle di lui, e il canale interno una continuazione dell' inteſtino. Ecco adunque come l' uovo, e il feto, mediante il funicolo ombelicale, ſono tra loro continuati, o ciò che torna lo ſteſſo, formano un tutto ſolo. Ma per le replicate mie oſſervazioni le uova delle torpedini eſiſtono già nell' ovaja aſſai prima che fecondate ſieno dal maſchio, mentre quando dall' ovaja calano nell' utero le uova già mature, e della groſſezza circa d' un roſſo d' uovo di gallina, ad eſſa ovaja ne rimangono attaccate altre picciolisſime e acerbe, deſtinate a maturare, e a propagare la ſpecie il ſeguente anno; e queſte uova acerbe ſono pure avvolte dalla medeſima doppia membrana, che nelle mature fa un tutto col feto; dunque i feti preeſiſtono alla fecondazione delle femmine in queſti animali. Ecco adunque nella preſente ſcoperta un novello argomento dimoſtrativo della preeſiſtenza dei germi. Il Barone *Hallero* avea moſtrata tal preeſiſtenza negli uccelli; io in diverſi amfibj; e preſentemente ho il compiacimento di moſtrarla nelle torpedini; ed è ben preſumibile, che queſto non ſarà ſolo tra peſci, in cui verrà a paleſarſi la medeſima luminoſa verità. Nel tempo che nell' utero appariſcono

pariſcono alcuni feti nel modo indicato, ſe ne veggono altri, che per eſſere più vicini al naſcere hanno già conſunta la ſoſtanza tutta dell' uovo: ed è taluno di queſti che col funicolo rimane qualche volta caſualmente attaccato alle pareti dell' utero.

Finalmente l' anatomico eſame degli organi elettrici non dovea per neſſun conto eſſere ommeſſo. Vedendo però che per farlo come meritava, richiedeva una mano maeſtra, prevaluto io mi ſono dell' opera d' un mio Amico, e Collega, ſpertiſſimo in Notomia, che con riconoſcente animo nominerò, come pure due altri celebri miei Colleghi, che a queſti dilicati lavori anatomici favorito mi hanno d' intervenire. Veduto avete quanto intorno a queſti organi era ſtato ſcoperto dal chiariſſimo *Hunter* dietro alle tracce ſegnate dai due noſtri Italiani, *Redi*, e *Lorenzini*, ma vedrete quante altre inaſpettate novità ſi naſcondevano dentro di eſſi, e qual magiſtero, qual arte ſpicca in queſte ſingolariſſime macchinette.

§. XVI.

Pungolo della Paſtinaca.

Per affermazione degli antichi Naturaliſti, ed anche di alcuni moderni, tra quali ſi annovera l' illuſtre *Linneo*, veleno ſiſſimo ſi è il pungolo, onde porta armata la coda queſta ſpecie di razza (*a*). Ed un tal ſentimento è pure altamente radicato nella gente di mare, così che ſarebbe più facile ſtrappare la clava ad Ercole, che rimoverla dal medeſimo. Tenendo però dietro a queſta perſuaſione del popolo, io ho veduto che ſuole appoggiarſi a fatti la maſſima parte dubbioſi ed incerti; nè mi ſembrano più meritevoli d' eſſere aſcoltati i Filoſofi, per riferirſi quaſi ſempre ai racconti de' peſcatori, ſenza avere mai verificati queſti racconti con le proprie eſperienze. Il Mediterraneo abbonda di paſtinache. Frequentemente uſcendo del golfo co' peſcatori io ne vedeva diverſe reſtar prigioniere nelle lor reti. Oſſervava il riſerbo grande che

---

(*a*) Raja Paſtinaca. Lin.

eſſi avevano nel maneggiarle, e la prontezza nel recidere ad eſſe il dentato pungolo oſſeo, e gettarlo in mare. Come adunque non doveva io accendermi in voglia di eſaminar queſto pungolo, creduto tanto velenoſo, e di tentare con eſſo qualche eſperimento, giacchè altri Fiſici, a mia notizia, fatto non lo avevano prima di me? Sentirete adunque nel mio libro e la deſcrizione di queſt' arma, che certamente per un tal peſce è terribile, e il modo con cui ſa vibrarla, come altresì varj tentativi da me intrapreſi con la medeſima, facendo ferir più animali, sì a ſangue freddo, che a ſangue caldo, e ſempre quando le paſtinache eran vive. Sentirete pure che l' arma ſuddetta non ha niente di velenoſo, e che tutto il male che cagiona, e che certamente nelle paſtinache di gran corpo può eſſere conſiderabiliſſimo fino a produrre talvolta in noi ſteſſi la morte, è un puro effetto della meccanica ſua ſtruttura, in grazia della quale penetra facilmente le carni, e volendo levarla, irreparabilmente le ſtrazia. S' inganna dunque a partito il *Linneo* quando decanta il veleno di queſto pungolo, a perſuadere il quale, oltre al ricorrere ai vecchi filoſofanti, e ai moderni, produce un genere non più inteſo di pruove, cioè a dire l' autorità della Favola: *Caudæ aculeus venenatus Veteribus & Recentioribus, fato Ulyſſis clarus*. Così egli nel ſuo Siſtema della natura: e in altro luogo del medeſimo libro afferma pure che detto aculeo è velenoſo, come per lui è velenoſa la torpedine; parlando però del qual ultimo peſce quanto il Naturaliſta di Upſal ſi allontani dal vero, credo di averlo à chiare note moſtrato nella più volte citata mia lettera. Nel viſitare internamente le paſtinache ho pur trovato eſſer falſo, ch' elleno corredate ſieno di polmoni, ſiccome vuole lo ſteſſo Autore, non avendo che le ſole branchie per reſpirare. Queſti errori del *Linneo*, ed alcuni altri nel decorſo della preſente lettera per me notati, mi ſi ſono offerti, penſando a tutt' altro che a criticare un sì rinomato Naturaliſta. E lo ſteſſo è ſtato di altri non pochi relativi ad altre produzioni marine, i quali errori, cadendo l' opportunità, non eſiterò di paleſare, parendomi che pel vantaggio della ſocietà delle lettere i falli degli uomini grandi non debbano eſſer taciuti, affinchè l' autorità di chi gli ha commeſſi non induca altri in errore.

§. XVII.

Miſcellanee.

Animalucci infuſorj marini. A quel modo che l' acque dolci, in cui vengono a macerarſi, ed a ſcioglierſi ſoſtanze vegetabili ed animali, abbondano di queſti microſcopici viventi, ne abbondan pure le acque ſalſugginoſe del mare. Que' ſiti ſingolarmente dove queſte impaludano, e dove a motivo della poca profondità le piante ſubacquee ſi ſcompongono e periſcono, formicolano di tai minuti animali. Il medeſimo fenomeno ſuccede nell' acqua marina rinchiuſa ne' vaſi, dove accade lo ſcioglimento delle ſopraccennate ſoſtanze. Ma quali ſono le leggi naturali, cui ſoggiacciono gli animaletti infuſorj del mare? Sono elleno le ſteſſe che quelle degli animalucci infuſorj dell' acque dolci? Queſti ultimi moltiplicano la ſpecie parte per diviſion naturale del proprio corpo, parte perchè altri ſono ovipari, altri vivipari (*a*). Come ſuccede la moltiplicazione nei primi? In moltiſſime coſe l' analogia per l' una parte, e per l' altra qui non poteva eſſer maggiore.

Vermi litofagi. Oltre all' immenſo numero di animali grandi e piccioli, diſſeminato nell' acque del mare, i fanghi, le arene, gli ſcogli, e le pietre ſubacquee ricettano pure una infinità di abitatori. Ho avuto baſtante ozio per eſaminarne diverſi, ma ſopra ogni altro intertenuto io mi ſono ſu que' vermetti, che a guiſa dei dattili forano le pietre, e vivono dentro di eſſe, maſſime per aver coſtoro ſin qui sfuggita la diligenza, e lo ſtudio degli oſſervatori.

Se la Luna abbia influenza ſopra i Teſtacei, e i Croſtacei. Parrebbe che il preſente Problema più non meritaſſe i rifleſſi del filoſofo, ſe quell' impero, che ſembrava per ſempre tolto a queſto pianeta, sforzato non ſi foſſe di fargliele riacquiſtare qualche dotto Moderno. Se però la Luna ſtendeſſe mai le ſue leggi ſu i teſtacei, e i croſtacei marini, biſognerà dire che gli oſſervati da me ſono ſudditi refrattarj.

(*a*) Miei *Opuſcol. di Fiſ. Anim. e Veget.* Vol. I.

Paſſaggio de' Peſci , e qualità di quelli che ſi prendono al golfo , e nelle ſue adjacenze . Anche queſti due oggetti ho creduto meritevoli di conſiderazione ; e ſiccome nel mio ſoggiorno colà io non poteva raccorre tutte le cognizioni di che abbiſognava, così ho dovuto conſultare i peſcatori più ſperimentati, quelli ſopra tutto che paruti mi ſono più veridici, come pure le poche perſone fededegne del paeſe.

Fondi del mare , e ſe la ſuperficie di queſto ſi alza , o ſi abbaſſa. Notabile è l' oſſervazione del celebre *Donati*, che il fondo dell' Adriatico è riveſtito d' una croſta della groſſezza di molti piedi , formata di croſtacei, e teſtacei , e di corpi polipiferi ; meſcolati alla terra , e all' arena , e in maſſima parte impietriti ; dalla qual croſta egli deduce l' alzamento della ſuperficie del mare in que' luoghi , quantunque poi di tale alzamento vengano aſſegnate da lui altre cagioni. Il fondo del golfo, come pur quello che è fuori delle ſue bocche, non ha niente di ſimile, ma quaſi per tutto è fangoſo, anche nelle maggiori profondità di 300, e di 400 piedi, e queſto fango è calcare . Ne ho prove ſicuriſſime , come pure che a quelle profondità non naſce mai ſul fondo un filo d' erba, nè altro vegetabile, non oſtante che ne naſcano moltiſſimi e diverſiſſimi a profondità molto minori, come accade dentro del golfo . La poca influenza della ſolar luce in que' cupi fondi ſarebbe mai la cagione per cui ſono sforniti di piante?

Ma ſe il tratto di mare da mè eſaminato è privo di quella croſta, neppure ſi hanno argomenti che quivi la ſuperficie dell' acque alzata ſi ſia , che anzi ſe ne hanno dei contrarj , per cui evidentemente appariſce, che il mare in qualche luogo ſi rimane alla medeſima altezza , e in qualche altro continuamente ſi abbaſſa. Parlando adunque del golfo, delle tre iſole ad eſſo contigue, la *Palmaria*, il *Tiro*, e il *picciol Tiro*, come pure di altre adjacenze (ſiti tutti circondati da ſcogli, e dove non metton torrenti , nè fiumi) io farovvi vedere per un belliſſimo monumento da me ſcoperto , che quivi il mare ſi trova preſentemente a quella medeſima altezza, alla quale ſi trovava nove ſecoli fa. Favellando poi delle ſpiaggie di Carrara , e di Maſſa , eſpoſte a' più furioſi libecci , non d' altro compoſte che di minute ghiaje , e di rena , e attraverſo alle quali paſſano più torrenti, che vanno a ſcaricarſi nel mare, quantunque tali ſpiaggie ſieno di poche miglia diſtanti dal golfo, pure del continuo ſi vanno diſcoprendo di più per l' inceſſante allontanamento del mare. E i triſti avanzi del Porto carrareſe colà nel 1750 fondato, ed ora dal mare 475 piedi lontano, ſono eſſi pure un incontraſtabile monumento benchè recente di tale allontanamento non ſolo, ma dell' annua miſura di eſſo. Per le ſopra eſpoſte circoſtanze diverſe che accompagnano il golfo, e le ſpiaggie di Maſſa, e di Carrara comprenderete facilmente la cagione per cui il mare ad onta degli anni conſerva in un ſito la medeſima elevatezza, nel tempo che in altro ſito ſi va del continuo abbaſſando.

Ed eccovi, illuſtre mio amico, per appagare in parte le dottiſſime voſtre brame, un compendiato ragguaglio di quanto è ſtato da me oſſervato ſul mare. Io non ſo ſe parlato avendovi quaſi ſempre di animali, e talvolta anche nuovi, ſarò ſtato da voi inteſo tanto che baſta per mancanza di figure; le quali però non è già ch' io non aveſſi in pronto, per eſſere già ſtate ſotto i miei occhi dai vivi animali copiate per opera di un valente diſegnatore, ma non eſſendo ancora inciſe non potrò produrle che nella pubblicazion del mio libro. Veduto avete che diverſi di queſti animali ſono quegli ſteſſi di cui ragionate nelle immortali voſtre Opere. Se le mie giunte aveſſero la ſorte d' eſſervi utili in qualche modo, ſtimerei vantaggioſamente ricompenſate le fatiche da me ſoſtenute ſul mare. Pregovi intanto a volere ſcuſare la ſoverchia lunghezza di queſta mia prima lettera, nata dalla moltiplicità delle coſe che per ubbidire a' pregiati voſtri comandi propoſto mi era di dirvi. Farò d' eſſere molto più breve nella ſeconda, che riſguarderà gli oggetti montani, e che avrò il piacere di ſcrivervi ſubito che le pubbliche mie incumbenze mi permetteranno di farlo.

MEMORIA (*)

Sopra i Fuochi de' Terreni e delle Fontane ardenti in generale, e ſopra quelli di Pietra-Mala *in particolare*.

Del Sig. ALESSANDRO VOLTA Profeſſore di Fiſica Sperimentale nell' Univerſità di Pavia.

QUando nel 1776 ebbi ſcoperto che da tutti i fondi d' acqua ſtagnante o leggermente corrente ſi ſvolge una prodigioſa quantità di aria infiammabile, prodotta dalla macerazione e putrefazione delle ſoſtanze vegetabili e animali, fui naturalmente condotto a penſare, che molti fenomeni naturali, tra i quali quello dei terreni e delle fontane ardenti, da altro non proveniſſero che da grandi ammaſſi di codeſt' aria infiammabile (*a*). Era troppo facile l' immaginare che potea trovarſi buona copia di tal aria già bella e formata in alcuni ricettacoli o cavità ſotterranee, che riempiendoſi, o per le pareti che ſi ſprofondaſſero, o per qualche materia eſtranea portatavi dentro, obbligavano quell' aria a traſpirare ed uſcirne fuora in forma di getti attraverſo le crepaccie e la terra ſecca, o attraverſo l' acqua in forma di gorgogli. Io mi atteneva tanto più fortemente a queſta opinione, quantochè alla poſſibilità della coſa, alla veroſimiglianza di una ſpiegazione così facile e naturale aggiugnevaſi una imitazione non lontana del fenomeno, a cui io era giunto; ſendo riuſcito ad eccitare a talento ſulla ſuperficie delle acque ſtagnanti ſimile infiammazione mediante il fruga-

---

(*) Queſta Memoria fu dall' autore ſcritta in franceſe, e dal medeſimo recitata nell' Aprile del 1782 in una pubblica adunanza di una Società letteraria chiamata *Muſeo di Parigi*, di cui è Preſidente il Sig. *Court de Gibelin* celebre per la ſua opera *Le Monde Primitif*.

(*a*) *Lettere ſull' Aria infiammabile nativa delle paludi*. Milano 1777.

re ſul fondo, e rimeſcolare la melma ad effetto di ſnidarne l' aria infiammabile: il che fatto, non aveva che a preſentare un candelino o un ſolfanello acceſo al luogo dove naſceva il maggior bollicamento cagionato dalle gallozzole d' aria che ſpiccate dal fondo venivano a crepare alla ſuperficie dell' acqua, per far toſto ſorgere una fiamma che ſpandeaſi per una eſtenſione conſiderabile lambendo l' acqua medeſima. Queſta fiamma era di colore azzurro, e continuava ad ardere così lambente e ondeggiante più o men tempo. Un fenomeno preſſo a poco eguale avea luogo ſopra le terre impregnate d' aria infiammabile. Io ſceglieva a tal oggetto un terreno ſangoſo confinante coll' acqua di uno ſtagno, un terreno che foſſe anzi ſtato coperto lungo tempo dall' acqua medeſima, e abbandonato da eſſa e rimaſto in ſecco poco innanzi, cui andava colla mia canna foracchiando là ove era più molle e nericcio. A ſiffatti buchi accoſtando prontamente un zolfino acceſo, la fiamma vi s' appiccava a un tratto, e parte vedeaſi ſcendere fino a lambirne il fondo, parte lanciarſi in aria, maſſime ove io m' aggravaſſi col corpo, o batteſſi de' piedi ſul terreno ad oggetto di ſpremerne l' aria infiammabile in maggior copia.

Dopo tali ſperimenti e prove felici, conſultando diverſe deſcrizioni, che erano ſtate date dei terreni ardenti, e particolarmente quella inſerita nel Giornale di Fiſica dell' Ab. *Rozier* Tom. VI. Agoſto 1775 pag. 224 intorno alla *Fontana ardente* del Delfinato (così chiamata impropriamente, poichè eſſa non è in niun modo una fontana, bensì un terreno ardente), vi riſcontrai una perfetta conformità in tutto, ſalvo due ſole circoſtanze: cioè, che cotal terreno non è ſtato di recente coperto dall' acqua; e che non è neceſſario di ſconvolgerlo, o di ſcavarvi de' buchi col baſtone per iſprigionarne l' aria, la quale è tramandata ſpontaneamente da qualche ricettacolo ſotterraneo, che quivi ſuppongo trovarſi. Per tutto il reſto i fenomeni ſono aſſolutamente i medeſimi, e le circoſtanze ſon tali, ch' egli è impoſſibile il ſuppor ivi la preſenza della nafta o petrolio, a cui ſi attribuivano comunemente le fiamme de' terreni, e delle fontane ardenti. Meno poi ſi potrebbe attribuire il fenomeno a qualſivoglia altro bitume. Non reſta dunque che l' aria infiammabile, che produr poſſa tali apparenze; e l' Autore della deſcrizione citata ce lo dà egli medeſimo a divedere aſſai chiaramente, e ci conduce a ravviſare tal aria nelle modificazioni, negli accidenti, e nei moti che ci dipinge di coteſte fiamme, benchè non parli nè faccia pur cenno nel ſuo ſcritto di aria infiammabile, l' eſiſtenza della quale, non che l' indole e la natura di eſſa, dobbiam credere che gli foſſe ancora ignota. Se conoſciuto aveſſe tal aria, non ſarebbe ito a cercar altro: certo almeno non ſarebbe ricorſo ad una ſpecie di *piroforo*, prodotto non ſa neppur egli come. Il Sig. di *Fontenelle* paragonava queſto terreno a un piccolo vulcano: ſenza fondamento però; giacchè alcun veſtigio non vi ſi è potuto trovare.

In mezzo a tante inſuſſiſtenti opinioni un antico Autore mi ſi preſenta, il quale ſi è molto accoſtato alla verità. Queſti è un certo *Dieulamant* ingegnere a Grenoble, che ſcriveva ha quaſi un ſecolo, il quale attribuiſce il fenomeno a un vapore infiammabile che trapela dalla terra, dicendo di non aver trovato nulla nè ſulla ſuperficie, nè in ſeno alla terra medeſima, che poſſa produrre e alimentare le fiamme. Il Sig. di *Montigny* in una Memoria manuſcritta, di cui Mr. *Guettard* ci ha dato un eſtratto nelle ſue opere, va più innanzi ancora: egli giunge perfino a dire, che il vapore infiammabile, il quale ſi fa ſtrada attraverſo il terreno di cui ſi tratta, è ſimile a quel vapore prodotto dalla diſſoluzione del ferro nell' acido vitriolico, che s' accende coll' accoſtare la fiamma d' una candela alla bocca del vaſo. Dal che ſi fa a congetturare che ſucceda qualche coſa di ſimile ſotto il detto terreno, mercè l' azione dell' acido vitriolico ſopra delle piriti ferrugginoſe. Egli avrebbe toccato il ſegno, ſoſtituendo ſolamente la parola *aria* o *gas* a quella di vapore: ma la differenza ſolenne tra i vapori propriamente detti e i fluidi aeriformi non era molto nota a quel tempo.. Oltre di ciò tra le arie infiammabili medeſime conveniva far diſtinzione, ed attaccarſi, anzichè all' aria infiammabile de' minerali, a quell' altra ſpecie che ſi produce dalla macerazione e ſcompoſizione delle ſoſtanze vegetabili e animali: ma queſta origine dell' aria infiammabile era allora ſconoſciuta affatto; e ſol dopo la mia ſcoperta ſi può dire che ſi ſia reſa veramente paleſe (*a*).

Ho accennato che la così detta *Fontana ardente* del Delfinato non è altrimenti una fontana, ma un terreno ardente. Vi è però tutta l' apparenza che foſſe in altri tempi ricoperto quel terreno dall' acqua, la di cui ſuperficie gorgogliante prendeva fiamma all' accoſtarle qualſiſia altra fiammella. Ciò rilevaſi da quanto intorno a queſto luogo ci riferiſcono alcuni Autori antichi, tra gli altri S. *Agoſtino*, che non ſo dove ne parla. Molta probabilità ancora vi s' aggiunge dal vedere che eſiſte anche al dì d' oggi un ruſcello che ſcorre vicino al luogo ove compajono le fiamme. Avremo occaſione di far oſſervare quanto queſta circoſtanza ſia favorevole alla ſpiegazione ch' io pretendo di dare dei fenomeni di queſto genere.

Non entrerò in più minuti dettagli, che poco ſervirebbero al propoſito, contentandomi di avvertire chi li deſideraſſe, che queſti unitamente alle opinioni degli Autori ſi troveranno nella deſcrizione della Francia che ſta componendo il Sig. Avvocato *Beguillet*, di cui la parte che riſguarda il Delfinato è già ſotto il torchio (*b*).

Molti fuochi di ſimil genere ſi trovano in Italia, che ſono ſtati deſcritti da diverſi. Quelli di *Pietra-mala*, luogo ſituato ſull' alto degli Appennini tra Bologna e Firenze, ſono i più celebri e i più conoſciuti. Tralaſciando tutte le altre deſcrizioni, potrei attenermi a quella che leggeſi nell' opera conoſciutiſſima del Sig. *Ferber*, tradotta in franzeſe e arricchita di belle note dal Sig. Barone *Dietrich* corriſpondente dell' Accademia R. delle Scienze di Parigi (*Lettres ſur la Mineralogie d' Italie, et ſur divers autres objets de l' Hiſtoire naturelle de l' Italie. Traduites de l' allemand* ecc. *Straſbourg* 1776.) potrei, dico, attenermi a queſta deſcrizione, come la migliore e la più recente, che tanto vi troverei molte apparenze non equivoche, anzi tutti i più certi indizj del-

---

(*a*) Vegg. le citate *Lettere ſull' Aria infiammabile nativa delle paludi*, ſingolarmente la Lett. III. pag. 64 e la nota ſotto.

(*b*) Era ſotto il torchio quell' anno 1782, or ſarà uſcita.

la mia aria infiammabile. Ma voglio più preſto riportarmi a ciò che meco confeſsò l'iſteſſo Baron *Dietrich* poco tempo dopo: quando cioè ebbi la ſorte d' incontrarmi con lui in Argentina al principio d'autunno dell'anno 1777. Avendo egli letto poco prima la mia operetta *ſull' aria infiammabile nativa delle paludi*, nella quale, non che trovarſi enunciate tali mie idee ſopra i terreni e le fontane ardenti, viene di più riportata la deſcrizione di alcuni fenomeni di queſto genere (*a*), non sì toſto ebbe verificate le mie principali ſperienze (al qual oggetto ci portammo egli ed io in compagnia d'altre dotte perſone a raccorre dell' aria infiammabile da certi foſſi, e facemmo altresì la prova d' infiammarla ſul luogo, cioè a fior d'acqua), ch'egli convenne in tutto meco, e dichiarò apertamente che i fuochi di *Pietra-mala* da lui e viſitati e deſcritti provenir doveano da ſimil fonte, cioè da aria infiammabile della ſteſſa ſpecie; che in queſto ſenſo or vorrebbe che foſſe preſo il *vapore ſotterraneo* di cui parla, non già per un' eſalazione di nafta o petrolio, riflettendo maſſimamente ch' egli per quanto ſi ſtudiaſſe, non avea potuto rinvenire in quel terreno alcun indizio di bitume (*b*); che altri ve lo aveano bene immaginato e ſuppoſto, ma ſolo per non trovar eſſi altra via di ſpiegare il fenomeno; imperocchè coloro, i quali finſero a piacimento una ſpecie di vulcano, andarono ancor più lontani, ſecondo che penſa il Sig. *Dietrich*, dalla vera cagione: infatti niuna forma di cratere, niuna produzione vulcanica nel ſito di cui ſi tratta.

(*a*) Vegg. Lett. II. pag. 20. e ſegg. nelle note.

(*b*) „ La terra bruna, di cui parlammo, è ſparſa ſu tutta la circonferenza del focolare di *Pietra-mala*. Parrebbe ch' ella conteneſſe qualche coſa di bituminoſo; ſtantechè ſe colla punta del baſtone ſi ſmove dolcemente, e ſe ne tira fuori ſtriſciando un pezzo dal circuito ardente, le fiamme corrono appreſſo alla terra pel tratto di un piede circa. Ma dall' eſperienza, che ho fatto, ſono perſuaſo che queſt' effetto non proviene che da un reſto di vapori contenuti nella terra. Ho meſſo in una ſtorta otto oncie di tal terra bruna; le ho dato un fuoco violentiſſimo; la terra è divenuta grigia, s' è riunita in piccole maſſe, e s' è indurita; ho trovato nel collo del recipiente un ſoſpetto di ſublimato acido, e nel fondo di eſſo un poco di flemma, che ſentiva deciſamente l'acido marino. Queſta terra non è dunque punto bituminoſa, e gli effetti non ſon dovuti che ai vapori ſotterranei che s'infiammano „. *Dietrich* Op. cit. pag. 421.

Il ſuffragio del Baron *Dietrich* mi fu, lo confeſſo, di un gran peſo per confermarmi nell' opinione ch' io aveva ſempre mantenuta dopo la mia ſcoperta dell' aria infiammabile nativa. Ad ogni modo per quanto perſuaſo io foſſi della natura dei fuochi di *Pietra-mala*, reſtavami tuttavia uno ſcrupolo, cioè che il piacere di far fare una bella comparſa alla mia aria infiammabile non forſe mi ſeduceſſe; ond' è ch' io non era contento, finchè non mi riuſciſſe di averne prove inconteſtabili e dirette. Altronde quand' anche io non aveſſi più biſogno di queſte prove per finir di ſoddisfare me medeſimo ſopra tal punto, le vedeva neceſſarie a convincere gli altri, quelli ſingolarmenre, che attaccati di troppo ai loro antichi principj, e alle idee cui non poſſono riſolverſi di abbandonare, nemici dichiarati di ogni novità, non ſi arrendono che all' ultima evidenza. Mi propoſi adunque di fare ſul luogo le oſſervazioni proprie non ſolo ad iſcoprire la preſenza dell' aria infiammabile là dove trovaſi il terreno ardente di *Pietra-mala*, in quella copia ch' è richieſta alla produzione de' fenomeni che vi s' oſſervano; ma ad accertare ben anche di tal aria il continuo ſgorgo attraverſo la terra, in un colle circoſtanze che lo promovono. Io intrapreſi queſte oſſervazioni verſo la metà di Settembre del 1780 in occaſione di un piccol viaggio che feci in Toſcana; e vado ad eſporle e ſottometterle al giudizio del pubblico: eſſe ſono in piccol numero, ma altrettanto, a mio credere, deciſive.

Poco ho a dire dell' iſpezione del locale, e delle prime apparenze del fenomeno. *Pietra-mala* è un piccol villaggio, che ſi truova alla più grande altezza della ſtrada che mette da Bologna a Firenze. Alla diſtanza di poco più d' un mezzo miglio al diſotto del villaggio ſul pendio del monte evvi un terreno, come un picciol campo, il quale mirato anche da lungi vedeſi coperto da fiamme, che ſorgono all' altezza d' alcuni piedi, fiamme leggere, ondeggianti, e di color ceruleo la notte, come s' accordano tutti a riferire gli abitanti di quelle vicinanze: in tempo di chiaro giorno queſte fiamme non ſi ſcorgono che aſſai dappreſſo, e appajono aſſai tenui e roſſigne. Nel che può ravviſarſi di già una perfetta ſomiglianza colla fiamma della mia aria infiammabile nativa delle paludi. Quando io mi traſferj ſul luogo il giorno era coſì chiaro, e il terreno illuminato dal Sole, che punto quaſi non ſi vedeano le fiamme: il calore quello era piuttoſto che ne avvertiva all' accoſtarviſi che un faceva. Io mi trovava inſieme a due miei compagni di viaggio (*a*) e un paeſano per guida, il quale rimarcar ci faceva ognuna di tali vampe, mediante il gettare qua e là ne' luoghi particolarmente infiammati, che ſono come altrettanti focolari diſtinti un dall' altro, de' faſcetti di paglia, che vi prendean fuoco all' iſtante. Del rimanente eſſendo noi molto curioſi, e non laſciando di tentare e frugare per ogni dove, non andò guari che tutti avemmo fiſſati queſti falò, o getti di fiamme diſtinti, quali più e quali men grandi, che non erano poi aſſolutamente inviſibili; perocchè ſe in qualche ſito ci avvenne di abbruciar prima un poco le ſcarpe che ci accorgeſſimo della fiamma ivi eſiſtente, queſta in appreſſo, ponendovi occhio più attento, non ci sfuggiva. Cotali fiamme ſono qua e là ſparſe e diſſeminate per l' eſtenſione di poche teſe d' un terreno che reſta ſcoperto, piuttoſto leggero ed arido, e un po' ſaſſoſo; ed occupano ſegnatamente i luoghi, dove queſto ſi trova viſibilmente più raro e ſecco. Talvolta cambian di luogo, ma più ſovente di volume, quando in larghezza, e quando in altezza; qui guadagnan terreno, e ſi riuniſcono più fiamme inſieme, là ſi ritirano e ſi diſgiungono: ſi può anzi ſopprimerne alcune, ed ingrandirne altre a talento. Altro non vi vuole per fare ſparire le più piccole, che un forte ſoffio; e per quelle che ſono più larghe, baſta verſarvi tanto d' acqua, che ne ricopra tutta l' eſtenſione; oppure accumular ivi della terra, e rincalzarla e comprimerla tanto, che più non dia facile paſſaggio all' aria infiammabile ch' è ſotto. Queſt' aria allora riſoſpinta ſorte in maggior copia dagli altri pertugi vicini, ond' è che da queſti come focolari ſi levan le fiamme più alto: inſomma a miſura che ſi ſopprimon alcuni de' getti, creſcono in forza gli altri. Io mi trattenni lungo tempo a ripetere e variare tali prove, prendendomi

---

(*a*) Il Sig. Marcheſe *Torelli* Patrizio Paveſe Cavaliere di S. Stefano di Toſcana, e il Sig. Ab. Don Giuſeppe *Re* Aſſiſtente al gabinetto di Fiſica della R. I. Univerſità di Pavia.

ſoprattutto piacere di far ſalire le fiamme più alto a varie riprese, mediante il battere de' piedi, e l' aggravarmi ſul terreno attorno ad alcuno di tali getti; parendomi che queſto ſolo baſtar poteſſe a render ſenſibile l' eſiſtenza di quel ſerbatojo d' aria infiammabile, che quivi ho ſuppoſto; la qual aria ſe dalle interne cavità già ſi fa ſtrada da sè, e trapela ſpontaneamente per il terren poroſo, è ben naturale che ſgorghi aſſai più copioſamente ſopravvenendo quell' eſterna preſſione, che ajuta a ſpremernela fuore: non altrimenti che noi la ſpremiamo nelle noſtre ſperienze da una veſcica o da un otre riempiutone, giuſto per offrire lo ſpettacolo di ſimili getti di fiamma.

Non voglio laſciare di far oſſervare, per compiere in tutte le ſue parti il parallelo tra l' aria infiammabile e le fiamme di *Pietra-mala*, che ogni qual volta una di queſte fiamme, eſſendoſi per qualſivoglia maniera ſpenta del tutto, viene a riaccenderſi, ciò non fa mai ſenza quella ſpecie di eſploſione, che accompagna l' accendimento dell' aria noſtra infiammabile, e che è tutta propria di lei. Queſta circoſtanza, di cui ha fatto caſo il Barone *Dietrich*, avrebbe dovuto fin d' allora fargli ſovvenire dell' aria infiammabile. „ Le pioggie e „ le nevi, dic' egli, non impediſcono tali fiamme di bruciare; ſolamente di gran colpi di vento ſono capaci di ſpegnerle; però per un momento. Se ſi coglie queſt' inſtante „ per accoſtarvi un corpo ardente, le fiamme ricompajono *con* „ *una ſpezie d' eſploſione*, e ſi comunicano a tutta la circonferenza, come ad una ſtriſcia di polvere „. (Op. cit. pag. 420.)

Si avrà forſe difficoltà a perſuaderſi, che eſiſta ſotto queſto terreno una provviſione d' aria infiammabile così grande, da poter ſomminiſtrare alimento perenne all' ardere di tante fiamme. Ma ſe vogliam ſupporre che ſi trovaſſe altre volte in quel luogo una gran palude, la quale ſia rimaſta in ſeguito di tempo ſepolta, per uno di quelli accidenti che è facile immaginarſi (*a*), ſarà anche facile intendere come le ſo-

---

(*a*) Favoriſce non poco queſta ſuppoſizione ciò che dice il Sig. *Ferber*. „ Il ſito, da cui le fiamme di *Pietra-* „ *mala* ſortono, è coperto di terra, e „ di pietre ſtaccate talcoſe, argilloſe, e marnoſe, come ſe vi foſſe ſucceduta una ſovverſione violenta „ Op. cit. pag. 421. e ſegg.

ſtanze vegetabili e animali continuando a decomporſi vi abbian colà entro laſciato il prodotto della lor aria infiammabile, la quale, ritenuta in quella ſotterranea prigione, da cui eſala ſol poco a poco trapelando dal terreno, non ſia per anco tutta conſumata: ſe ſi ſuppone, ciò che è ancora più veriſimile, che una quantità di materie putreſcenti venga continuamente condotta in quella vaſta cavità ſotterranea (che in ogni conto dobbiam ammettere che vi ſia) da alcuni ruſcelli d' acqua carichi di ſpoglie vegetabili ed animali, i quali vi ſcolino come in una fogna, niente più vi mancherà per la formazione di quel magazzino d' aria infiammabile, ampio, ineſauſto, di cui abbiam biſogno. Del reſto l' aria infiammabile potrebbe eziandio venir fornita da qualcuna di quelle mine, che ne abbondano, come ſon le mine di carbon foſſile. Ma io amo meglio di credere, che queſt' aria ſia della ſteſſa ſpecie che ho ſcoperto ne' fondi delle acque ſtagnanti e ſporche, per la ragione primieramente che coteſta è più comune, e ſi produce in molto maggior quantità dell' altre, e dappertutto; in ſecondo luogo perchè la maniera di ardere della noſtr' aria infiammabile paludoſa è ſimile in tutto a quella delle fiamme di *Pietra-mala*.

Se non che qual biſogno abbiamo di ricorrere a ſuppoſizioni per concepire la poſſibilità di queſta grande raccolta d' aria infiammabile ſotterra ne' contorni di *Pietra-mala*, quando l' eſiſtenza ſua ci viene provata, e reſa palpabile da una quantità prodigioſa di bolle di coteſt' aria che ſcappano attraverſo l' acqua di una fontana la qual ſi truova a picciola diſtanza dal terreno ardente (*a*)? Si può facilmente raccogliere di tal aria, che cagiona un grande ribollimento nell' acqua per molte gallozzole, che vengono a romperſi alla ſua ſuperficie, adattando un imbuto al collo d' una caraffa rivolta colla bocca nell' acqua, e piena ella ſteſſa di acqua; come ho inſegna-

---

(*a*) „ Rimontando un poco la montagna, e ſul medeſimo pendío ſi vede un altro pezzo di terreno ardente più grande e più eſteſo che il primo. Più in ſu, all' eſtremità della valle vi ha un piccolo ſtagno, chiamato *Acqua buja*; le di cui acque, ancorchè fredde, ſembrano bollire coſtantemente „ *Ferber* p. 123, il quale ſuppone anche qui del petrolio, e non ſoſpetta neppure l' aria infiammabile, che ſi vede e ſi tocca.

to per cavare l'aria infiammabile dei foſſi (*a*): ſi può, dico, raccogliere dell' aria di quella fontana, traſportarla entro a bottiglie convenientemente turate, ed abbruciarla poi a bell' agio quando un vuole; e ſi può, ſe più piace, infiammarla ſulla ſuperficie medeſima dell' acqua, (*b*) onde ſgorga: ciò che ne fa una vera *fontana ardente*. Or poichè da queſta fontana non corre che un picciolo tratto al terreno ardente, pare che non vi ſia, nè eſſer vi poſſa alcun ragionevole dubbio intorno all' identità del fenomeno. Nulla di meno paſſiamo più innanzi, e cerchiamo delle prove più dirette e concludenti.

Ad oggetto di rendere ſenſibile il da me ſuppoſto ſgorgo di aria infiammabile dal terreno in queſtione, m' avviſai di ſpargere delle pagliuzze ed altri corpi leggeri là dove la terra mi parea più leggera e ſollevata, ſegnatamente in que' luoghi da cui aveva un momento prima a bella poſta ſpazzata via con forte ſoffio la fiamma: con che ebbi la ſoddisfazione di vedere che coteſte paglie ed altri minuzzoli venivano commoſſi, e fatti ſaltellare dal ſoffio d' aria (e da che altro mai?) che trapelava dal terreno. Non mi reſtava più per compimento di prova, che di raccogliere di queſt' aria medeſima, e vedere ſe era veramente infiammabile, al par di queil' altra che ſcappa in forma di bolle dalla vicina fontana, di cui s' è parlato poc' anzi. A queſto fine feci ſcavare delle foſſatelle ne' luoghi preciſamente occupati da fiamme, e ricolmare quelle d' acqua, con che veniva (com' è naturale) ſoffocata la fiamma; ſi videro, com'io l' avea predetto, ſalire dal fondo a galla dell' acqua copioſe bolle d' aria; le quali per rendere più groſſe e più frequenti, mi miſi a frugare col baſtone ſott' acqua ſommovendo la terra, intanto che per raccogliere di tal aria teneva rivolta colla bocca nell' acqua una bottiglia piena d' acqua con adattato al modo ſolito l' imbuto. Con ſimile artificio mi riuſcì di traſportare una quantità ſufficiente di coteſt' aria al noſtro albergo di

---

(*a*) Lett. ſull' Aria infiam. ecc.

(*b*) E' dunque l' aria infiammabile a cui ſi dà fuoco, e che leva fiamma ſulla ſuperficie di quell' acqua, un' aria infiammabile che ognuno può raccogliere; non è il ſognato petrolio, che nè ſi ſcorge, nè alcuno ha raccolto mai in quel ſito.

Pietra-mala, dove feci la prova d' infiammarla in preſenza di quelle ſteſſe perſone, che erano ſtate meco ſul luogo, che mi avevano ajutato a raccoglierla, e che avevano aſſiſtito alle altre ſperienze. La fiamma di queſt' aria ſi moſtrò azzurra e lambente, tutt' affatto ſimile a quella dell' aria infiammabile delle paludi, e della fontana, di cui abbiamo parlato.

Non ſi può dunque a meno di riconoſcere nel fenomeno di *Pietra-mala* un' aria infiammabile, che già bella e formata ſi contiene in un vaſto ricettacolo ſotterraneo, da cui eſce continuamente, facendoſi paſſaggio per alcune crepacce, e pertugi inviſibili, oſſia attraverſo la terra medeſima rara e poroſa. Tutt' al più vi ſi potrebbe aſſociare un' altra cauſa, e attribuire una parte ſolamente del fenomeno all' aria infiammabile, la di cui eſiſtenza in quel luogo è ora dimoſtrata, e un' altra parte al ſuppoſto petrolio, o ad altra ſorta di bitume; ma biſognerebbe bene eſſere innamorato morto di queſto petrolio o bitume, per volerlo a tutti i patti tirar in campo, quando non è mai ſtato poſſibile di ſcoprirvelo, e che altronde non v' è biſogno alcuno di queſto ſoccorſo. No, lo ripeto, non v' è il minimo indizio di bitume, nè fluido nè concreto, ſparſo ſopra il noſtro terreno ardente: una terra arida, buona parte nericcia, miſta a ſaſſi piccioli e grandi, e pochi rimaſugli di vegetabili ſparſi ſulla ſuperficie, ecco tutto quello che vi ſi ritrova. Si è fatto caſo da alcuni dell' odore di queſta terra nericcia, che avean raccolto per eſaminarla; ma è facile riconoſcere che non è altro che un odore empireumatico, che ha contratto eſſa terra arroſtita dalla fiamma ivi eſiſtente; come ſuccederebbe d' ogni terra, che ſi ſottoponeſſe alla medeſima abbruciatura, ſalvo che foſſe del tutto magra e ſabbioſa. Nè maggior caſo vuol farſi di quell' odore, che, al dir di taluno, dal luogo di quelle fiamme ſi ſpande intorno. Il Sig. *Dietrich* nel paſſo ſopraccitato dopo aver detto che per prova ha trovato che quella terra *non è punto bituminoſa*, ſoggiunge „ ſi dee preſumere, che l' odor „ grato ma leggero, che ſi ſente quando ſi è ſotto il vento „ delle fiamme di *Pietra-mala*, che alcuni han preſo per un „ odore elettrico, ed altri per quello del belzuino, e che io „ non ho potuto determinare ſul luogo, non è altro che „ quello dell' acido marino, la di cui preſenza è provata dal-

„ la

„ la mia ſperienza „. Io crederei che foſſe l' odore ſteſſo dell' aria infiammabile, che quando abbrugia è leggere e non ingrato, alterato, ſe ſi vuole, dai vapori di detto acido marino, o d' altre ſoſtanze volatili che per avventura vi s' incontrino. Chechè ne ſia di tali circoſtanze puramente accidentali, quando le circoſtanze più eſſenziali che accompagnano il fenomeno dei terreni ardenti, i ſintomi principali di queſti fuochi convengono interamente con quel che ci offre l' aria infiammabile nativa, quando inſomma la raſſomiglianza è perſetta quanto mai può eſſere, coſtretti noi già a ravviſare nell' indentità degli effetti l' identità della cauſa, dobbiamo di queſta ſola eſſere contenti, ſenza andar a cercare altre cauſe concomitanti ſuperflue non che immaginarie.

Tra queſti ſintomi uno ve n' ha, ch' io non ho ancora indicato, tanto più rimarcabile, quantochè ſtando al mio ſuppoſto riceve una ſpiegazione tutta ſacile e naturale; e all' incontro non può averla che difficiliſſima e forzata in ogn' altra ſuppoſizione. Parlo delle vicende, a cui vanno ſottopoſte per le pioggie e la ſiccità le fiamme di *Pietra-mala*, e in generale quelle di tutti i terreni e ſontane ardenti. I pratici di que' luoghi ci aſſicurano, che queſte fiamme creſcono di molto colle pioggie. Or non ſi ſa comprendere in qual maniera le pioggie potrebbero aumentare il bitume o il petrolio alla ſuperficie di queſti terreni; meno poi come potrebber favorire la combuſtione, e l' alzata delle fiamme: pare anzi più naturale che doveſſero portarſi via tali materie, diluirle, e lavarne il terreno. All' incontro attenendoci alla noſtra ſpiegazione, ben ſi vede che queſte pioggie medeſime poſſono, anzi devono per via dello ſcolo delle lor acque nelle cavità ſotterranee, ove io pongo il ſerbatojo dell' aria infiammabile, aumentare l' emiſſione di coteſt' aria attraverſo gli ſcrepoli e la poroſità del terreno. Per conſeguenza quanto più copioſi ſaranno gli ſcoli d' acqua che penetrano là dentro, tanto maggior quantità di aria verrà coſtretta a dar luogo, e ſcappar ſuora per le dette ſtrade. Un' immagine noi abbiamo di ciò nella mia *lucerna ad aria infiammabile* (*a*) ; perocchè a miſura che ſi apre di più la chiave o robinet, per laſciar cadere un più groſſo filo d' acqua dal recipiente ſuperiore nell' inferiore pieno d' aria infiammabile, la fiamma, che eſce del tubetto adattatovi, ſi fa più grande ed alta.

Terminerò queſta Memoria con una breve deſcrizione d' un apparecchio, ch' io ho immaginato per reiterare ſimili ſperienze a piacimento; poco parendomi l' eſempio propoſto della lucerna ad aria infiammabile, ſe non giungeva a rappreſentare in altro modo, e con più perfetta imitazione le fiamme dei terreni ardenti. Ho dunque coſtrutta una grande caſſa, che riempio d' aria infiammabile. Nella parte ſuperiore, oſſia coperchio, ſon praticati qua e là de' piccioli fori, e in qualche luogo ſonovi dell' aperture più larghe con ſopra fili di ferro incrocicchiati o ramatine adattate : il tutto però è ricoperto da groſſa ſabbia, pietruzze, feſtuche ecc. con a luogo a luogo dell' erba; per dargli così l' apparenza di un terreno naturale. Le coſe in tal modo diſpoſte, io verſo dell' acqua con un innaffiatojo (per imitare così anche la pioggia) ſopra un luogo di queſto artificiale terreno, ove ho accomodato un canale che mette nell' interno del recipiente. Toſto che queſto comincia a ricever acqua, l' aria infiammabile coſtretta a dar luogo ſcappa dai piccoli fori, e attraverſo la ſabbia e i mucchj di pietruzze onde ſon ricoperti : allora gettandovi un zolfino acceſo, ſi alza una bella fiamma cerulea, che creſce o decreſce a miſura che la pioggia e i rivoletti che ſcorrono ſono più abbondanti e portan più acqua

---

(*a*) E' ſtato ſtampato a Strasburgo un opuſcoletto col titolo *Deſcription & uſage de quelques lampes à air inflammable* 1780, dove l' autore, che è il Profeſſore *Ehrmann*, attribuiſce l' invenzione al Sig. *Fürſtenberger* di Baſilea; quando il vero ſi è, che avendo io il primo immaginato e coſtrutto più d' una di tali lucerne, e ridottele a ſegno di ſervire *d' accendilume* fin dalla primavera del 1777, poco dopo cioè l' altra mia invenzione della *piſtola ad aria infiammabile*, ne aveva moſtrata l' idea nell' autunno ſeguente all' iſteſſo Sig. *Fürſtenberger* non ſolo, ma al Sig. *Barbier* di Straſburgo, e a diverſi altri in occaſione d' un viaggio che feci. Non parlo di que' molti, a cui già aveva moſtrata tal macchina a Como e a Milano. Nel 1779 poi epoca anteriore ancora d' un anno alla pubblicazione dell' operetta del Sig. *Ehrmann*, ebbi occaſione di mandare una di queſte lucerne o accendi-lumi a Firenze per Mylord Principe di *Covvper*, a cui l' aveva già da un pezzo promeſſa.

nell' interno. Talvolta la fiamma ſi tien così baſſa, che rimane naſcoſta tra i piccioli ſaſſi, e negl' interſtizj della ſabbia, talmente che ſi terrebbe per eſtinta; ma queſta fiamma che ci cova ſotto è pronta a ſorger alta e farſi vedere, toſtochè ſi verſi novella acqua e ne ſcorra pel canale nel ricettacolo in copia ſufficiente. Non voglio laſciar di dire, che ſi poſſono ripetere ſopra queſto terreno ardente artificiale tutte le ſperienze, che ho fatte ſopra il terreno ardente naturale di *Pietra-mala*: ſi può ſopprimere queſta o quella fiamma, impedendo l' uſcita all' aria infiammabile, o col bagnare e comprimere la terra in quel tal ſito, o in altra maniera: ſi può, formandovi delle foſſette e colmandole d' acqua, far naſcere e il ribollimento di eſſa per le gallozzole di aria che vengono a galla, e gli altri fenomeni delle vere fontane ardenti ecc.

Ecco come ſono riuſcito a rappreſentare le più comuni apparenze e gli accidenti delle fontane e dei terreni ardenti, ſeguendo le idee, che fin dapprincipio mi era formato dell' origine e natura di tai fuochi. Una sì perfetta raſſomiglianza non dovrebbe laſciar luogo ad alcun dubbio, quand' anche non vi foſſero tutte le prove dirette, che dimoſtrano l' eſiſtenza dell' aria infiammabile ſtanziante ſotto il terreno di *Pietra-mala*, e il continuo sgorgo ce ne fan vedere, e rendono per ogni maniera palpabile. E che ſi ricerca di più per una piena convinzione? Poſſo dunque dire di aver bene accertata l' origine di un fenomeno bello e ſingolare, e di aver aſſegnata giuſtamente una delle parti all' aria infiammabile nativa ſulla ſuperficie della terra. Chi ſa che un giorno non ſi verifichino anche le altre idee ch' io ho avventurate nelle mie Lettere ſull' aria infiammabile (*a*), riguardo all' influſſo e giuoco che può avere tal aria al di ſopra della terra nelle differenti regioni dell' atmosfera, concorrendo coll' elettricità alle meteore ignee? Queſte idee non ſarà inutile l' averle arriſchiate, ſe ſerviranno almeno a portar più lungi le oſſervazioni e le ſperienze.

(*a*) Lett. IV. e V.

SAGGIO

Di una nuova Teoria del movimento delle acque pei Fiumi, e

NUOVO METODO

Per trovare colla ſperienza la quantità dell' acqua corrente per un fiume.

Del Sig. TEODORO BONATI Matematico di Ferrara.

Saggio di una nuova teoria del movimento delle acque pei fiumi.

1. IL P. *Caſtelli* Caſſinenſe fu quegli, che nel 1640 gettò il primo fondamento della Scienza de' fiumi con quel ſuo teorema, che qualora un fiume non creſce, nè cala, e che in conſeguenza ſi trova in uno *ſtato di permanenza*, per ogni ſua ſezione paſſa una egual copia di acqua in un tempo ſteſſo, qualunque ſiaſi l' ineguaglianza di quelle ſezioni. Stabilì indi, che le velocità dell' acqua nei fiumi foſſero in ragione delle altezze dell' acqua ſopra il fondo, ma col ſolo fondamento di alcune ſue ſperienze fatte in piccolo con canali artefatti; e ſi vede che inteſe di velocità medie, ſenza cercare ſe la velocità ſia la medeſima dalla ſuperficie al fondo, oppure ſe creſca, o ſcemi, e con qual legge.

2. Domenico *Guglielmini* fece delle ſperienze ora con un vaſo parallelepipedo mantenuto ſempre pieno di acqua mentre queſta uſciva per un foro fatto in una ſponda del vaſo, ed ora con canali artefatti. Le prime davano, che le velocità pel foro foſſero in ragione ſudduplicata delle altezze dell' acqua ſopra il foro. Nelle ſeconde poi le velocità recedettero non poco sì dalla ragione ſemplice delle altezze, che dalla ragione ſudduplicata delle altezze ſuddette, come ſi vede nella Prefazione al trattato *De menſura aquarum fluentium* ſtampato in Ginevra l' anno 1719. Trattandoſi di determinare le velocità dell' acqua pei fiumi, parea veramente che le ſe-

conde, perchè fatte con canali, che ſono più analoghi ai fiumi che un vaſo parallelepipedo, foſſero da preferirſi alle prime: eppure queſte non le deſcriſſe nemmeno, e traſcurandole affatto ſi attenne alle prime; ed ecco in compendio il ſuo ſiſtema.

3. La vaſca *QZA* (*fig.* 1.) ſomminiſtri inceſſantemente acqua al fiume del fondo inclinato *ODE*. Si prolunghi la linea di queſto ſino all'incontro della ſuperficie dell'acqua della vaſca, cioè fino al punto *A* da denominarſi *origine del fiume*, e tirata l' orizzontale *AB*, e la *BD* normale al fondo, ſia *DC* l' altezza dell' acqua della ſezione in *D*. L' Autore nel lib. 2. prop. 2., e ſeguenti ſtabiliſce, che le velocità dell' acqua per quella ſezione (preſcindendo dalle reſiſtenze) debbano eſſere le medeſime, che avrebbe l' acqua uſcendo liberamente per un' apertura eguale alla detta ſezione, e fatta nella ſponda *BD* di un vaſo *BDA* mantenuto pieno di acqua ſino in B, le quali velocità nei punti *D*, *G*, *C*, ecc. ſarebbero eguali alle velocità di un grave caduto dalle altezze dell' acqua inſiſtente, o ſia come le radici quadrate delle altezze *DI*, *GL*, *CM*; e però eſprimibili colle ſemiordinate corriſpondenti *DE*, *GH*, *CF* di una parabola conica *BFE*; e ciò perchè egli ſi perſuadeva, che ogni particella di acqua giunta a qualunque punto *G* della ſezione *DC* debba avere la velocità di un corpo ſolido diſceſo liberamente ſopra un piano liſcio, ed inclinato dall' origine *A* del fiume fino in *G*, la quale velocità ſi trova appunto eguale a quella del medeſimo corpo allorchè foſſe piombato dall' altezza *LG*. Sopra queſto fondamento travagliò tutto quel trattato pieno di propoſizioni aſſai belle, e che reggendo il fondamento ſarebbero eſtremamente utili.

4. Se l' acqua in *CD* colle velocità *CF*, *GH*, ecc. perdeſſe la ſua gravità, allora sì che potrei concepire come l' acqua inferiore alla ſezione *CD*, o ſia l' acqua *CDK*, non foſſe per fare veruna remora all' altra, che paſſar deve ſucceſſivamente per *CD*, perchè ſupponendo inoltre l' acqua fluidiſſima, ed il fondo, e le ſponde affatto liſcie, vedrei come ogni particella *G*, ed ogni altra componente un filamento *GV* in virtù della propria inerzia potrebbe ritenere la velocità *GH*, ch' ebbe in *G*, e la ſteſſa direzione *GV*, con che non potrebbe opporſi in veruna maniera alle altre particelle,

che ſuccedono in *G* colla medeſima velocità, e direzione. Ma ſubito ch' io conſidero, che l' acqua *CDK* è grave, toſto io vedo che gli ſtrati ſuperiori premono gl' inferiori, e che premendoli tendono a ſchiacciarli, ed inducono in eſſi un conato di ſpanderſi a tutte le bande, ed in conſeguenza anche all' indietro verſo l' origine del fiume, tutto che ſi trovi in moto verſo la foce; il qual conato all' indietro dell' acqua *CDK* dee fare una remora al movimento dell' acqua, che ſuccede in *CD*, onde queſta non potrà altrimenti muoverſi per *CD* con quella ſteſſa libertà, colla quale uſcirebbe dall' apertura libera fatta nella ſponda del vaſo *BDA*, come richiederebbe il ſiſtema dell' Autore.

5. Egli è poi certo, che queſta teoria non ha avuto luogo nemmeno proſſimamente nè nelle accennate ſperienze del *Caſtelli*, le quali furono ripetute da Gio. Domenico *Caſſini* in Roma, e con lo ſteſſo evento; nè lo ha avuto in quelle del *Guglielmini* ſteſſo, tutto che sì quelle, che queſte ſieno ſtate fatte con canali artefatti, cioè retti, e col fondo, e colle ſponde liſcie, e nei quali perciò le reſiſtenze, che poſſono naſcere dalle ſcabrezze, ed ineguaglianze dell' alveo, devono eſſer montate a poco.

6. Meno poi ſi verifica la ſteſſa teoria nei fiumi naturali, perchè queſti atteſe le reſiſtenze, che derivano dalle tortuoſità, ed ineguaglianze degli alvei, ſono ben lontani dall' avere la velocità richieſta dalla teoria del *Guglielmini*, cioè quella che compete alle diſceſe delle loro acque, le quali perchè provenienti da origini ben alte dovrebbero avere delle velocità ſorprendenti e tali, che neſſun fiume ſarebbe navigabile.

7. Nè ſuſſiſte punto l' applicazione, che fa di queſta teoria il P. *Grandi* al caſo delle reſiſtenze. Sia *DF* (*fig.* 2.) la velocità attuale alla ſuperficie *DK* di un fiume *DL* da trovarſi colla ſperienza, e *DE* ſia l' altezza competente alla velocità *DF*, ed *EFH* una parabola conica col vertice in *E*, ed *ACI* ſia un' altra parabola dello ſteſſo parametro, che la prima, e col vertice in un punto *A*, che ſia a livello della vera origine del fiume nel ſenſo del *Guglielmini* (3). Secondo il *Grandi* le velocità dalla ſuperficie *D* fino al fondo *G* del fiume ſenza le reſiſtenze ſarebbero le ſemiordinate *DC*,

BM, *GI*, come diſſe il *Guglielmini*; ma atteſe le reſiſtenze incontrate dall' acque nel loro cammino dall' origine vera ſino alla ſezione *DG*, ſaranno *DF*, *BN*, *GH*, come ſe l' acqua foſſe partita da una origine della ſola altezza *DE*, che dall' Autore ſi chiama altezza dell' *origine equivalente*.

8. Ma ſi oſſervi, che le reſiſtenze maggiori, ed in conſeguenza i maggiori ſcemamenti di velocità devono trovarſi preſſo il fondo, laddove giuſta il *Grandi* lo ſcemamento maggiore di velocità caderebbe alla ſuperficie, giacchè $CF > MN > IH$, come facilmente ſi comprende. E qui giova il notare, che lo ſteſſo P. *Grandi* non fu già intieramente pago di queſto ſuo ſiſtema *eſſendomi paſſate* (egli dice nella Prefazione) *per la mente altre idee di nuove ipoteſi, le quali mi ſi rappreſentavano in aria di maggiore veroſimiglianza*.

9. Dopo tutto ciò ſiami lecito, ch' io eſponga brevemente ciò, che ho penſato più volte intorno al moto delle acque pei fiumi. *CD* ſia il fondo inclinato di un tratto regolare di un canale (*fig.* 3.), ed *AB* ſia la ſuperficie dell' acqua, la quale ſia più inclinata, che il fondo, cioè con eſſo convergente. S' intenda diviſa l' altezza *AC* in tante parti eguali, per eſempio *AP*, *PT*, *TC*, ed in altrettante parti eguali *BR*, *RV*, *VD* s' intenda diviſa l' altezza *BD*. Supporrò, che le particelle *A*, *P*, *T* camminino per le linee *AB*, *PR*, *TV*, giacchè non vedo ragione, onde in un canale regolare debba accadere diverſamente. Si conſideri la particella *E* di un filamento *PR* dell' acqua. Se la verticale *ES* eſprimerà il peſo aſſoluto di eſſa, fatto il rettangolo *ZG*, ſarà *EG* la forza, colla quale quella particella viene ſpinta dalla gravità nella direzione del ſuo movimento verſo *R*. Lo ſteſſo ſi dica di ogni altra eguale particella *P*, o *G* del filamento *PR*, ognuna delle quali vien ſollecitata continuamente dalla gravità verſo *R* con una forza eguale alla *EG*, ch' è in ragione del ſeno dell' angolo $ESG = SEZ = PEt$ d' inclinazione del filamento *PR* all' orizzonte.

10. Così ogni altra particella *I* di un filamento inferiore *TV* viene ſpinta lungo la linea *TV* da una forza *IK* derivata dal proprio peſo aſſoluto *IQ*. Per eſſere però la linea *TV* meno inclinata all' orizzonte, che la *PR*, l' angolo $IQK < ESG$; onde ſe le due particelle ſaranno eguali, ed $IQ = ES$,

ſarà $IK < EG$. Dunque per queſta ſola ragione nel qui ſuppoſto caſo della ſuperficie convergente col fondo la velocità dalla ſuperficie andando verſo il fondo dovrebb' eſſere ſempre minore . Che ſe la ſuperficie foſſe parallela al fondo, anche tutti i filamenti *PR* , *TV* ſarebbero paralleli fra di loro , e le forze *EG*, *IK* ſarebbero eguali, e per queſta ſola ragione la velocità dalla ſuperficie ſino al fondo in queſto ſecondo caſo ſarebbe eguale. E ſe la ſuperficie *AB* divergeſſe dal fondo, anche i filamenti *PR*, *TV* ſarebbero divergenti, e la *EG* ſarebbe minore della *IK*, e per queſta ſola ragione in queſto terzo caſo le velocità dalla ſuperficie ſino al fondo ſarebbero creſcenti.

11. Codeſte forze *EG*, *IK*, che così agitano le particelle *E* , *I* , derivate dal loro proprio peſo , ſi poſſono dire forze intrinſeche alle medeſime particelle . Ma queſte ſteſſe particelle vengono inoltre agitate da altre forze ad eſſe eſtrinſeche, cioè dalle preſſioni delle altre particelle di acqua ad eſſe contigue , che le attorniano, e che le premono per tutti i verſi . E ſiccome per eſempio la particella *I* così premuta ſi muove nella direzione *IV* , è forza il dire che in qualunque altra direzione vi ſia l' equilibrio fra le preſſioni contrarie, che tendono a muovere la ſteſſa particella *I* . Altrimenti ſe mancaſſe un tale equilibrio, per eſempio nella direzione *IQ*, la particella *I* ſi muoverebbe in una direzione di mezzo fra la *IQ*, e la *IV*, e non nella ſuppoſta *IV*.

12. Baſterà pertanto che ſi eſaminino le preſſioni di quelle particelle contigue, che poſſono aver parte nel maggiore, o minor movimento della particella *I* nella ſola direzione *IV*. Si conſideri perciò l' acqua *ATVB* come diviſa in tante colonne verticali inſiſtenti a ognuna delle particelle minime acquee componenti il filamento *TV*, delle quali alcune ſieno *L*, *I*, *F*, le cui colonne inſiſtenti ſieno *LH*, *IO*, *FN*. Qualunque ſieno le velocità dell' acqua da *O* fino in *I*, ſarà ſempre vero che le dette colonne premeranno continuamente al baſſo con tutto il loro peſo , onde la particella *I* in virtù della gravitazione dell' acqua *OI* farà un conato a tutte le bande (come comunemente vien dimoſtrato) , ed in conſeguenza anche verſo *L* , proporzionale all' altezza *IO* . Ma a queſto conato verſo *L* ſi oppone l' acqua *HLI*, la quale reſpinge la ſteſſa

ſteſſa particella *I* verſo *F* con un conato proporzionale all' altezza del punto *H* ſopra il punto *I*, onde queſto prevalerà al conato contrario della *I* verſo *L* col peſo della colonna acquea *Hz* determinata dalla orizzontale *Oz*, e ſarà queſta un' altra forza della *I* ad eſſa eſtrinſeca derivata dall' acqua, che le ſovraſta, e l'attornia, la qual forza, o peſo della colonna *Hz* la agita verſo *V* unitamente alla forza *IK* derivata dalla gravità. Lo ſteſſo vale per ogni altra particella del filamento *TV*, come per la *F*, che viene agitata verſo *V* da una forza intrinſeca derivata dalla gravità, ed inoltre da una forza eſtrinſeca eguale al peſo della colonna acquea *Oy* determinata dalla orizzontale *Ny*.

13. Si vede, che codeſte forze eſtrinſeche proporzionali alle *Hz*, *Oy*, ecc. ſono in ragione del ſeno d' inclinazione della ſuperficie *AB* all'orizzonte, qualunque ſiaſi la profondità della particella *I* ſotto la ſuperficie, e qualunque ſiaſi la direzione *IV* del moto della *I* verſo *V*, e perciò anche quando una tal direzione invece di eſſere declive, come moſtra la figura, foſſe orizzontale, od anche acclive, come accade preſſo i fondi inferiori, ed acclivi dei gorghi, che s' incontrano nei fiumi, e preſſo il fondo di quei fiumi, che verſo i loro sbocchi in mare hanno il fondo acclive, come il Po grande, od anche preſſo il fondo acclive dei fiumi al loro accoſtarſi al ciglio di una qualche cateratta.

14. Quindi è, che per la ſola forza eſtrinſeca ora ritrovata di ogni particella *I* le velocità di queſte dovrebbero eſſere eſattamente eguali tanto alla ſuperficie, che ſotto la ſuperficie, e ſino al fondo.

15. Queſte due forze, una intrinſeca, che deriva dal proprio peſo di ogni particella, e l' altra eſtrinſeca, che deriva dalla preſſione dell' acqua inſiſtente all'acqua, e neſſun' altra, ſono le forze, che tendono ad accelerare l' acqua lungo il fiume continuamente, coſicchè ſe la loro azione non veniſſe diſturbata noi vedremmo i fiumi ſempre più veloci quanto più ci accoſtiamo allo sbocco. Ma queſto realmente non accade, giacchè allontanandoci dalla origine, ed arrivati per eſempio alla pianura, dove il fondo è tuttora declive, benchè meno, oſſerviamo la velocità ſcemata di molto, e talvolta la vediamo ſcemata anche vie più prima di arrivare allo sbocco.

16. Queſt' effetto deriva dalle reſiſtenze, che fanno all' acqua prima le tortuoſità del fiume, e poi le ſcabrezze del fondo, e delle ſponde, le quali ſcabrezze non ſi può negare che ritardino l' acqua ſenſibilmente anche in diſtanza dal fondo, e dalle ſponde, benchè il ritardo ſia ſempre minore a miſura che ci ſcoſtiamo da quello venendo alla ſuperficie, e da queſte accoſtandoci al filone. E ſiccome le reſiſtenze, che derivano dalle ſcabrezze, giuſta le ſperienze fatte, crèſcono in ragione duplicata delle velocità, facilmente accade che continuando le medeſime ſcabrezze, e creſcendo la velocità per la continua azione delle accennate forze motrici, creſcono altresì le reſiſtenze, ed in maniera che preſto arrivano a pareggiare le forze motrici, con che l' acqua preſto giugne ad una velocità *terminale* conveniente alle condizioni particolari di un dato tratto di fiume. Che ſe andando più oltre nello ſteſſo fiume le ſcabrezze creſcano, la velocità diminuirà, e con eſſa caleranno anche le reſiſtenze, finchè queſte ſi equilibrino di nuovo con le forze motrici, e ſi abbia così un' altra velocità terminale conveniente alle circoſtanze di quell' altro tratto di fiume. Se ſcemaſſe, o creſceſſe la pendenza del fondo, e della ſuperficie, le forze motrici diverranno diverſe, e varia a proporzione riuſcirà la velocità terminale.

17. L' unico caſo da me contemplato, in cui la velocità ſotto la ſuperficie potrebbe eſſer maggiore, che alla ſuperficie, è quando la ſuperficie ſia divergente dal fondo (10). Ma queſto nei tratti regolari di un fiume non s' incontra, mentre anzi generalmente la ſuperficie piuttoſto converge col fondo, benchè di tanto poco, particolarmente a qualche diſtanza notabile dallo sbocco, che in certo modo ſi può conſiderarla come parallela al fondo. Ed in queſto caſo le forze riſpettive *EG*, *IK* rieſcono eguali, e per le coſe dette ai n. 10, 14, ſe non vi foſſero le reſiſtenze, la velocità dalla ſuperficie al fondo ſarebbe eſattamente la medeſima. E perchè nel filone la maggiore reſiſtenza deriva dal fondo, giacchè l' acqua colà è più vicina al fondo, che alle ſponde, la velocità nel filone ſarà minore preſſo il fondo, e poi creſcerà venendo verſo la ſuperficie prima più, e poi meno fino alla ſuperficie, coſicchè la velocità maſſima ſarà alla ſuperficie, e la ſcala delle velocità ſarà una qualche curva, come la *ABC*

(*fig.* 4.) dell' aſſe *DE*, eſſendo *DA* alla ſuperficie, ed *EC* al fondo.

18. Colla teoria finqui eſpoſta ſi comprende come un fiume, il quale abbia la ſuperficie più inclinata che un altro, in parità di circoſtanze dovrà eſſere più veloce dell' altro, perchè abbiamo veduto, che una delle forze motrici è in ragione del ſeno d' inclinazione della ſuperficie (13). Nel mio ſperimento XVIII contro *Genneté* a un canale artefatto del fondo *AH* (*fig.* 5.) con acqua corrente da *A* verſo *H* applicai una chiuſa *MF*, e l' acqua diſpoſe la ſuperficie come la *IFN*, e la velocità in *B* era maggiore che in *C*, ed in *D*. In *E* poi il moto era notabilmente accreſciuto, e più di tutto in *F*. In *G* il moto bene ſpeſſo era vorticoſo. Dimandai l' anno 1767 qual foſſe la forza, che muove l' acqua in *D*, e che fa creſcere la velocità in *E*. Ora dirò, che la forza movente l' acqua in *D*, ed in *E* è l' accennata al n. 12, e trovata al n. 13 in ragione del ſeno d' inclinazione della ſuperficie dell' acqua ſopra *D*, e ſopra *E*, e che la velocità in *E* è maggiore appunto perchè ivi l' inclinazione della ſuperficie ſi fa maggiore.

19. Creſcendo in un fiume l' altezza dell' acqua, ancorchè non creſceſſe l' inclinazione della ſuperficie, creſcerebbe la velocità, perchè l' acqua componente quell' altezza di più come più lontana dal fondo ſentirà meno le reſiſtenze di queſto, e potrà ubbidire più alle ſue forze motrici, che l' altra, che componeva la ſola altezza di prima, e ſi muoverà più, e metterà anche più in moto l' acqua ſottopoſta. Maggiormente poi creſcerà la velocità ſe, creſcendo l' altezza, creſca ancora l' inclinazione della ſuperficie.

20. Creſcendo la larghezza ſenza che ſcemi l' altezza e l' inclinazione di ſuperficie, le parti di mezzo del fiume ſaranno più lontane dalle ſponde, le cui ſcabrezze faranno perciò un minor ritardo al filone, onde queſto ſi muoverà più, e metterà più in moto il rimanente.

21. Egli è queſto il ſaggio di teoria del movimento delle acque pei fiumi, ch' io mi era prefiſſo di eſporre. Ora verrò eſaminando quanto queſta teoria ſi concilj colla ſperienza. Il metodo più inſinuato dagli Autori, ed il più applaudito per iſcoprire colla ſperienza il moto dell' acqua anche

ſotto la ſuperficie, è ſtato quello di un pendolo, o ſia di una palla *B* (*fig. 6.*) attaccata con un filo a un punto fiſſo *A* da immergerſi ſotto la ſuperficie *DE* dell' acqua di un fiume corrente da *D* verſo *E*, la quale perciò terrà la palla col filo lungi dalla verticale *AD* più, e meno ſecondo la diverſa velocità dell' acqua, ed il diverſo peſo ſpecifico della palla, pretendendoſi di poter ricavare così la velocità dell' acqua nel ſito della palla colla ſola oſſervazione dell' angolo di deviazione della parte del filo fuori dell' acqua.

22. Di queſta fatta di ſperimenti propoſti dal *Guglielmini*, dal P. *Grandi*, dall' *Ermano*, ed ultimamente dal chiariſſimo P. Ab. *Cametti* nella ſua *Mechanica fluidorum* l' anno 1777 ne vedo fatti non pochi dal *Zendrini*, dai Matematici di una Viſita al Po grande l' anno 1729, dal P. *Lecchi*, e dal Sig. *Michelotti*; i quali generalmente hanno trovato, che alle immerſioni più profonde della palla ha corriſpoſto un maggior angolo di deviazione del filo dalla verticale, e generalmente hanno convenuto, che le velocità dell' acqua nel ſito della palla foſſero in ragion duplicata delle tangenti dei detti angoli, d' onde ne verrebbe, che a maggiori profondità ſotto la ſuperficie corriſpondano velocità ſempre maggiori, affatto contro la mia teoria (17).

23. Due inavvertenze a mio giudicio ſi ſono commeſſe in queſto genere di ſperimenti dai loro Autori. L' una è, che quando la palla è immerſa a qualche profondità, l' angolo di deviazione del pendolo non deriva ſolamente dall' azione dell' acqua contro la palla, come eſſi hanno creduto, ma deriva ancora dall' azione dell' acqua contro quella porzione di filo, che ſi trova immerſa, ed eſpoſta all' acqua. Per la qual coſa quand' anche la velocità dell' acqua ſotto la ſuperficie, e fino al ſito della palla, ſi manteneſſe la medeſima che in ſuperficie, l' angolo di deviazione del filo, che ſi oſſerva fuori dell' acqua, dovrebbe neceſſariamente eſſer maggiore, che quando la palla foſſe appena ſotto la ſuperficie; e profondando la palla di più, il detto angolo creſcerebbe di più, perchè l' acqua agirebbe contro una porzione maggiore di filo.

24. L' altra circoſtanza non avvertita è, che il filo eſſendo pieghevole dee diſporſi ſott' acqua in una curva *EOF*, che vien detta *filare*, e per determinare la quale converrebbe

che foſſe nota la ſcala delle velocità dell' acqua, ch'è appunto quella che ſi cerca.

25. Da queſt' ultima conſiderazione ſi fanno paleſi altri due inganni de' ſoprannominati Autori: L' uno è, che hanno giudicato la palla nel punto *G* della retta *AE* prolungata, ed in conſeguenza alla profondità *IG*, che è minore della vera profondità *HF*. L' altro poi più intereſſante è, che hanno dedotto la velocità dell' acqua nel ſito da eſſi ſuppoſto della palla dalla grandezza dell' angolo *DAE* di deviazione del filo non ſommerſo, quando veramente non potrebbe deſumerſi che dall' angolo *cam*, che fa colla verticale *am* il diametro *ac* della palla, che parte dal punto *a* di ſoſpenſione della palla dal filo; il qual angolo ognun vede ch' è ſempre minore dell' angolo *DAE* (per eſſere $cam = iFn$, e $DAE = EnH > iFn$); e ſarà eguale all' angolo *DAB* nel caſo, che la velocità in *F* ſia eguale alla velocità in *B*; e ſarà anzi minore dell' angolo *DAB* nel caſo, che la velocità in *F* foſſe minore che in *B*.

26. Per tutte queſte ragioni i ſuddetti Autori hanno errato, e l' errore dev' eſſere ſtato maggiore ſecondo che la palla è ſtata di un peſo ſpecifico minore, e ſecondo che il filo è ſtato più groſſo, e più ſott' acqua. La groſſezza del filo ci vien taciuta da tutti; ma egli è certo, che quei fili hanno retto al peſo della palla, ed all' impreſſione dell' acqua contro la palla, dal che ſi può concludere, che la loro groſſezza non ſia ſtata indifferente, e traſcurabile, come me lo ha poi moſtrato lo ſperimento, che vengo a deſcrivere.

27. In un canale largo piedi 15 circa (parlerò a miſura di Parigi), e profondo ſei piedi, con un galleggiante trovai l' anno 1769, che la velocità dell' acqua in ſuperficie era di piedi 2. 4 per ogni minuto ſecondo. Nel fondo *GT* (*fig.* 7) del medeſimo canale preſſo un ponte di legno, che non anguſtiava punto il corſo dell' acqua, conficcai verticalmente una tavola *PB* di tale lunghezza, che ſuperava la ſuperficie *CD* dell' acqua, avendo fatto che la faccia *AB* foſſe parallela alle ſponde, o ſia a ſeconda del corſo dell' acqua diretto da *C* verſo *D*. Ben fermata la tavola con una mano in *O*, io immergeva a poco a poco l' aſta *OE* facendo ſtriſciare un riſalto *F* dell' aſta lungo la coſta *Pn* della tavola, intor-

no al quale riſalto *F* l' aſta potea aggirarſi accoſtandoſi alla tavola ora con l' eſtremità *E*, allorchè l' acqua inveſtiva con maggior ſorza la parte *FE* che l' altra *FC*, ed ora con l' eſtremo *O*, ſe l' acqua ſpingeva con più di forza la parte *FC* che l' altra *FE*.

28. Lo ſcopo mio era di trovare quella immerſione, in cui la forza dell' acqua contro *FE* ſi equilibrava con l' altra contro *FC*. Arrivato al punto di tale equilibrio io me ne accorgeva facilmente, perchè allora colla mano io ſentiva, che l' eſtremo *O* nè mi veniva ſpinto dall' acqua verſo la tavola, nè mi veniva allontanato dalla medeſima.

29. In uno di queſti ſperimenti la parte *FE* era di un piede, e tentando trovai il detto equilibrio quando *FC* fu di 11 pollici; il che moſtra, che quell' acqua fino alla profondità di quaſi due piedi ſotto la ſuperficie correva con una velocità minore, che in ſuperficie, però di poco. Nel ſecondo ſperimento io avea mutato luogo al riſalto *F* dell' aſta in maniera, che *FE* era di due piedi, e tentando di nuovo trovai il deſcritto equilibrio quando *FC* fu di un piede e mezzo: il che moſtra, che alla profondità di tre piedi e mezzo, o ſia di piedi 2. 6 ſopra il fondo, la velocità era ſenſibilmente minore che in ſuperficie.

30. Nel medeſimo ſito feci uſo di un pendolo. La palla era del diametro di due pollici, ed immerſa nell' acqua perdeva la metà del ſuo peſo. Il diametro del filo era due terzi di linea, e lo ſteſſo filo era attaccato a un punto fiſſo *A* (*fig.* 8) ſopra l' acqua *BD* piedi 2. 11. Nella prima immerſione il filo *AC* era di piedi 3. 6, e l' angolo *BAC* fu tale, che l' orizzontale *BF* riuſcì di pollici 18 proſſimamente, coſicchè la palla rimaneva ſotto la ſuperficie dell' acqua corrente alquanto meno di due pollici e mezzo.

31. Avendo dato al filo una lunghezza maggiore *AE* di piedi 6. 11, ebbi l' angolo *BAD*, eſſendo *BD* di pollici 32, e *DE* di piedi 2. 8. 4.

32. Le linee rette eguali *CG*, *EL* verticali eſprimano il peſo della palla nell' acqua, il qual peſo in *C* equivalerà a due forze *CK*, *CH*, ed in *E* a due altre forze *EN*, *EM*. Ma le due forze *CH*, *EM* devono equilibrarſi colle forze contrarie dell' acqua, le quali ſono come i quadrati delle ve-

locità in C, ed in E. Dunque ſecondo i ſoprannominati Autori i quadrati delle velocità in C, ed in E avrebbero dovuto eſſere $:: CH : EM :: GK : LN :: BF : BD$, ed in conſeguenza la velocità in C alla velocità in $E :: \sqrt{BF} : \sqrt{BD} :: \sqrt{18} : \sqrt{32}$ (vegg. n. 30. 35.) $:: \sqrt{(9.2)} : \sqrt{(16.2)} :: 3 : 4$, cioè ſecondo eſſi la velocità in E dovrebb' eſſere ſtata ſenſibilmente maggiore, che in C; dovechè ſecondo le ſperienze precedenti la velocità in E era ſicuramente minore, che in C (29, 30).

33. Dopo tutto ciò parmi di poter concludere, che l' uſo di tai pendoli non è punto al caſo per iſcoprire le vere velocità dell' acqua a qualche profondità notabile ſotto la ſuperficie, e che dalle ſperienze fatte con eſſi non ſi può tirare veruna conſeguenza nè favorevole, nè contraria a una qualche teoria.

34. Lo ſteſſo affatto convien dire di altri ſperimenti fatti in Po con una certa *Fiaſca* riferiti dal P. *Grandi* alla fine del ſuo primo libro, e da Euſtachio *Manfredi* nelle Annotazioni al trattato della natura de' fiumi del *Guglielmini*. La detta Fiaſca, che dal P. *Grandi* ſi dice *Idrometrica*, era ſtata propoſta dal *Nadi* del 1721 in occaſione di una Viſita al Po. Era queſta un vaſo *A* (*fig.* 9) di latta più lungo che largo, con un ſottil foro in *E* aperto verſo la ſommità della parte più ſtretta, e con un tubo anneſſo *BG*, per cui paſſava un filo attaccato a una ſuſta, coſicchè tirando il filo in *G* il foro *E* reſtava aperto, e rallentando il filo quel foro reſtava chiuſo. Immerſa la Fiaſca a varie profondità ſotto la ſuperficie *MN*, e tenuto il foro *E* aperto per un dato tempo, e rivolto contro la corrente, l'acqua entrava per *E* mentre l'aria contenuta nella Fiaſca poteva uſcire pel tubo *BG*. Le quantità di acqua, che in tempi eguali entrarono per *E* nella Fiaſca tenuta a diverſe profondità, furono ſempre in ragione ſudduplicata delle altezze dell' acqua del fiume ſopra il foro *E*; dal che ſi volea arguire, che tale foſſe la ragione delle velocità dell' acqua del Po a quelle diverſe profondità. Ma ſiccome lo ſteſſo avvenne quando le ſperienze furono ripetute in un' acqua ſtagnante, ſi dovette concludere che il metodo era inutile.

35. Altre ſperienze ſono ſtate fatte col *Tubo ricurvo del Pitot*. Adoperò queſt' Autore un tubo di vetro *AEF* ricur-

vo in E (*fig.* 10) aſſicurato nell' acqua corrente con certa macchinetta da eſſo deſcritta nelle Memorie dell' Accademia Reale delle Scienze di Parigi all' anno 1732. Immerſe il tubo a diverſe profondità *CE* ſotto la ſuperficie *CD* della Senna, e tenendo la bocca *F* diretta contro il corſo dell' acqua, notò le altezze *CB*, cui ſaliva l' acqua dentro il tubo ſopra il livello dell' acqua eſteriore *CD*. La velocità, che può acquiſtare un grave cadendo liberamente dall' altezza *BC* trovata in ciaſcuna immerſione, era ſecondo l' Autore la velocità dell' acqua in *F*. Il *Zendrini* (*Leggi* ecc. *delle acque correnti* pag. 134) ſoſpetta, che l' altezza *BC* non ſia proporzionale alla forza dell' acqua in *F*, e che parte di queſta forza s' impieghi in penetrare attraverſo il cilindretto acqueo *EC* ſtagnante nel tubo; ed il Sig. Franceſco Domenico *Michelotti* (*Sperimenti Idraulici* vol. I. pag. 148) credette, che la forza della corrente in *F* doveſſe miſurarſi non dalla ſola altezza *CB*, ma da tutta l' altezza *EB*, coſicchè le velocità in *F* ſarebbero come le radici quadrate delle altezze *EB* per eſſere le forze come i quadrati delle velocità. Io per accertarmi del vero col fatto mi ſon ſervito di un tubo *AEF* di latta, dentro il quale avea inſerito una bacchetta ſottile, e leggera *GB*, lunga come *AE*, che galleggiava ſopra l' acqua mediante un pezzo di ſughero applicato all' eſtremo *B* di modo, che la porzione *AG* eſterna della bacchetta mi dinotava l' altezza del cilindro acqueo *EB* dentro il tubo; ed in varie immerſioni più, e meno profonde la porzione *CB* fu proſſimamente la medeſima tuttochè variaſſero le altezze *BE*. E ſiccome queſto mi accadde in quel medeſimo luogo, dove io mi era accertato colle ſperienze del n. 29, che l' acqua correva preſſochè colla medeſima velocità in ſuperficie, e ſotto la ſuperficie fino alla profondità del mio tubo, mi ſono con ciò aſſicurato che non abbia luogo la difficultà del *Zendrini*, e del Sig. *Michelotti*.

36. Di più il Sig. *Michelotti* dopo un qualche carteggio con me replicò le ſue ſperienze, e nel ſuo ſecondo Volume ſtampato in Torino l' anno 1771 dice di aver immerſo un tubo ricurvo di latta ſimile al mio colla bocca inferiore rivolta ſecondo la direzione del corſo dell' acqua, e di aver oſſervato, che allora nel tubo l' acqua ſi componeva al livello della

della eſteriore, e che rivolta la ſteſſa bocca contro la corrente l' acqua interna ſi elevò nel tubo ſopra l' eſterna; e ſpiega il fenomeno con dire, che nel primo caſo la ſola preſſione dell' acqua eſteriore facea ſalire l' acqua nel tubo, e che nel ſecondo caſo alla ſemplice preſſione ſi aggiunſe una forza prodotta dal movimento dell' acqua corrente; e perciò conviene, che in tai caſi la celerità dell' acqua ſi poſſa argomentare dal maggior alzamento dell' acqua dentro il tubo ſopra l' acqua al di fuori del tubo alla maniera del *Pitot*.

37. Ma in diverſe immerſioni fatte dal *Pitot* del ſuo tubo ſotto il ponte reale della Senna, delle quali la maſſima fu a tre piedi ſotto la ſuperficie, l' acqua dentro il tubo ſi alzò ſempre egualmente ſopra l' acqua eſterna. Dunque colà per le coſe dette fino a tre piedi ſotto la ſuperficie la velocità fu ſenſibilmente la medeſima.

38. Il chiariſſimo Sig. Ab. *Ximenes* negli anni 1778, 1779 adoperò la ſeguente macchina. *AB* (*fig.* 11) è un albero verticale, che potea muoverſi liberamente intorno ai perni *A*, e *B*. Alla rotella *C* era avvolto un filo, che paſſava ſopra una puleggia *D*, e che portava un peſo *E*. A qualunque profondità *MN* ſotto la ſuperficie *GH* dell' acqua potea fermare all' albero *AB* una ventola *F* con due braccioli *a*, *c*; ed il peſo *E* dovea eſſere tale, che teneſſe la ventola preſſochè ferma normalmente contro il corſo dell' acqua. Dalle miſure della ventola, dei ſuoi braccioli, della rotella, e del peſo *E* di ciaſcuna ſperienza deduce l' altezza di quel priſma di acqua, che premeva la ventola, la quale altezza è quella, che conviene a un corpo cadente per acquiſtare la velocità dell' acqua nel ſito della ventola. Da una ſerie di ſperienze deduſſe, che dalla ſuperficie fino a un certo punto verſo il fondo l' acqua ſi manteneva egualmente veloce; e che da quel punto fino al fondo la velocità diveniva ſenſibilmente ſempre minore.

39. Finalmente dirò di uno ſperimento, che per quanto io ſappia è ſtato il primo ad eſſere tentato per inveſtigare in qualche maniera nei fiumi il rapporto della velocità dell' acqua ſotto la ſuperficie a quella della ſuperficie: ed è quello del P. *Cabeo* Ferrareſe con un' aſta *AB* (*fig.* 12) di legno con un corpo in *B* di un peſo ſpecificamente maggiore di

quello dell' acqua, e con alcune veſſiche in *C*, buttata nell' acqua di un fiume colla ſuperficie *MN*, e corrente da *M* verſo *N*. Ecco che ne dice l' Autore nel ſuo libro primo delle Meteore ſtampato in Roma l' anno 1686 al teſto 60: *Si enim poneres haſtam in aqua ſtagnanti, pars eminens* AC *eſſet perpendicularis ad ſuperficiem aquæ; ſimiliter ſi moveatur tota æquali velocitate, ſervaret ſemper eamdem poſitionem. At videbis partem eminentem haſtæ ſupra ſuperficiem aquæ inclinari ad partem anteriorem, quod eſt evidens argumentum ſuperiorem partem aquæ velocius fluere.*

40. Fin qui ho parlato degli ſperimenti fatti da altri, non avendone inſerito dei miei, che per incidenza, e parmi di aver moſtrato, come di eſſi alcuni non ſono punto atti a dinotar bene le velocità ſotto la ſuperficie, come ſono tutti gli ſperimenti fatti con Pendoli, e gli ſperimenti fatti colla Fiaſca Idrometrica del *Nadi*; e che tutti gli altri moſtrano chiaramente, che nei ſiti degli ſperimenti le velocità ſotto la ſuperficie o ſono ſtate eguali alla velocità della ſuperficie, o ne ſono ſtate minori, come richiede generalmente la mia teoria. Ora in conferma di queſto ſoggiungerò alcuni altri ſperimenti miei.

41. Di due ſperimenti fatti da me in Roma l' anno 1763 non farò parola, perchè fatti in piccolo, e perchè ſi poſſono vedere in due Raccolte una ſtampata in Parma, e l' altra in Firenze, e ſono i due primi dell' *Aggiunta di Sperimenti* contro *Genneté*; onde paſſerò ad altri, de' quali il primo ſia il da me replicato più volte trovandomi in qualche barca. Ho fatto, che queſta ſi muova a ſeconda del corſo dell' acqua, e colla velocità dei galleggianti vicini. Eſprima *AC* (*fig.* 13) la ſuperficie di quell' acqua corrente da *A* verſo *C*. *DE* era un' aſta di legno lunga ſei, otto, dieci piedi (talvolta era un remo), ch' io immergeva nell' acqua verticalmente, coſicchè reſtava fuori dell' acqua con una porzione *BD*, e per tenerla in tal poſitura io non impiegava altra forza che quella di premere colla mano in *D* in giù quanto baſtava per impedire, che l' aſta, perchè di un minor peſo ſpecifico dell' acqua, non veniſſe ſpinta all' insù dall' acqua medeſima. E quando il corſo della barca diveniva per eſempio alquanto maggiore di quello dei galleggianti, l' aſta ſi

piegava con ſorza girando l'eſtremo *E* verſo *A*; ſuccedendo il contrario qualora la barca diveniva, anche per poco, più lenta dei galleggianti vicini. Dal che ſi vede manifeſtamente, che quando la barca andava del pari coi galleggianti, e che l'eſtremo *E* non mi veniva portato nè verſo *A*, nè verſo *C*, ſi vede, diſſi, che l'acqua ſotto la ſuperficie non correva ſenſibilmente più, che in ſuperficie, perchè ſe aveſſe corſo più ſotto la ſuperficie, mi avrebbe portato l'eſtremo *E* verſo *C*.

42. Altre volte eſſendo pure in barca ho immerſo nell'acqua dei mattoni appeſi ognuno ad uno ſpago, che venivano tenuti da me, e da altri colla mano ſporta fuori della barca. Gli ſpaghi erano di diverſe lunghezze, e quando mi trovava colla barca in ſiti regolari del fiume, e che la barca andava del pari coi galleggianti vicini, le porzioni di ſpago fuori dell'acqua erano ſenſibilmente verticali, a riſerva dei più lunghi (i cui mattoni attaccati ſi accoſtavano al fondo del fiume), de' quali le porzioni fuori dell'acqua ſi vedevano ſenſibilmente inclinate all'avanti, dinotando così, che preſſo il fondo la velocità diveniva minore.

43. Nel ſito deſcritto al n. 27, e dove mi era aſſicurato, che l'acqua alla profondità di due piedi e mezzo circa correva con una velocità minore, ma di poco, che in ſuperficie, buttai una canna *DE* avente in *E* un mattone di tal peſo, che dopo pochi bilanciamenti reſtò immerſa con una porzione *BE* lunga non più di tre piedi, eſſendo traſportata dall'acqua con una poſitura ſenſibilmente verticale, a riſerva di alcuni pochi tratti, nei quali camminò inclinata all'avanti ma di poco. Altre volte, e non poche, ho ripetuto queſto ſperimento nel Po grande ſervendomi colà non di canne, ma di aſte di legno ora con mattoni, ed ora con piombo in *E* di tal peſo, che l'aſta rimaneva ſopra l'acqua con una lunghezza di un piede, o due, eſſendo il Po ora con acqua mediocre, ed ora in piena, ed eſſendo la porzione *BE* talvolta di 10, talvolta di 15, ed una volta di 20 piedi; ed in queſti caſi vidi tali aſte qualche volta ſenſibilmente verticali, ma per lo più inclinate all'avanti, benchè di poco, a riſerva delle volte, ch'io mi ſono incontrato dove l'acqua avea dei moti irregolari, nei quali qualche volta l'aſta è ſtata

inclinata all' indietro, ed una volta avendo due aſte una più lunga dell' altra, una di queſte era inclinata a una parte, e l'altra a un' altra nel medeſimo tempo, indizio di un movimento vorticoſo.

44. Ecco pertanto un' altra mano di ſperimenti, dai quali ho appreſo, che nei ſiti regolari dei fiumi le velocità dalla ſuperficie al fondo o ſono ſenſibilmente le medeſime fino a un certo punto poco diſtante dal fondo, come dice di aver oſſervato il Sig. Ab. *Ximenes*, o (il che mi ſembra più naturale) decreſcono, ma da principio aſſai poco, facendoſi poi gradatamente vie maggiore il decreſcimento a miſura che ſi va più verſo il fondo, e con quella legge, che non è per anche nota. Per la qual coſa parmi di dire a ragione, che la teoria da me eſpoſta concorda aſſai bene colla ſperienza; deſiderando io per altro, che altri ancora ſi occupino in eſperimenti di queſta natura; perchè inſtituite con metodo più ſerie di conſimili ſperienze in fiumi diverſi, ed in iſtati diverſi, potrebb' eſſere, che ſi arrivaſſe un dì ad avere una legge delle velocità delle acque correnti pei fiumi ſufficientemente proſſima al vero, colla quale date le miſure, e le condizioni di un fiume ſi poſſa ſenz' altro dire qual ſia la ſua portata, punto molto intereſſante pel regolamento dei fiumi. Ma finchè ci mancano codeſte ſerie di ſperimenti come trovare la portata di un fiume? Sarà queſto il ſoggetto dell' Articolo, che ſegue.

Nuovo metodo per trovare colla ſperienza la quantità dell' acqua corrente per un fiume.

45. Per miſurare l' acqua corrente per un piccolo canale largo per eſempio tre palmi, ed alto uno, ſe il canale era irregolare, il P. *Caſtelli* (prop. 1. l. 2.) applicava ad eſſo un Regolatore, o ſia un letto orizzontale di legno, e due ſponde verticali di legno; ed inferiormente al Regolatore inteſtava il canale, e ad una ſua ripa preſſo il Regolatore applicava tanti ſifoni, che aſſorbiſſero tutta l' acqua ſopravveniente di modo, che il canale per l' applicazione di eſſi non creſceſſe, nè calaſſe. E trovata colla ſperienza quant' acqua ſcaricava in un dato tempo ciaſcun ſifone ſapeva dire la *portata* del

canale ; o ſia quant' acqua paſſava per una ſezione regolare di eſſo (qual era quella del Regolatore) anche non eſſendovi l' inteſtatura. Trattandoſi in ſecondo luogo di un canale più groſſo, per eſempio largo 20 palmi, ed alto 5, per averne la portata applicava a queſto pure un Regolatore o di legno, o di muro, e ſuperiormente a queſto derivava dal canale un canaletto largo tre, o quattro palmi applicandovi un Regolatore. Coi ſifoni miſurava la portata di queſto, e dal rapporto delle altezze, e larghezze dell' acqua corrente pei due Regolatori argomentava (colla ſua regola delle portate in ragione delle larghezze, e dei quadrati delle altezze) qual foſſe la portata del canale maggiore. Accadendo in terzo luogo di dover trovare la portata di un fiume groſſo, proponeva, che ſi applicaſſe a queſto un Regolatore, e che dal fiume ſi divertiſſe un canale miſurabile, come il precedente, e che colla regola accennata ſi trovaſſe anche la portata del fiume groſſo. Non gli facea caſo la ſpeſa grave che potrebbe occorrere per fare tai rilievi dicendo, che i concetti grandi, come quello di miſurare l' acqua di un fiume groſſo, non devono caſcare in mente, che a perſone grandi, a Principi potenti, e che poſſono fare una qualche ſpeſa per isfuggire altre ſpeſe maggiori, che ſi farebbero per mancanza della cognizione della quantità ricercata dell' acqua, e per isfuggire anche dei diſguſti fra i medeſimi Principi.

46. Ma quantunque alla regola delle velocità come le altezze, o ſia delle portate come le larghezze, ed i quadrati delle altezze, ſi conformino più ſperienze in piccolo ; pure perchè tal regola è tuttora ſenza dimoſtrazione, nè è ancora ben verificata da ſperienze in grande, non vedo, che queſto metodo del *Caſtelli* per trovare la miſura dell' acqua corrente per un fiume ſia da abbracciarſi.

47. Il *Guglielmini* pure ſi vale di uno, o più Regolatori, ma in una maniera diverſa. Propone, che al Regolatore ſi applichi una Cateratta, la quale ſi cali fino a un piede, o due, ſotto la ſuperficie dell' acqua corrente pel Regolatore, con che l' acqua ſarà obbligata a gonfiarſi ſuperiormente alla cateratta. E ſupponendo le velocità dell' acqua corrente per quella ſezione così diminuita come le ordinate di una parabola conica col vertice alla ſuperficie dell' acqua ſoſtenuta, tro-

va la quantità dell' acqua del fiume. Se il fiume è così grande, che non vi ſi poſſa adattare un Regolatore, ſuggeriſce, che col metodo preſcritto ſi miſuri l' acqua dei fiumi minori, che lo compongono, come meglio ſi può vedere alla fine del lib. 4. della *Miſura delle acque correnti* dove alla difficultà della molta ſpeſa riſponde col ſentimento ſopra riferito del P. *Caſtelli*.

48. Ma ho moſtrato, che la velocità delle acque correnti non ſono già come qui vuole l' Autore (4, 5, 6,). Dunque nè anche queſto metodo del *Guglielmini* è al caſo noſtro.

49. Altri hanno ſcielto più perpendicolari di una ſezione del fiume, e adottando per ſicuro l' uſo del pendolo hanno con queſto indagato la velocità dell' acqua a diverſe profondità di ciaſcuna perpendicolare, indi trovata una velocità media fra tutte le preteſe trovate velocità hanno multiplicato queſta nella ſezione ſteſſa. Ma ho moſtrato quanto ſia fallace l' uſo del pendolo (21, 22, 23, 24, 25), perciò fallaci ſaranno ſtati ancora i riſultati di tai rilievi.

50. Potrebbe cader in penſiero a taluno di adoperare il tubo ricurvo del *Pitot* in luogo del pendolo. Ma convien ſapere in primo luogo, che l' acqua interna al tubo è ſoggetta ad oſcillazioni ſenſibili, particolarmente dove il corſo dell' acqua è più veloce, onde conviene ſciegliere un' altezza di mezzo con una eſtimazione oculare, che non può tenerſi per molto preciſa. Oltre di che nei fiumi grandi, ed in tempo di piena, come poter fermare il tubo nel filone, ed a profondità conſiderabili? Anche la ventola del Sig. Ab. *Ximenes* è ſoggetta alle ſue oſcillazioni, ed è difficile il praticarla in tempo di acque alte. L' Autore non ne ha fatto uſo finora in un' altezza di acqua, che ſia maggiore di piedi 9. 9 di Parigi. Promette di tentare con eſſa delle ſperienze nell' Arno in tempo di mezze piene. Ma in tempo di piena diſpera affatto, mentre che il maggior biſogno di tali ſperienze è nel colmo delle piene.

51. Il metodo, ch' io ſono per proporre, è appunto tale, che ſi può praticare anche in tempo delle piene, e con una ſpeſa diſcreta, e di gran lunga minore di quella, che contemplavano il *Caſtelli* ed il *Guglielmini* (45, 47). Non è altro che una modificazione del metodo del P. *Cabeo*, voglio di-

re, che dove il P. *Cabeo* adoperava delle aſte *AB* (*fig.* 12) di legno con un peſo in *B*, e con delle veſſiche in *C*, io propongo delle aſte conſimili, ma ſenza veſſiche, e con una parte infima *EB* (*fig.* 14) o di metallo, o armata di metallo in modo, che tutta l' aſta *AB* ſia un cilindro, ed il metallo dev' eſſere tanto, che l' aſta così preparata poſta in un' acqua ſtagnante abbia a metterſi da sè in una poſitura verticale, e galleggiare con una porzione *AC* di un piede, o due fuori dell' acqua. Della preparazione di queſte aſte (ch' io chiamo *ritrometriche*) parlerò verſo il fine.

52. Intanto volendo la portata attuale di un fiume, ſi ſcielga di eſſo un tratto *CP'* (*fig.* 15) di duecento, o più teſe, che ſia dei più retti, e dei più regolari. Si butti una delle deſcritte aſte in un punto *H'* quindici, o venti teſe ſuperiormente al punto *C*. Queſta dopo alcuni bilanciamenti arriverà in *C* portata dall' acqua ſenſibilmente parallela a ſe ſteſſa, e con moto regolare, ed equabile, e queſta ſia la *AB*, che ſupporrò inclinata all' avanti. Moſtrerò come con queſt' aſta ſi poſſa ſcoprire aſſai proſſimamente le velocità dell' acqua dalla ſuperficie *CP'* fino al fondo *rl* lungo il cammino, che farà l' aſta da *C* in *P'*.

53. Convien eſaminare tutte le forze, che tendono ad agitare l' aſta *AB* eſſendo *HMLK* la curva dell' aſſe *IH* (12), alla quale terminano le velocità dell' acqua, che porta l' aſta. Una di queſte forze è il peſo aſſoluto dell' aſta ſteſſa, il quale ſi può intendere come raccolto nel centro di gravità dell' aſta; e codeſto centro ſia nel punto *D*; e la verticale *DE* eſprima il peſo ſuddetto, che (fatto il rettangolo *im*) equivale a due forze *Di*, *Dm*. Un' altra forza è quella, colla quale l' acqua ſpinge all' insù ogni porzione della parte immerſa *CB* dell' aſta, la qual forza per eſſere la parte *CB* cilindrica, ſi può conſiderare come raccolta nel punto *F* di mezzo della ſteſſa parte *CB*, e ſi può eſprimere con una verticale *FG*, che (fatto il rettangolo *hk*) equivale alle due forze *Fk*, *Fh*. E codeſta forza *FG* ſi trova eguale al peſo di un volume di acqua eguale alla porzione ſommerſa *CB* dell' aſta. Le altre forze, che tendono ad agitare l' aſta ſono le impreſſioni dell' acqua, che la urta dove in un modo, e dove in un altro. Imperocchè è manifeſto, che l' aſta non

potrà muoverſi tutta colla velocità maſſima IK, nè colla ſola velocità minima NM, e che ſi ridurrà ad una velocità di mezzo; e queſta ſia la OL comune all' acqua nei punti O, P: di modo che da P in ſu l' acqua è più veloce dell' aſta, e da P in giù è l' aſta, ch' è più veloce dell' acqua. Quindi nel punto Q la velocità dell' acqua è ut, e quella dell' aſta è $uS = OL$. Dunque in Q l' acqua inveſte l' aſta colla velocità riſpettiva St ſpingendola da Q verſo S. Ma in T la velocità dell' acqua è XY, e quella dell' aſta è $XZ = OL$. Dunque in T l' aſta fende l' acqua colla velocità YZ; e l' acqua reagiſce in T contro l' aſta con quella ſteſſa forza, colla quale inveſtirebbe l' aſta, che foſſe ferma, colla velocità ZY diretta da T verſo a.

54. Eſprimiamo codeſte forze dell' acqua. La lunghezza CB della parte immerſa dell' aſta ſi dica $= b$, ed il ſuo diametro $= i$. Si metta con Archimede, che il quadrato del diametro all' aja del cerchio ſtia come 14 a 11; e ſi troverà $\frac{11\,i^2}{14} =$ baſe del cilindro CB. Dunque $\frac{11\,bi^2}{14}$ ſarà il volume del cilindro CB. Il peſo di un egual volume di acqua ſia P. Onde $FG = P$ (53). Si cerchi l' impreſſione Qg, che fa all' aſta normalmente uno ſtrato ſottiliſſimo QSs dell' acqua colla velocità riſpettiva St. Poichè b è la lunghezza del cilindro CB, ed i il ſuo diametro, ſarà bi la ſua ſezione per l' aſſe. Pertanto ſi concepiſca, che codeſto piano bi ſia ſituato in cb' verticalmente, e che ſia incontrato dall' acqua direttamente in tutta l' altezza cb' colla velocità $St = u$; intendo per u lo ſpazio, che può correre l' acqua uniformemente in un tempo $k = 1''$ colla detta velocità. La caduta libera di un grave nel detto tempo k ſia h. Si ſa, che la velocità alla fine di tale caduta è $2h$. Ma come i quadrati delle velocità di un corpo cadente, così ſono le cadute, o ſia le altezze dalle quali il corpo cadendo liberamente acquiſta quella velocità. Dunque facendo $4h^2 : u^2 :: h$ al quarto termine $\frac{u^2}{4h}$, queſto ſarà la caduta competente alla velocità u.

55. Anche ſecondo le ſperienze dei Signori d' *Alembert*.

Condorcet, e *Boſſut* pubblicate l'anno 1777 l'impreſſione dell' acqua al detto piano bi è eguale al peſo di un priſma di acqua, che abbia per baſe lo ſteſſo piano, e per altezza la trovata altezza $\frac{u^2}{4h}$ (54), con qualche coſa di più. Non computando qui quel di più, ch' è poco, il volume dell' indicato priſma di acqua ſarà $\frac{biu^2}{4h}$. Ma il peſo del volume $\frac{11bi^2}{14}$ di acqua ſi è detto P (54), e come i volumi di acqua così ſono i loro peſi: dunque il peſo dell' acqua del volume $\frac{biu^2}{4h}$ ſarà $\frac{7Pu^2}{22hi}$, ch' è l' impreſſione ricercata dell' acqua contro il piano bi ſituato in cb'.

56. Ora al ſuddetto piano s'intenda ſoſtituito un cilindro CB del diametro i. Dalle ſperienze 35, ed 89 de' ſoprannominati Signori, ed anche da altre del Sig. *Borda* fatte nell' aria (*Memorie dell' Accademia* di Parigi 1760) raccolgo, che la detta impreſſione contro il piano bi ſta all' impreſſione contro il cilindro ſoſtituito come 20 a 11. Dunque facendo $20 : 11 :: \frac{7Pu^2}{22hi}$ (55) al quarto termine $\frac{7Pu^2}{40hi}$, queſto ſarà il peſo eguale all' impreſſione fatta dall' acqua al detto cilindro poſto verticalmente in cb'. Sia $Hu = x$, ed $Ss = dx$. Facendo $cb' : Ss :: \frac{7Pu^2}{40hi}$ al quarto termine $\frac{7Pu^2 . Ss}{cb' . 40hi}$ $= \frac{7Pu^2dx}{40bhi}$, queſto ſarà l' impreſſione al cilindro verticale fatta in Ss dallo ſtrato di acqua Qſs colla velocità $u = St$. E perchè l' angolo $H'CB$ d' incidenza dell' acqua ſopra l' aſta io l' ho trovato ſempre maggiore di un ſemiretto, ſecondo le dette ſperienze del 1777, l' impreſſione normale al cilindro collocato in cb' all' impreſſione normale al cilindro CB in Q fatta dallo ſteſſo ſtrato di acqua QSs ſtarà come CB a Cq eſſendo Cq verticale incontrata dalla orizzontale BqN. La

prima trovata $= \frac{7Pu^2dx}{40bhi}$ ſia eſpreſſa con una linea orizzontale QR, e la ſeconda ſia eſpreſſa con una Qg normale all' aſta; e ſia $HI = m$, $HN = n$, ed $HO = q$: onde $IN = m - n = Cq$, e ſi avrà $CB\ (= b) : Cq\ (= m - n) :: QR \left(= \frac{7Pu^2dx}{40bhi}\right) :$ $Qg = \frac{7P.(m-n).u^2dx}{40b^2hi}$, eſſendo $u^2dx = (St)^2.Ss$; onde $\int Qg = \frac{7P.(m-n)}{40b^2hi} \int (St)^2.Ss$. Nell' integrazione la coſtante ſi determina mettendo l' integrale $= 0$ quando $x = HO = q$. Facendo di poi $x = HI = m$ ſi avrà la ſomma delle Qg da P fino in C.

57. Sarà $Ou = x - q$; e perchè $Cq : CB :: Ou : PQ$, ſarà $m - n : b :: x - q : PQ = \frac{b.(x-q)}{m-n}$; onde $PQ.Qg$ $= \frac{7P.(x-q).u^2dx}{40bbi}$, ch' è il momento di ogni Qg riferito al punto P. E la ſomma di queſti momenti diviſa per la ſomma delle Qg, cioè $\frac{\int PQ.Qg}{\int Qg}$ darà la diſtanza del centro delle forze Qg dal punto P, com' è noto.

58. Nella integrazione ſi operi come ſi è detto al n. 56. E quando $x = HI = m$, cioè quando PQ diviene PC, la detta diſtanza del centro delle forze Qg da P ſia Pn; ed nx normale all' aſta ſia in tal caſo $\int Qg$ (56), così ſi avrà $Pn = \frac{\int PQ.Qg}{nx}$, e tutte le Qg diſtribuite lungo la PC equivaleranno alla ſola nx applicata in n.

59. Lo ſteſſo diſcorſo ſi può applicare al caſo di uno ſtrato TZz di acqua preſo al di ſotto del punto P. In queſto caſo eſſendo $x = HX$, ſarà $dx = Zz$, ed $u = YZ$, velocità colla quale l' acqua reagiſce in T con una forza, che equivale all' impreſſione dello ſtrato TZz ſe eſſendo l' aſta ferma l' acqua la incontraſſe colla velocità YZ diretta da Z verſo

T, e coll' angolo d' incidenza $ZTC = H'CB$ (56). Codeſta impreſſione qui pure conſiderata normale all' aſta ſia Tb, e ſi troverà $Tb = \frac{7P.(m-n).u^2dx}{40b^2hi}$ (57) eſſendo $u^2dx = (YZ)^2.Zz$; onde $\int Tb = \frac{7P.(m-n)}{40bbhi} \int (YZ)^2.Zz$. Integrando la coſtante ſi trova mettendo l' integrale $=0$ allorchè ſia $x = HN = n$; facendo di poi $x = HO = q$ ſi avrà la ſomma delle Tb da B fino in P.

60. Poichè qui $x = HX$ ſarà $OX = q - x$. Ma $Cq : CB :: OX : PT$, dunque $m - n : b :: q - x : PT = \frac{b.(q-x)}{m-n}$; ed il momento delle Tb riferito al punto P ſarà $PT.Tb = \frac{7P.(q-x).u^2dx}{40bbhi}$. E la ſomma di queſti momenti diviſa per la ſomma delle Tb darà la diſtanza del centro delle impreſſioni Tb dal punto P.

61. Nell' integrazione la coſtante ſi determini come al n. 59. E quando $x = HO = q$, cioè quando BT diviene BP, la detta diſtanza ſia Po, ed oy normale all' aſta ſia in tal caſo $\int Tb$ (59), e così ſi avrà $Po = \frac{\int PT.Tb}{oy}$, e tutte le Tb diſtribuite lungo la BP equivaleranno alla ſola oy applicata in o.

62. Ora perchè l' aſta arrivata in C è ridotta a un moto regolare (52), nè ſi alza, nè ſi abbaſſa, devono eſſere eguali le due forze contrarie Fk, Di. E perchè i due triangoli FkG, DiE ſono ſimili, ſarà anche $FG = DE$, e $kG = iE$, cioè $Fh = Dm$.

63. E perchè il moto dell' aſta è equabile (52), e non accelerato, nè ritardato, le forze $nx + Dm$, che tendono ad accelerare il moto, ſaranno eguali alle contrarie $oy + Fh$, che tendono a ritardare lo ſteſſo moto; e perchè ſi è trovato $Fh = Dm$ (62), ſarà ancora $nx = oy$; o ſia $\int Qg = \int Tb$,

cioè $\frac{7P.(m-n)}{40b^2hi}\int(St)^2 . Ss = \frac{7P.(m-n)}{40b^2hi}\int(YZ)^2 . Zz$ (56,59), onde $\int(St)^2 . Ss = \int(Yz)^2 . Zz$ (*A*) prendendo le St da L fino in c, e le YZ da p fino in L.

64. E finalmente perchè l' aſta viaggia parallela a ſeſteſſa (52) il centro delle forze nx, Dm dovrà coincidere col centro delle forze contrarie oy, Fb. Il primo dee cadere ſopra il punto D, ed il ſecondo ſotto il punto F. Dunque devono coincidere in un qualche punto V fra D, ed F. Quindi ſi avrà $nx : Dm :: VD : Vn = \frac{VD . Dm}{nx}$; ed inſieme $oy : Fb :: VF : Vo = \frac{VF . Fb}{oy}$. Dunque $Vn + Vo = \frac{VD . Dm}{nx} + \frac{VF . Fb}{oy}$. Ma ſi è trovato $Dm = Fb$ (62), ed $nx = oy$ (63). Dunque $Vn + Vo = \frac{VD . Fb}{nx} + \frac{VF . Fb}{nx} = \frac{(VD + VF) . Fb}{nx} = \frac{DF . Fb}{nx}$.

65. Ma $Vn + Vo = Pn + Po = \frac{\int PQ . Qg}{nx}$ (58) $+ \frac{\int PT . Tb}{oy = nx}$ (61, 63). Dunque $\frac{DF . Fb}{nx} = \frac{\int PQ . Qg}{nx} + \frac{\int PT . Tb}{nx}$, cioè $DF . Fb = \int PQ . Qg + \int PT . Tb$ $= \int\frac{7P.(x-q).u^2dx}{40bhi}$ (57) $+ \int\frac{7P.(q-x).u^2dx}{40bhi}$ (60) $= \frac{7P}{40bhi}\left(\int(x-q).u^3dx + \int(q-x).u^2dx\right)$.

66. E perchè $CB : Bq :: FG : Fb$ ſarà $Fb = \frac{Bq . FG}{CB}$ $= \frac{Bq . P}{b}$ (54); e fatta $DF = e$, ſarà $DF . Fb = \frac{Bq . Pe}{b} =$ (65) $\frac{7P}{40bhi} \times \left(\int(x-q).u^2dx + \int(q-x).u^2dx\right.$, cioè $Bq = \frac{7}{40ebi} \times \left(\int(x-q).u^2dx + \int(q-x).u^2dx\right)$ (*B*).

67. Fatti queſti preparativi mi propongo da ſciogliere il ſeguente problema. Date la lunghezza CB della porzione immerſa dell' aſta, la DF diſtanza del centro D di gravità dell' aſta dal punto F di mezzo della ſua porzione immerſa, la velocità OL dell' aſta, la velocità ſuperficiale IK dell' acqua, e dato l' angolo ACI d' inclinazione dell' aſta e in conſeguenza il ſuo complemento BCq, trovare una curva KLH, o una retta $KL\mathcal{Q}'$, che eſſendo ſcala delle velocità della verticale IS' ſoddisfaccia ai dati ſuddetti.

68. Primieramente eſamino il caſo più ſemplice, cioè ſe una retta $KL\mathcal{Q}'$ ſoddisfaccia ai dati eſpoſti. In queſto caſo le x invece di partire dal punto H partono dal punto $\mathcal{Q}'$, e le HI, HO, HN divengono $\mathcal{Q}'I = m$, $\mathcal{Q}'O = q$, $\mathcal{Q}'N = n$, e le St, ZY divengono Si, Zf, onde giuſta il *n.* 63 qui ſi deve avere $\int (Si)^2 . Ss = \int (Zf)^2 . Zz$. E perchè $\mathcal{Q}'O : OL :: LS : Si$, ſarà $q : OL :: x - q : Si = \frac{OL . (x - q)}{q}$, e $\int (Si)^2 . Ss = \int \frac{(OL)^2 . (x - q)^2 . dx}{q^2}$, e (come ſi è detto al *n.* 56) integrando in modo, che quando $x = \mathcal{Q}'O = q$ l' integrale ſia nullo, ſi avrà $\frac{(OL)^2 . (x - q)^3}{3q^2}$; e fatta indi $x = \mathcal{Q}'I = m$ ſi avrà $\int (Si)^2 . Ss = \frac{(OL)^2 . (m - q)^3}{3q^2}$. Similmente $\mathcal{Q}'O : OL :: LZ : Zf$, cioè $q : OL :: q - x : Zf = \frac{OL . (q - x)}{q}$, onde $(Zf)^2 . Zz = \frac{(OL)^2 . (q - x)^2 . dx}{q^2}$; ed integrando così, che quando $x = \mathcal{Q}'N = n$ l' integrale ſia nullo (59), indi facendo $x = q$ ſi avrà $\int (Zf)^2 . Zz = \frac{(OL)^2 . (q - n)^3}{3q^2}$. Dovendo pertanto le due ſomme eſſere eguali (63) ſi trova $m - q = q - n$, cioè $OI = ON$. Il che fa vedere, che qualunque ſieno le due velocità date IK, OL, purchè tutte le velocità della verti-

cale IS' terminino ad una retta, quella velocità OL dell' acqua, ch' è comune all' aſta, corriſponde a un punto O, che dee eſſere di mezzo della IN, e che in conſeguenza la velocità dell' aſta in tal caſo è la velocità media di tutte le velocità dell' acqua della verticale IN.

69. Eſſendoſi detta al n. 54 $St = u$, in queſto caſo ſarà $u = Si = \frac{OL.(x-q)}{q}$ (68), e $\int (x-q).u^2dx = \frac{(OL)^2}{q^2} \times \int (x-q)^3.dx$. Fatto l' integrale nullo allorchè ſia $x = \mathcal{Q}'O = q$, indi fatta $x = \mathcal{Q}'I = m$, ſi avrà $\int (x-q).u^2dx = \frac{(OL)^2}{q^2}.\frac{(m-q)^4}{4}$. Eſſendoſi pur detta $ZY = u$, in queſto caſo ſarà $u = Zf = \frac{OL.(q-x)}{q}$ (68); e $\int (q-x).u^2dx = \frac{(OL)^2}{q^2}\int (q-x)^3 dx = \frac{(OL)^2}{q^2}.\frac{(q-n)^4}{4}$ (fatto l' integrale nullo quando $x = \mathcal{Q}'N$, e fatta indi $x = \mathcal{Q}'O = q$). Dunque $\int (x-q).u^2dx + \int (q-x).u^2dx = \frac{(OL)^2}{q^2} \times \left(\frac{(m-q)^4}{4} + \frac{(q-n)^4}{4} \right) = \frac{(OL)^2}{q^2}.\frac{(m-q)^4}{2}$ (eſſendoſi trovato al n. 68 $m - q = q - n$). Dunque ſecondo il n. 66 ſarà $Bq = \frac{7}{40ehi} \times \frac{(OL)^2}{q^2}.\frac{(m-q)^4}{2} = \frac{7.(OL)^2.(m-q)^4}{80ehiq^2}$. Se ſi dirà $IN = c$, $IK = f$, $OL = g$, poichè $OI = ON$ (68), ſarà $OI = \frac{1}{2}c = m - q$. E perchè $\mathcal{Q}'I : IK :: \mathcal{Q}'O : OL$, ſarà $m : f :: q : g$, e $q = \frac{gm}{f}$; ed $m - q = \frac{1}{2}c = m - \frac{gm}{f}$; onde $m =$

$\frac{cf}{2.(f-g)}$, e $q=\frac{gm}{f}=\frac{cg}{2.(f-g)}$. Soſtituendo ſi avrà $Bq=\frac{7c^2.(f-g)^2}{320bie}$.

70. Venendo a un caſo particolare, in cui ſia per eſempio la velocità ſuperficiale IK di 10 piedi per ogni minuto ſecondo, l' altra OL dell' aſta di piedi 8, la $DF=e$ (53, 66) $=$ pi. 3; la caduta b di un grave in $1''=$ piedi 15, il diametro i dell' aſta di due pollici, o ſia $=\frac{1}{6}$ di piede, la IN da dedurſi dalla lunghezza CB note, e dall' angolo BCq dato, di piedi 12, e la IS' di piedi 14 ſarà $c=12$, $f=10$, $g=8$, $e=3$, $b=15$, $i=\frac{1}{6}$, e Bq (69) $=1, 68$, cioè l' angolo BCq di gr. 7, 58'.

71. Se pertanto l' angolo già dato ſarà di gr. 7, 58', la vena KLQ' quadrerà eſattamente a tutti i dati del Problema, e ſi potrà dire, che la KLd ſia (almeno proſſimamente) la ſcala della velocità della verticale IN; e quando IN formi una buona parte della IS' ſi potrà ragionevolmente concludere, che tutte le velocità della verticale IS' terminino alla retta KLl. Per la qual coſa eſſendoſi detta IS' di piedi 14, l' aja $IS'lK$ ſarà di piedi quadrati 107, 33, cioè in ogni minuto ſecondo per la verticale IS' paſſerà un velo di acqua di piedi 107, 33 quadrati; i quali diviſi per tutta l' altezza IS' di piedi 14 danno una velocità media di piedi $7\frac{2}{3}$.

72. Ma ſe in vece di gr. 7, 58' foſſe ſtato dato un angolo maggiore oltre gli altri dati del n. 70, ſi dovrà concludere, che le velocità della verticale IS' non terminano a una retta, ma bensì a una curva KLH. Per rinvenire una curva, che ſoddisfaccia ai dati io ricorro alla famiglia delle Parabole, giacchè ognuna di queſte applicata come la HLK importa, che dalla ſuperficie al ſondo il decreſcimento di velocità ſi faccia ſempre maggiore, come richiede la mia teoria, che non diſcorda dalle ſperienze.

73. Si eſamini pertanto in ſecondo luogo ſe la HLK foſſe una parabola cubica di ſecondo genere della equazione px^2

$= y^3$. Poichè $y = \sqrt[3]{px^2}$ quando $x = Hu$ ſarà $dx = Ss$, ed $y = ut = \sqrt[3]{(px)^2}$; e quando $x = HO = q$ ſarà $y = \sqrt[3]{pq^2}$. Dunque $St = ut - OL = \sqrt[3]{px^2} - \sqrt[3]{pq^2}$, e $\int (St)^2 . Ss$

$\int (\sqrt[3]{px^2} - \sqrt[3]{pq^2}) . dx$. Integrando per modo, che quando $x = HO = q$ l' integrale ſia nullo; indi facendo $x = HI = m$ ſi avrà $\int (St)^2 . Ss = \sqrt[3]{p^2} (\frac{3m^2 \sqrt[3]{m}}{7} - \frac{6m \sqrt[3]{q^2m^2}}{5} + qm \sqrt[3]{q} - \frac{8q^2 \sqrt[3]{q}}{35})$. Quando poi ſia $x = HX$ ſi avrà $dx = Zz$, ed $y = XY = \sqrt[3]{px^2}$, onde $YZ = OL - XY = \sqrt[3]{px^2} - \sqrt[3]{pq^2}$, $\int (YZ)^2 . Zz = \int (\sqrt[3]{pq^2} - \sqrt[3]{px^2}) . dx$; ed integrando così, che quando $x = HN = n$ ſi abbia zero, indi facendo $x = HO = q$ ſi troverà $\int (YZ)^2 . Zz = \sqrt[3]{p^2} \times (\frac{8q^2 \sqrt[3]{q}}{35} - \frac{3}{7} n^2 \sqrt[3]{n} + \frac{6n \sqrt[3]{q^2n^2}}{5} - qn \sqrt[3]{q})$.

74. E perchè le due ſomme ritrovate devono eſſer eguali (63) ſi troverà $\frac{16q^2 \sqrt[3]{q}}{35} - \frac{3}{7} . (m^2 \sqrt[3]{m} + n^2 \sqrt[3]{n}) + \frac{6}{5} \sqrt[3]{q^2} . (m \sqrt[3]{m^2} + n \sqrt[3]{n^2}) - q \sqrt[3]{q} . (m + n) = 0$.

75. Poichè $St = u$ (54) $= \sqrt[3]{px^2} - \sqrt[3]{pq^2}$ (73), ſarà $\int (x - q) . u^2 dx = \int (x - q) . (\sqrt[3]{px^2} - \sqrt[3]{pq^2}) . dx =$ (riducendo l' integrale al zero allorchè $x = q$, indi facendo $x = m$) $\sqrt[3]{p^2} \times (\frac{3m^3 \sqrt[3]{m}}{10} - \frac{3m^2 \sqrt[3]{q^2m^2}}{4} + \frac{qm^2 \sqrt[3]{q}}{2} - \frac{3qm^2 \sqrt[3]{m}}{7} + \frac{6qm \sqrt[3]{q^2m^2}}{5} - q^2m \sqrt[3]{q} + \frac{5q^3 \sqrt[3]{q}}{28}$. Così perchè quando $x = HX$ ſi è detta $YZ = u$ (59) $= \sqrt[3]{pq^2} - \sqrt[3]{px^2}$ (73), ſarà $\int (q - x) . u^2 dx = \int (q - x) . (\sqrt[3]{pq^2} - \sqrt[3]{px^2})^2 . dx =$ (mettendo l' integrale $= 0$ quando $x = n$, indi facendo $x = q$)

$\sqrt[3]{p^2}$

$$\sqrt[3]{p^2} \times \left(\frac{5q^3\sqrt[3]{q}}{28} + \frac{3n^3\sqrt[3]{n}}{10} - \frac{3n^2\sqrt[3]{q^2n^2}}{4} + \frac{qn^2\sqrt[3]{q}}{2} - \frac{3qn^2\sqrt[3]{n}}{7} \right.$$
$$\left. + \frac{6qn\sqrt[3]{q^2n^2}}{5} - q^2n\sqrt[3]{q} \right).$$

76. Dunque $Bq\,(66) =$

$$\frac{7}{40ehi} \times \int \left((x-q).u^2dx + \int (q-x).u^2dx \right) =$$
$$\frac{7\sqrt[3]{p^2}}{40ehi} \times \left(\frac{3}{10}.(m^3\sqrt[3]{m} + n^3\sqrt[3]{n}) - \frac{3}{4}\sqrt[3]{q^2}.(m^2\sqrt[3]{m^2} + n^2\sqrt[3]{n^2}) \right.$$
$$+ \frac{1}{2}q\sqrt[3]{q}.(m^2+n^2) - \frac{3}{7}q.(m^2\sqrt[3]{m} + n^2\sqrt[3]{n})$$
$$\left. + \frac{6}{5}q\sqrt[3]{q^2}.(m\sqrt[3]{m^2} + n\sqrt[3]{n^2}) - q^2\sqrt[3]{q}.(m+n) + \frac{5q^3\sqrt[3]{q}}{14} \right).$$

77. Colla equazione del n. 74 convien trovare nei caſi particolari quale ſia fra le infinite parabole della equazione $px^2 = y^3$ quella, che ſi potrebbe confare coi dati del Problema a riſerva dell' angolo d' inclinazione dell' aſta; per paſſare indi a vedere colla equazione del n. 76 ſe quella parabola così trovata ſi confaccia ancora coll' angolo dell' aſta già dato. Perciò ritorno all' eſempio del n. 70, dove ſi è fatta $IK = 10$, $OL = 8$, $DF = e = 3$, $h = 15$, $i = \frac{1}{6}$, ed $IN = m - n = 12$. Quindi ſarà $n = m - 12$; e per la natura della parabola cubica di ſecondo genere ſarà $(IK)^3 : (OL)^3 :: (IH)^2 : (OH)^2$, cioè $1000 : 512 :: m^2 : q^2$; onde $q = m\sqrt{\frac{512}{1000}}$ $= m - OI$. Dunque $m = \frac{OI\sqrt{1000}}{\sqrt{1000} - \sqrt{512}}$. Poichè la ſomma dei quadrati delle St da L fino in c dev' eſſere eguale alla ſomma dei quadrati delle YZ da L fino in p (63), accade, che il punto O ſi trova ſempre poco ſotto il punto di mezzo della IN, onde ſe nella formola trovata $\frac{OI\sqrt{1000}}{\sqrt{1000} - \sqrt{512}}$ ſi metta $OI = \frac{IN}{2}$, ſi avrà un valore, che di poco mancherà dal giuſto valore della m. Quindi perchè IN

ſi è fatta $= 12$, mettendo nella detta formola $OI = 6$ ſi avrà $21\frac{7}{9}$, ch' è un limite della m, o ſia un valore minore, ma di poco, della m.

78. Infatti ſi metta $m = 21\frac{7}{9}$. Così ſarà $n = HI - IN = 21\frac{7}{9} - 12 = 9\frac{7}{9}$, e q (trovata qui ſopra $= m\sqrt{\frac{512}{1000}}$) $= 15, 58$. Fatta la ſoſtituzione di queſti valori delle m, n, q nella equazione del n. 74, i termini, che la compongono, danno 0, 002 (ſi veda il calcolo nel fine), il che moſtra che ſi può prendere $21\frac{7}{9}$ pel vero valore della m. E perchè $p = \frac{y^3}{x^2}$, ſarà $p = \frac{(IK)^3}{(HI)^2} = \frac{1000}{m^2} = 2, 109$. Soſtituiti queſti valori delle m, n, q, p nella equazione ultima del n. 76 ſi avrà $Bq = 1, 78$, che dà l' angolo BCq di gr. 8, 26′.

79. Quindi ſe l' angolo già dato (67) ſarà ſtato per l' appunto di gr. 8, 26′ la parabola cubica così trovata *HLK* quadrerà eſattamente con tutti i dati del Problema, e ſi potrà dire, che la ſcala delle velocità della verticale *IN* ſia aſſai proſſimamente l' arco *MLK* della parabola ſuddetta, e qualora la *NS′* ſia piccola porzione della *IS′*, ſarà ragionevole il concludere, che le velocità di tutta la verticale *IS′* terminino alla ſteſſa parabola *HLK*. Quindi fatta la *IS′* di piedi 14, l'aja *IS′V′K*, ch'è $\frac{3}{5} HI.IK - \frac{3}{5}.HS'.S'V'$, ſarà di piedi quadrati 107, 17; che eſprimeranno la portata della verticale *IS'*, o ſia il velo d' acqua, che in 1″ paſſa per la verticale ſteſſa. E dividendo per $IS' = 14$ il detto velo ſi avrà piedi 7, 65, velocità media delle velocità da *I* fino in *S′*.

80. Che ſe l' angolo già dato (67) foſſe maggiore del trovato qui ſopra, ſi paſſi ad eſaminare in terzo luogo ſe la curva ricercata foſſe una parabola conica della equazione $px = y^2$.

81. Operando come ſi è fatto rapporto alla parabola cubica di ſecondo genere in luogo della equazione del n. 74 dedotta dal n. 63 ſi avrà $8\sqrt{q}(m\sqrt{m} + n\sqrt{n}) + 2q^2 - 6q \times (m + n) - 3m^2 - 3n^2 = 0$.

82. Ed in luogo della equazione del n. 76 dedotta dal

n. 66 qui ſi avrà $Bq(66) = \frac{7p}{40ehi} \times \left(\frac{1}{3} m^3 + \frac{1}{3} n^3 - \frac{4}{5} \sqrt{q}\, (m^2 \sqrt{m} + n^2 \sqrt{n}) + \frac{4}{3} q \sqrt{q}\, (m \sqrt{m} + n \sqrt{n}) - q^2\, (m + n + \frac{4}{5} q^3) \right)$.

83. Qui pure ripiglio, come al n. 77, le determinazioni fatte per l' eſempio del n. 70, coſicchè eſſendo $IN = 12 = m - n$, ſarà $n = m - 12$; e per la natura della parabola conica ſarà $\overline{IK}^2 : \overline{OL}^2 :: IH : OH$, cioè $100 : 64 :: m : q = \frac{64m}{100}$. Ma $q = HO = HI - OI = m - OI$. Dunque $\frac{64m}{100} = m - OI$, ed $m = \frac{100OI}{36}$. Un limite della m ſi troverà ſempre colla regola del n. 77, cioè facendo l' ipoteſi di $OI = \frac{ON}{2} =$ (in queſt' eſempio) 6, onde qui riſulta $m = 16\frac{2}{3}$. Si metta dunque prima $m = 16\frac{2}{3}$. E ſarà $n = m - 12 = 4\frac{2}{3}$: e $q = \frac{64m}{100} = 10\frac{2}{3}$. Soſtituendo queſti valori delle m, n, q nell' equazione del n. 81, ſi ottiene 4, 73. Mettendo in appreſſo $m = 17$, ſarà $n = m - 12 = 5$, e $q = 10, 88$. Soſtituiti queſti nuovi valori delle m, n, q nella ſteſſa equazione del n. 81, i termini che la compongono danno $-115, 61$; il che moſtra, che il giuſto valore della m ſta fra il $16\frac{2}{3}$ ed il 17; e col metodo noto ſi trova $m = 16, 68$: onde $n = m - 12 = 4, 68$, e $q = \frac{64m}{100} = 10, 67$; e $p = \frac{(IK)^2}{IH} = \frac{100}{m} = 5, 99$. Soſtituiti queſti valori delle m, n, q, p nel va-

lore della Bq trovato al n. 82 ſi ha $Bq = 2,11$, che dà l' angolo BCq di gr. 9. 58'.

84. Dunque ſe l' angolo già dato (67) foſſe appunto di gr. 9, 58' la parabola conica trovata ſarà in queſt' eſempio la curva ricercata, perchè ſoddisfa a tuti i dati del Problema; e fatta IS' di piedi 14 l' aja $IS'V'K$ ſarà di piedi quadrati 101, 46 portata della verticale IS', che diviſi per 14 danno la velocità media di piedi 7, 53.

85. Ma ſe l' angolo dato foſſe fra i gr. 8, 26' trovati al n. 78, ed i gr. 10, 12' trovati al n. 83, ſi paſſi ad eſaminare una qualche parabola intermedia. Mi ſpiego. Si metta l' equazione $px^{29} = y^{30}$, e ſi vada ſcemando l' eſponente della x di una unità per volta accreſcendo ogni volta pure di una unità l' eſponente della p, e ſi avrà la ſerie di equazioni

$p x^{29} = y^{30}$

$p^2 x^{28} = y^{30}$

$p^3 x^{27} = y^{30}$

ecc.

così ſi arriverà alle ſeguenti

$p^{10} x^{20} = y^{30}$ . . . . cioè $px^2 = y^3$

$p^{11} x^{19} = y^{30}$

$p^{12} x^{18} = y^{30}$ . . . . $p^2 x^3 = y^5$

$p^{13} x^{17} = y^{30}$

$p^{14} x^{16} = y^{30}$ . . . . $p^7 x^8 = y^{15}$

$p^{15} x^{15} = y^{30}$ . . . . $px = y^2$

$p^{16} x^{14} = y^{30}$ . . . . $p^8 x^7 = y^{15}$

$p^{17} x^{13} = y^{30}$

$p^{18} x^{12} = y^{30}$ . . . . $p^3 x^2 = y^5$

ecc. ecc.

Le dette equazioni cominciando dalla prima $px^{29} = y^{30}$, poſte all' eſame ſimile al già fatto delle due $px^2 = y^3$, $px = y^2$, danno un angolo ſempre maggiore, coſicchè ſe l' angolo dato ſarà fra i due ritrovati colle dette due equazioni converrà tentare altri eſami di alcune delle qui eſpoſte quattro equazioni intermedie fra le dette due $px^2 = y^3$, $px = y^2$, finchè ſi arrivi a quella, che ſoddisfaccia intieramente, o ſufficientemente al Problema. E quando mai nè anche fra le dette quattro equazioni intermedie ſi trovaſſe quella, che quadri quanto ſi deſideraſſe, ſi potrà ſempre inſtituire un' altra ſerie di equazioni, che parta da una cogli eſponenti più alti, come ſarebbe ſe ſi partiſſe dall' equazione $px^{99} = y^{100}$, e per tal maniera c' incontreremo finalmente in una parabola, che ſoddisfaccia con quella preciſione, che un voleſſe, al Problema.

86. Lo ſteſſo diſcorſo ſi applichi opportunamente al caſo, in cui l' angolo dato foſſe fra i gr. 7, 58′ trovati al n. 70, ed i gr. 8, 26′ trovati al n. 78; come pure ſi applichi al caſo, in cui l' angolo dato foſſe maggiore dell' angolo di gr. 9, 58′ trovati al n. 83; con che parmi di avere ſciolto il Problema propoſtomi al n. 67, che tende a trovare non tanto la portata della verticale IS', quanto la legge dei decreſcimenti della velocità della ſuperficie fino al fondo.

87. Vedo beniſſimo, che quantunque ſi trovi una tal parabola, che quadri intieramente alle condizioni del Problema, non per queſto è dimoſtrato, che la vera ſcala delle velocità ſia quella ſteſſa parabola, potendo eſſere, che nel tempo ſteſſo la vera ſcala delle velocità foſſe per eſempio una elliſſe. Ma ognun vede ancora che perchè una elliſſe ſoddisfaccia a tutte le medeſime condizioni del Problema, cui ſoddisfa una parabola, convien che quella elliſſe ſi adatti così all' arco MLK della parabola trovata, che le conſeguenze dedotte dalla Parabola debbano eſſere proſſimamente quelle, che ſi dedurrebbero dalla elliſſe.

88. Per agevolare il metodo eſpoſto darò qui la formola generale del limite della m da trovarſi colla regola accennata al n. 77. Sia pertanto $p^c x^r = y^{c+r}$ l' equazione generale delle parabole. Poichè quando $x = HI$ è $y = IK$, onde $p^c (HI)^r = (IK)^{c+r}$, e quando $x = H0$ è $y = 0L$, onde $p^c (H0)^r = (0L)^{c+r}$, ſarà $p^c = \frac{(IK)^{c+r}}{(HI)^r} = \frac{(0L)^{c+r}}{(H0)^r} = \frac{(0L)^{c+r}}{(HI-0I)^r}$, dal che ſi

trova $HI = m = \frac{OI\sqrt[r]{(IK)^{c+r}}}{\sqrt[r]{(IK)^{c+r}} - \sqrt[r]{(OL)^{c+r}}}$, ed $\frac{\frac{IN}{2}\sqrt[r]{(IK)^{c+r}}}{\sqrt[r]{(IK)^{c+r}} - \sqrt[r]{(OL)^{c+r}}}$, limite proſſimamente minore della m (77).

89. Quindi ſe ſi doveſſe prendere in eſame l'equazione $p^3x^2 = y^5$ ſarebbe $c = 3$, $r = 2$, onde il limite ſarebbe $\frac{\frac{IN}{2}\sqrt[2]{(IK)^5}}{\sqrt[2]{(IK)^5} - \sqrt[2]{(OL)^5}}$ = (giuſta il n. 70) $\frac{6\sqrt{10^5}}{\sqrt{10^5} - \sqrt{8^5}} = 14$ proſſimamente, limite della $m = HI$. Con queſto ſolamente ſi conoſce ſubito, che la equazione $p^3x^2 = y^5$ non può eſſere al caſo contemplato finora di $IS' =$ piedi 14, perchè eſſendo $m =$ piedi 14, o poco più (77), il vertice H caderebbe quaſi ſul fondo del fiume, onde ſopra quel fondo l' acqua non avrebbe quaſi moto, il che non è vero.

90. Il Sig. Ab. *Ximenes* dice di aver trovato colle ſue ſperienze, che la velocità preſſo il fondo era di un quinto minore della velocità alla ſuperficie. Ma quelle ſperienze ſono ſtate fatte in piccoli corſi di acque, e creſcendo la velocità creſce ancora la reſiſtenza del medeſimo fondo; per la qual coſa è da aſpettarſi, che in tempo di piena la velocità dalla ſuperficie al fondo cali ſenſibilmente più di un quinto. Inclino bensì a credere, che non arrivi a calare la metà. In queſta ipoteſi, che dee poterſi verificare ſe non altro colle mie aſte ritrometriche, pare che nell' eſempio del n. 70. contemplato fin qui non poſſa aver luogo nè anche la parabola conica, giacchè queſta nel detto eſempio importerebbe un decreſcimento di velocità dalla ſuperficie al fondo più della metà, perchè per eſſere $HI = 16, 68$ (83), $IK = 10$, ed $HS' = 2, 68$, ſi trova l'ordinata SV al fondo di pi. 4,008. Meno poi per una ſimil ragione poſſono appartenere al detto eſempio le altre equazioni della ſerie del n. 85. dalla equazione $px = y^2$ in giù. Ma le portate della verticale IS', che riſultano colle equazioni della detta ſerie fino alla $px = y^2$ ſtanno fra i piedi quadrati 107, 17 (79), e 104, 14 (84),

che ſi diſcoſtano di poco dalla portata di pi. q. 107, 33 trovata al n. 71. nella ipoteſi, che le velocità terminino ad una retta. Dunque quando non ſi cerchi la ſcala delle velocità, ma ſoltanto la portata della verticale *IS′*, e che non ſi curi di aver queſta con tutto il rigore (il quale in molti caſi è ſuperfluo) ſi potrà ottenere l' intento a ſufficienza (ed al certo cento volte meglio, che con qualunque degli altri metodi finora propoſti) ſtando all' ipoteſi, che le velocità terminino ad una retta, come al n. 71. Ed in queſto caſo ſi declina dal faſtidio di quei calcoli proliſſi, che occorrono nelle ipoteſi, che la ſcala delle velocità ſia una qualche curva, e l' angolo d' inclinazione dell' aſta (ch' è il più difficile da rilevarſi) in queſto caſo baſterà che ſi abbia affatto all' ingroſſo, per poter dedurre da eſſo la *Cq*, la quale con tre, o quattro gradi di più, o di meno rieſce ſenſibilmente la medeſima.

91. Mi ſi potrebbe fare la ſeguente obbiezione. Non è così facile il trovare in ogni fiume un tratto di 200 teſe, che ſia così regolare, onde l' acqua vi corra con quella equabilità di moto, che richiederebbe lo ſperimento; perchè anche nei tratti meno irregolari ſi danno delle ineguaglianze ſenſibili, e frequenti, per le quali la velocità dell' acqua varia non una, ma più volte ora creſcendo, dove la ſezione diviene alquanto minore, ed ora calando, dove la ſezione ſi fa alquanto maggiore. Quindi è, che dove il fiume affretta il ſuo moto, l' aſta a cagione della ſua inerzia tarderà a concepire la velocità ſua terminale conveniente a quel nuovo maggior corſo dell' acqua, e rimarrà troppo indietro; e dove l' acqua rallenterà il ſuo moto, l' aſta riterrà per la ſua inerzia per qualche tempo una velocità maggiore del dovere, e ſcorrerà troppo avanti, il che può fare, che la velocità dell' aſta diſcordi da quelle velocità, ch' io mi ſon figurato nella ipoteſi di un corſo equabile dell' acqua, e che perciò non ſieno per valere le deduzioni da me eſpoſte.

92. Ma qui riſpondo, che le mie aſte ſono molto ubbidienti ai moti dell' acqua, coſicchè in un paſſaggio da una velocità ad altra l' errore indicato non può eſſere, che tenue, come ſpiegherò in appreſſo. E nel caſo di parecchj di tai paſſaggi da una velocità minore ad una maggiore, e poi da una maggiore ad una minore, ecc. dico, che ſiccome l' errore al creſcere

della velocità del fiume è in difetto, e nel calare della velocità del fiume è in eccesso, dandosi parecchj di tali errori nel tratto dello sperimento perchè all'uno in difetto dee succederne un altro in eccesso, dovrà accadere che l' uno compensi l'altro di mano in mano, cosicchè alla fine dello sperimento l'errore totale sia tuttavia tenue, e trascurabile.

93. Per fare poi comprendere, come ho promesso, che le mie aste ritrometriche devono essere molto ubbidienti ai moti dell'acqua, prima darò di questo una congettura forte dedotta dalla teoria, e poi verrò alla sperienza, e particolarmente ad uno sperimento immediato, e ch'io giudico decisivo, fatto colle aste medesime. Pertanto si metta, che una delle accennate aste galleggi verticale, e quieta in un'acqua stagnante, e che il suo centro di gravità cada appunto nel mezzo della parte sommersa. Allora l' acqua concepisca a un tratto una velocità orizzontale, ed eguale in superficie, e sotto la superficie. In tal caso si potrà considerare l' azione dell' acqua corrente contro l' asta come raccolta nel punto di mezzo della detta parte sommersa. E perchè nel medesimo punto cade anche il centro di gravità dell' asta, ne viene, com'è noto, che l'asta si muoverà sempre parallela a sestessa, e perciò verticale. La velocità dell'acqua si dica $= c$, e la velocità dell' asta, che sarà crescente, dopo un qualche tempo t si dica V, e la velocità rispettiva dell' acqua contro l'asta, cioè $c - V$, si dica u. Giusta il n. 56. sarà $\frac{7Pu^2}{40hi}$ l' impressione dell' acqua sopra l'asta, essendo P il peso dell' asta, h la caduta di un grave in un tempo $k = 1''$, ed il diametro dell'asta cilindrica sia $= i$. Secondo le note formole si avrà $2h . \frac{7Pu^2}{40hi} . dt = kPdV$. E perchè si è detto $c - V = u$ si troverà $\frac{7dt}{20ki} = \frac{dV}{(c-V)^2}$. Ed integrando così, che quando $t = 0$ sia $V = 0$, si troverà $t = \frac{20ki}{70} . \frac{V}{c-V}$.

94. Poichè gli aumenti, e decrementi di velocità, che possono accadere in un tratto del fiume scielto pel più regolare

ſare non dovrebb' eſſere maggiore di un piede per ogni minuto ſecondo, ſi metta, che la velocità c, che ſi ſuppone al n. 93. concepita a un tratto dall' acqua prima ſtagnante, ſia di un piede per ogni minuto ſecondo, onde ſia $c = 1$; ed il diametro i dell' aſta ſi metta di due pollici, o ſia di $\frac{1}{6}$ di piede, e $k = 1''$, e ſi cerchi in quanto tempo l' aſta avrà concepita la metà della velocità dell' acqua, e poi in quanto tempo avrà concepito $\frac{9}{10}$ della velocità ſteſſa dell' acqua, per la qual coſa ſi dovrà mettere pel primo caſo $V = \frac{1}{2}$, e pel ſecondo $V = \frac{9}{10}$; e ſi troverà, che l' aſta avrà guadagnato la metà della velocità dell' acqua in meno di un mezzo minuto ſecondo, e che l' avrà guadagnata quaſi tutta, cioè $\frac{9}{10}$ in poco più di $4''$.

95. E ſe l' aſta invece di eſſere verticale ſi trovaſſe inclinata con un angolo per eſempio di 30 gradi, l' impreſſione $\frac{7Pu^2}{40hi}$ del caſo precedente ſtarebbe all' impreſſione di queſto caſo come il raggio al coſeno di gr. 30 (56), coſicchè queſta ſarebbe proſſimamente $\frac{3Pu^2}{20hi}$; e replicando il calcolo dei n. 93, 94 ſi trova $t = \frac{10ki}{3C} \cdot \frac{V}{c-V}$, e che l' aſta avrà guadagnato la metà della velocità dell' acqua in $33'''$, e che l' avrà guadagnata quaſi tutta, cioè $\frac{9}{10}$ in $5''$.

96. Se aveſſi attribuito all' acqua quella qualunque viſcoſità, che ſembra non poterſi negare all' acqua dei fiumi torbidi, il che avrei potuto fare nell' ultimo caſo mettendo l' impreſſione dell' acqua $= \frac{3Pu^2}{20hi} + \frac{P}{r}V$, intendendo per r un nu-

mero comunque grande (purchè finito), avrei trovato una puntualità anche maggiore dell'aſta in concepire i $\frac{9}{10}$ della velocità dell'acqua; anzi avrei trovato, che in breve avrebbe concepito tutta intiera la velocità dell' acqua. Ella è queſta la da me indicata congettura forte dedotta dalla teoria per dire, che le mie aſte ſiano per eſſere molto ubbidienti ai movimenti diverſi dell'acqua, giacchè il caſo qui ſuppoſto non è gran coſa diverſo da quello delle aſte, che impiego per la miſura delle velocità de' fiumi.

97. Per altro la ſperienza in queſta materia vale anche più della teoria. Una ſperienza molto ovvia ſarebbe quella di gettare un qualunque galleggiante con una qualunque velocità, e direzione orizzontale in un' acqua ſtagnante. Si vedrà, che queſto ben preſto ſi riduce alla quiete. Argomento certo, che mettendo quello ſteſſo galleggiante in un' acqua, che corra con qualunque velocità, quello pure con preſtezza concepirà la velocità dell'acqua, come ſi può ſperimentare in qualunque fiume. Ma eccomi all'accennato ſperimento fatto colle aſte medeſime. Nel Po grande preſſo Ferrara entrato in una piccola nave ho abbandonato all'acqua due aſte cilindriche di legno lunghe ognuna piedi 12 $\frac{1}{2}$ armate a un eſtremo di tanto piombo, che ſono rimaſte fuori dell'acqua con una porzione di un piede e mezzo circa, e dopo alcuni bilanciamenti l'una precedeva all'altra con una diſtanza di circa dieci piedi, ed ambe viaggiavano con moto equabile, e parallele a ſe ſteſſe mentre io le ſeguitava in nave. Dopo qualche tempo con un legno biforcato applicato colle due branche verſo il punto di mezzo della parte immerſa dell'aſta d'avanti la ho ſpinta con forza accelerandone la ſua velocità proecurando di non alterare la ſua poſitura, con che io la ho diſcoſtata di più dall'altra. Ceſſando indi di ſpingerla ſono ſtato attento per vedere ſe in appreſſo continuava a diſcoſtarſi di più dall' altra a cagione dell'impeto da me impreſſole, il quale è certo, che non dovett'eſſere ſmorzato dall'acqua meno veloce in un iſtante. Ma per quanto io, ed altri, ch'erano con me, ci impiegaſſimo di attenzione, non potemmo accorgerci di un maggior allontanamento, che foſſe diſcerni-

bile all' occhio. Indizio manifeſto, che l'aſta da me poſta in un moto ſenſibilmente maggiore di quello, che avea prima, ritornò alla velocità di prima quaſi ſubito, o ſia in un tempo molto breve. Lo ſteſſo tentai coll' altr' aſta più indietro ſpingendola contro il corſo dell' acqua col mio legno biforcato. Anche queſta dopo che da me fu abbandonata, ricuperò la velocità dell' altra così preſto, che la ſua diſtanza dall' altra ceſſata la mia preſſione non ſi fece maggiore, come avrebbe dovuto ſuccedere ſe nel ricuperare la velocità primiera, e dell' altr' aſta, aveſſe impiegato un tempo notabile. Deſidero, che altri tentino lo ſteſſo ſperimento, ch' io giudico attiſſimo per far concludere, che le aſte da me propoſte devono eſſere di tutta quella puntualità in ſecondare i moti dell' acqua, che richiedeſi per l' uſo di eſſe da me propoſto.

96. Dirò ora qualche coſa intorno al modo di preparare le aſte. Se l' aſta di legno deſtinata per lo ſperimento ſarà di poca lunghezza, per trovare quanto metallo vi ſi debba unire, acciocchè meſſa nell' acqua ſporga ſopra la ſuperficie un piede o due, ciò ſi potrà ottenere facilmente mettendo l' aſta nell' acqua di un qualche pozzo, ed attaccandovi all' eſtremo inferiore ora più, ed ora meno di metallo, finchè ſi veda, che l' aſta abbandonata all' acqua ſi metta in una poſitura verticale rimanendo fuori dell' acqua quel piede o due, che ſi vorrà. Egli è però d' avvertire, che quell' aſta di legno deve prima eſſere ſtata tenuta per qualche tempo ſott' acqua acciocchè il legno s' imbeva di quella quantità di acqua, che può aſſorbire, particolarmente ſe il legno ſarà ſecco, e poroſo. Altrimenti ſi potrebbe dare, che nel principio dello ſperimento l' aſta ſporgeſſe fuori dell' acqua per eſempio un piede, e che nel fine non ne ſporgeſſe fuori che un mezzo piede per eſſerſi imbevuta alquanto di acqua nell' atto dello ſperimento, e divenuta così alquanto più peſante.

97. Ma ſe l' aſta ſarà così lunga, onde non ſi abbia un pozzo con tant' acqua, che ſia ſufficiente pel ſopra deſcritto eſame, ſi potrà fare uſo di un' acqua qualunque ſtagnante di qualche vaſca, o buca *ABC* (*fig.* 16.) nella ſeguente maniera. L' aſta ſia da comporſi di due pezzi, cioè di uno *DE* di quattro in cinque piedi da unirſi all' altro *GH* con viti, o in altra maniera. Al pezzo *DE* ſi uniſca tanto metallo in

F, onde poſto nell' acqua o di un pozzo, o della buca ſteſſa *ABC*, reſti fuori dell' acqua con quella lunghezza *DN*, che ſi vorrà. Si trovi il centro di gravità dell' altro pezzo *GH*, o ſia quel punto *K*, dal quale ſoſpeſo rimanga in equilibrio. Vi ſi attacchi uno ſpago *IOL*, e ſi metta ſull' acqua *AC*, ed al punto *O* dello ſpago nella verticale *KO* ſi attacchi tanto metallo, che appena baſti per fare, che il pezzo *GH* ſi ſommerga tutto. Il metallo in *O* con l'altro in *F* farà la quantità di metallo da unirſi all' aſta compoſta dei due pezzi *GH*, *DE*, onde queſta così meſſa nell' acqua poſſa galleggiare con una porzione *DN* fuori dell' acqua, com' è manifeſto. Non mancheranno altri metodi per trovare lo ſteſſo, e forſe più comodi ſecondo le circoſtanze. A me baſta di averne indicato uno.

98. Trovata la quantità del metallo da unirſi all' aſta ſaremo in libertà di attaccare lo ſteſſo metallo a un eſtremo dell' aſta dopo di averlo conformato in un cilindro del diametro dell' aſta, o pure di unirlo all' aſta incaſtrandovelo diſtribuito come ſi crederà più opportuno, purchè col legno venga a formare un cilindro ſolo. E qui avvertirò, che giuſta l'equazione *B* del n. 66. la *Bq* (*fig.* 15.) è in ragione inverſa della *e*, o ſia della diſtanza del centro di gravità *D* dell' aſta dal punto *F* di mezzo della parte ſommerſa *CB*. E perchè ſi può ſempre unire il detto metallo all' aſta diſtribuito in modo, che il centro di gravità *D* reſti più o meno lontano da *F*, ſi vede che ſarà in noſtra mano il fare, che l'angolo *BCq* d'inclinazione dell' aſta ſia per riuſcire maggiore o minore, giacchè quanto più *D* ſarà vicino ad *F* il detto angolo ſarà maggiore.

99. Allorchè ſi avrà ſcielto quel tratto di fiume per lo ſperimento, che ſia il più regolare, e lungo circa 200 teſe, o più, ſecondo che ſi crederà meglio, per ſapere la lunghezza da darſi alle aſte, che ſi vorranno impiegare, converrà fare almeno tre ſezioni di quel tratto, una nel mezzo, ed una per ogni eſtremo. Una di queſte ſia *ABG* (*fig.* 17.), colla quale ſi conoſcerà la lunghezza *FG* da darſi a un di preſſo all' aſta, che dovrà viaggiare nel filone, e le lunghezze *HI*, *DE* da darſi alle laterali: e lo ſteſſo ſi dica pel caſo, in cui ſe ne voglia impiegare più di tre; giacchè quante più ſe ne

impiegheranno, il rilievo ſarà più preciſo; e nel Po grande, aſſai largo, tre ſarebbero ſicuramente poche. Poi ſarà bene il fare degli ſcandagli frequenti lungo il viaggio da farſi da ciaſcuna aſta per rilevare ſe per avventura la lunghezza delle aſte ſcielta colla ſola iſpezione delle tre ſezioni foſſe per qualcuna di troppo a motivo di un qualche doſſo, che s' incontraſſe in quel cammino.

100. Nel Po grande ſi può ſeguitare ogni aſta con una nave, con che ſi potrà oſſervare con qualche preciſione l'angolo d' inclinazione dell' aſta per ſapere proſſimamente la ſcala delle velocità. E lo ſteſſo ſi dica di tutti i fiumi navigabili almeno a ſeconda del loro corſo anche in tempo di piena. E così ſi potranno ricuperare le aſte per un altro ſperimento. Il tempo, che ogni aſta impiegherà nel correre la lunghezza ſtabilita, dovrà miſurarſi o con un orologio a ſecondi, o con un pendolo a ſecondi. Nei torrenti converrà contentarſi di oſſervare l' angolo di ogni aſta all' ingroſſo (90) ſtando ſulla ripa, al più con l' occhio armato. Ed in queſti per ricuperare le aſte converrà accorrere alle curvature del fiume inferiormente al ſito dello ſperimento, dove il filone ſi accoſta alla ripa, e ſi fa, che i galleggianti finalmente vanno al filone. Nel reſto mi rimetto all' avvedutezza, induſtria, e ſagacità di quelli, che ſi accigneſſero ad eſperimenti di queſta fatta, che ſono dell' ultima importanza per promuovere una ſcienza, dalla quale può dipendere la felicità, o l' eſterminio di paeſi intieri, e che perciò merita d' eſſere protetta con impegno da più Sovrani.

Calcolo accennato al n. 78.

$$
\begin{array}{ll}
l.m = l.\,21\tfrac{7}{9} \;\ldots & = 1.3380136 \\
l.\sqrt{512} \;\ldots\ldots & = \underline{1.3546350} \\
 & = 2.6926486 \\
l.\sqrt{1000} \;\ldots\ldots & = \underline{1.5000000} \\
l.q. = l.m\sqrt{\dfrac{512}{1000}} \;. & = 1.1926486 \\
 & \overline{} \\
l.n = l.\,9\tfrac{7}{9} \;\ldots & = \underline{0.9902402} \\
l.\,16 \;\ldots\ldots\ldots & = 1.2041200
\end{array}
$$

$l.\,q^2 \ldots\ldots\ldots = 2.3852972$

$l.\,\sqrt[3]{q} \ldots\ldots\ldots = 0.3975495$

$l.\,35 \ldots\ldots\ldots = 1.5440680$

$l.\,\frac{16q^2\sqrt[3]{q}}{35} \ldots\ldots = 2.4428987$ n. 277,267

$l.\,3 \ldots\ldots\ldots = 0.4771212$

$l.\,m^2 \ldots\ldots\ldots = 2.6760272$

$l.\,\sqrt[3]{m} \ldots\ldots\ldots = 0.4460045$

3.5991529

$l.\,7 \ldots\ldots\ldots = 0.8450980$

$l.\,\frac{3}{7}.m^2\sqrt[3]{m} \ldots\ldots = 2.7540549$ n. 567,616

$l.\,3 \ldots\ldots\ldots = 0.4771212$

$l.\,n^2 \ldots\ldots\ldots = 1.9804804$

$l.\,\sqrt[3]{n} \ldots\ldots\ldots = 0.3300801$

$l.\,\frac{3}{7}n^2\sqrt[3]{n} \ldots\ldots = 1.9425837$ n. 87,616

$l.\,6 \ldots\ldots\ldots = 0.7781512$

$l.\,\sqrt[3]{q^2} \ldots\ldots\ldots = 0.7950991$

1.5732503

$l.\,5 \ldots\ldots\ldots = 0.6989700$

$l.\,\frac{6}{5}\sqrt[3]{q^2} \ldots\ldots\ldots = 0.8742803$

$l.\,m \ldots\ldots\ldots = 1.3380136$

$l.\,\sqrt[3]{m^2} \ldots\ldots\ldots = 0.8920091$

$l.\,\frac{6}{5}\sqrt[3]{q^2}.m\sqrt[3]{m^2} \ldots = 3.1043030$ n. 1271,461

$l.\,\frac{6}{5}\sqrt[3]{q^2} \ldots\ldots\ldots = 0.8742803$

$l.\,n \ldots\ldots\ldots = 0.9902402$

$l.\,\sqrt[3]{n^2} \ldots\ldots\ldots = 0.6601601$

$l.\,\frac{6}{5}\sqrt[3]{q^2}.n\sqrt[3]{n^2} \ldots = 2.5246806$ n. 334,719

$l.\,q \ldots\ldots\ldots = 1.1926486$

$l.\,\sqrt[3]{q} \ldots\ldots\ldots = 0.3975493$

$l.\,(m+n) = l.\,(21\,\frac{7}{9}+9\,\frac{2}{9}) = 1.4990758$

$l.\,q\sqrt[3]{q}.(m+n) \ldots = 3.0892739$ n. 1228,213

ſomm. 1883,447 1883,445

1883,445

0,002

Onde $\frac{16q^2\sqrt[3]{q}}{35}-\frac{3}{7}(m^2\sqrt[3]{m}+n^2\sqrt[3]{n})+\frac{6}{5}\sqrt[3]{q^2}(m\sqrt[3]{m^2}+n\sqrt[3]{n^2})$
$-q\sqrt[3]{q}(m+n)=0.002.$

DIMOSTRAZIONE

Della riducibilità d' ogni quantità immaginaria algebraica alla forma $A \pm B\sqrt{(-1)}$, *adattata ad un Trattato elementare della natura delle equazioni.*

Del Sig. SEBASTIANO CANTERZANI Profeſſore di matematica, e Secretario perpetuo dell' Inſtituto delle Scienze di Bologna.

1. Il Sig. d' *Alembert* viene riconoſciuto per il primo, che abbia dimoſtrato eſſere ogni immaginario riducibile alla forma $A \pm B\sqrt{(-1)}$, dove A, B rappreſentano due quantità reali di qualſivoglia forma. Egli ha data queſta dimoſtrazione in una ſua Memoria pubblicata tra quelle della Reale Accademia di *Berlino*, che appartengono all' anno 1746. Ma una tale dimoſtrazione non potrebbe aver luogo in un Trattato elementare della natura delle equazioni. Il Sig. Ab. *Boſſut* nella ſua Algebra al Cap. XVII dà una dimoſtrazione aſſai ſemplice, la qual vale per gl' immaginarj, che riguardati come valori di un' incognita portano ad equazioni algebraiche. Queſta dimoſtrazione però dipendendo parte da principj, che ſi trovano ſparſi nel citato Capitolo, e parte ancora da qualche principio, che non ſi dimoſtra che ne' Capitoli ſeguenti, non pare che renda inutile del tutto il penſiere di riunire in un ſol punto di veduta tutte le propoſizioni, che ſono neceſſarie a dedurla, e di farla inſieme dipendere dal minor numero di principj, e dai più ſemplici che ſia poſſibile. Egli è ciò che mi ſtudierò di fare in queſto breve ſcritto, prefiggendomi di formarlo in modo, che poſſa eſſer riguardato come parte di un Trattato elementare della natura delle equazioni.

2. E primieramente è noto, che ogni equazione, la quale non abbia tra i coefficienti de' ſuoi termini veruna quantità

tità immaginaria, ſe ſia di grado diſpari, ha ſicuramente un valore della ſua incognita reale; e ſe ſia di grado pari, ed abbia l' ultimo termine negativo, ha ſicuramente due valori dell' incognita reali, uno poſitivo, ed uno negativo. Queſta verità è di tanta importanza nel preſente argomento, che non ſia inutile richiamarne a mente la dimoſtrazione.

E' chiaro, che ogni quantità reale meſſa nell' equazione in luogo dell' incognita fa aſſumere all' equazione un valor reale, il quale non ſarà zero ſe non nel caſo, in cui la quantità reale meſſa in luogo dell' incognita ſia appunto uno de' valori, che può avere l' incognita in quell' equazione. E' chiaro ancora, che mettendo ſucceſſivamente in luogo dell' incognita altre ed altre quantità reali creſcenti, o decreſcenti per gradi minimi, i ſucceſſivi valori reali, che andrà ricevendo l' equazione, varieranno anch' eſſi per gradi minimi; di modo che paſſando gradatamente il valor, che ſi dà all' incognita, dall' eſſer a cagion d' eſempio a ad eſſere b, gradatamente pure paſſerà il valor dell' equazione dall' eſſere quello, che corriſponde al primo valore a dell' incognita, il quale denoterò per A, ad eſſere quello, che corriſponde all' altro valor b dell' incognita, e che denoterò per B. Ora qualunque ſia l' ordine, che tengono i valori reali dell' equazione nel paſſare che fanno dall' A al B, mentre i valori reali dell' incognita paſſano dall' a al b, egli è certo che facendoſi quel paſſaggio gradatamente, e non per ſalti, non potranno far a meno di non trovarſi fra eſſi tutti i valori reali poſſibili intermedj tra A e B. Donde appariſce, che corriſpondendo il valor reale A dell' equazione al valor reale a dell' incognita, e il valor reale B dell' equazione al valor reale b dell' incognita, ogni valore reale dell' equazione intermedia tra A e B dipenderà ſicuramente da un valor reale dell' incognita intermedio tra a e b.

Ciò premeſſo, ſia un' equazione di grado diſpari x^{2n+1} ecc. $= 0$. E' manifeſto che al valor reale $x = \infty$ corriſponde il valor reale dell' equazione ∞^{2n+1}, e che al valor reale $x = -\infty$ corriſponde il valor reale dell' equazione $-\infty^{2n+1}$. Dunque il valor reale zero dell' equazione, il quale è intermedio tra i due reali ∞^{2n+1}, $-\infty^{2n+1}$, dipenderà ſicuramente da un valor reale di x intermedio tra i due ∞, e $-\infty$; Dunque l' equazione di grado diſpari x^{2n+1} ecc.$=0$ ha ſicuramente un valor della ſua incognita x reale.

Sia ora un' equazione di grado pari, che abbia l' ultimo termine negativo $x^{2n} \ldots\ldots - s = 0$. Dato all' incognita il valor reale $x = \infty$, aſſume l' equazione il valor reale ∞^{2n}; dato poi all' incognita il valor reale $x = 0$, aſſume l' equazione il valor reale $-s$. Ma il valor reale zero dell' equazione è intermedio fra ∞^{2n}, e $-s$; dunque dipenderà eſſo ſicuramente da un valore reale dell' incognita intermedio fra ∞, e 0, il quale per conſeguenza ſarà poſitivo. Similmente dato all' incognita il valor reale $x = -\infty$, l' equazione aſſume il valor reale ∞^{2n}, e dato all' incognita il valor $x = 0$, aſſume l' equazione il valor reale $-s$; dunque il valor reale zero dell' equazione, il quale è intermedio fra ∞^{2n}, e $-s$, dipenderà ſicuramente da un valor reale dell' incognita x intermedio fra $-\infty$, e 0, e per conſeguenza negativo. Dunque ogni equazione di grado pari avente l' ultimo termine negativo ha ſicuramente due valori dell' incognita reali, uno poſitivo, e uno negativo.

3. Egli è evidente da tutto ciò, che un' equazione, la quale abbia tutti i valori dell' incognita immaginarj, non può eſſere ſe non un' equazione di grado pari, e avente l' ultimo termine poſitivo. Donde ſegue, che propoſta un' equazione, che abbia i valori dell' incognita parte reali, e parte immaginarj, ſe ſi farà la diviſione dell' equazione pel prodotto di tutte le radici, che naſcono dai valori reali dell' incognita, il quoziente, il quale ſarà il prodotto delle radici nate dai valori immaginarj dell' incognita, dovrà eſſere un' equazione di grado pari avente l' ultimo termine poſitivo. Ora a dire di queſta ſpecie d' equazioni conviene aver ricordate prima alcune coſe, che verrò ſubito indicando.

4. In primo luogo ad ogni equazione, a cui ſoddisfaccia il valore $x = C + D\sqrt{(-1)}$, dee ſoddisfar anche il valore $x = C - D\sqrt{(-1)}$, e viceverſa. Infatti dopo d' aver poſto nell' equazione in luogo di x, e delle ſue poteſtà, il binomio $C + D\sqrt{(-1)}$, e le riſpettive di lui poteſtà, non poſſono i termini dell' equazione eliderſi fra loro, e ridurſi a zero, come convien che ſucceda, ſe $C + D\sqrt{(-1)}$ è vera-

mente valor di x, ſenza che riducanſi ſeparatamente a zero elidendoſi tra di loro i termini, che contengono $\sqrt{(-1)}$, e riducanſi pure ſeparatamente a zero elidendoſi tra di loro i termini, che non contengono $\sqrt{(-1)}$, poichè è chiaro che gli uni non poſſono per modo alcuno eliderſi con gli altri. Onde denotando per A la ſomma de' termini, che non contengono $\sqrt{(-1)}$, e per $B\sqrt{(-1)}$ la ſomma di quei, che contengono quel radicale, di modo che fatta la ſoſtituzione del binomio $C+D\sqrt{(-1)}$ in luogo di x l' equazione divenga $A+B\sqrt{(-1)}=0$, è evidente che non può verificarſi tale equazione, come ſi ſuppone, ſenza che ſi abbiano verificate le due $A=0, B\sqrt{(-1)}=0$. Ma meſſo in luogo di x nell' equazione l' altro binomio $C-D\sqrt{(-1)}$, il valor dell' equazione diventa $A-B\sqrt{(-1)}$, e per ſuppoſizione ſi ha $A=0$, e $B\sqrt{(-1)}=0$, e quindi anche $-B\sqrt{(-1)}=0$. Dunque anche $A-B\sqrt{(-1)}=0$, e però anche il binomio $C-D\sqrt{(-1)}$ adempie la condizione dell' equazione, e così è valore anch' egli dell' incognita. Dunque non può l' equazione aver per valore della ſua incognita uno di que' due binomj ſenza aver anche l' altro.

5. Secondariamente dico, che ſe a, e b denoteranno due quantità reali, di qualunque forma elle ſieno, la prima delle quali può anche ſupporſi $=0$, la radice di qualſivoglia indice intero, e poſitivo della quantità $a \pm b\sqrt{(-1)}$, cioè $\sqrt[n]{(a \pm b\sqrt{(-1)})}$ ſarà ſempre una quantità come $p \pm q\sqrt{(-1)}$, cioè della ſteſſa forma che la propoſta. Imperciocchè ſia primieramente $n=2^r$. Sarà

$$\sqrt[2^r]{a \pm b\sqrt{(-1)}} = \sqrt[2^{r-1}]{\pm\sqrt{(a \pm b\sqrt{(-1)})}}.$$

Ma generalmente abbiamo $\sqrt{(M \pm N)} = \sqrt{\frac{(M+\sqrt{(M^2-N^2)})}{2}} \pm \sqrt{\frac{(M-\sqrt{(M^2-N^2)})}{2}}$, e però fatta $M=a$, $N=\pm b\sqrt{(-1)}$, ſi ha $\sqrt{(a \pm b\sqrt{(-1)})} =$
$$\sqrt{\frac{(a+\sqrt{(aa+bb)})}{2}} \pm \sqrt{\frac{(a-\sqrt{(aa+bb)})}{2}},$$ cioè

$$=\sqrt{\frac{(a+\sqrt{(aa+bb)})}{2}}\pm\sqrt{\frac{(-a+\sqrt{(aa+bb)})}{2}}\sqrt{(-1)};$$

onde denotando per c la quantità reale $\sqrt{\frac{(a+\sqrt{(aa+bb)})}{2}}$; e per d l' altra quantità reale $\sqrt{\frac{(-a+\sqrt{(aa+bb)})}{2}}$, ſi avrà $\sqrt{(a\pm b\sqrt{(-1)})}=c\pm d\sqrt{(-1)}$. Dunque

$\sqrt[2^r]{a\pm b\sqrt{(-1)}}=\sqrt[2^{r-1}]{\pm\sqrt{(a\pm b\sqrt{(-1)})}}=$

$\sqrt[2^{r-1}]{\pm(c\pm d\sqrt{(-1)})}$; cioè $\sqrt[2^r]{a\pm b\sqrt{(-1)}}=$

$\sqrt[2^{r-1}]{c\pm d\sqrt{(-1)}}$, oppure $\sqrt[2^r]{a\pm b\sqrt{(-1)}}=$

$\sqrt[2^{r-1}]{-c\mp d\sqrt{(-1)}}$.

Qualunque ſi prenda di queſti due valori, è ſempre vero, che la radice 2^r *eſima* della quantità $a\pm b\sqrt{(-1)}$ ſi riduce alla radice 2^{r-1} *eſima* d' una quantità della ſteſſa forma, compoſta cioè di due parti, una reale affatto, l' altra formata d' una quantità reale moltiplicata per $\sqrt{(-1)}$. Ora è evidente, che quel che ſi è dimoſtrato per la radice 2^r *eſima*, vale per la 2^{r-1} *eſima*, la quale ſi ridurrà così alla radice 2^{r-2} *eſima* d' una quantità della ſteſſa forma, e così via diſcorrendo: onde finalmente giungeraſſi ad aver ridotta la radice 2^r *eſima* alla radice 2^{r-r} *eſima*, cioè ad una quantità ſempre della ſteſſa forma, e non più poſta ſotto verun ſegno radicale.

Sia ora n un numero diſpari. Suppongaſi $\sqrt[n]{(a\pm b\sqrt{(-1)})}=p\pm q\sqrt{(-1)}$: e mutando il ſegno all' immaginario $\sqrt{(-1)}$, ſarà $\sqrt[n]{(a\mp b\sqrt{(-1)})}=p\mp q\sqrt{(-1)}$. Dunque moltiplicando un' equazione per l' altra ſi avrà $\sqrt[n]{(aa+bb)}=pp+qq$, dove $\sqrt[n]{(aa+bb)}$ è ſicuramente quantità reale, com' è evidente. Ma eſſendo $\sqrt[n]{(a\pm b\sqrt{(-1)})}=p\pm q\sqrt{(-1)}$, ſarà anche $a\pm b\sqrt{(-1)}=(p\pm q\sqrt{(-1)})^n$

$$=p^n\pm n.\,p^{n-1}q\sqrt{(-1)}-\frac{n(n-1)}{2}p^{n-2}q^2$$

$$\mp \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} p^{n-3} q^3 \sqrt{(-1)} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4} p^{n-4} q^4$$
$$\pm \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2.3.4.5} p^{n-5} q^5 \sqrt{(-1)}$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2.3.4.5.6} p^{n-6} q^6 \mp \text{ecc.}$$

la qual equazione dovendo eſſer identica, converrà che ſia

$$p^n - \frac{n(n-1)}{2} p^{n-2} q^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4} p^{n-4} q^4$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2.3.4.5.6} p^{n-6} q^6 + \text{ecc.} = a.$$

Or queſt' equazione non può contenere che poteſtà pari di q, come ſi rende manifeſto dall' oſſervare che le diſpari non poſſono non aver anneſſo il radicale $\sqrt{(-1)}$, il quale in queſt' equazione non può comparire. Dunque eſſendoſi trovato $pp + qq = \sqrt[n]{(aa+bb)}$, e quindi $qq = -pp + \sqrt[n]{(aa+bb)}$, che è quantità reale, e però eſſendo reali anche tutte le poteſtà $q^4 = p^4 - 2p^2 \sqrt[n]{(aa+bb)} + \sqrt[n]{((aa+bb)^2)}$,

$$q^6 = -p^6 + 3p^4 \sqrt[n]{(aa+bb)} - 3p^2 \sqrt[n]{((aa+bb)^2)} + \sqrt[n]{((aa+bb)^3)},$$

$q^8 =$ ecc., fatte queſte ſoſtituzioni nell' equazione trovata

$p^n - \frac{n(n-1)}{2} p^{n-2} q^2 + \text{ecc.} - a = 0$ ſi avrà un' equazione in p del grado n *eſimo*, cioè di grado diſpari, e avente tutti i coefficienti de' ſuoi termini reali, la quale per conſeguenza (*n.* 2.) avrà ſicuramente un valor reale di p. Intendendo per tanto poſto queſto valor reale, qualunque ſia la forma di lui, nell' equazione $qq = -pp + \sqrt[n]{(aa+bb)}$, avraſſi il valor di q ſotto la forma $\sqrt{(-pp + \sqrt[n]{(aa+bb)})}$, il quale ſarà reale, perchè tanto $\sqrt[n]{(aa+bb)}$, quanto p è reale, e non può mai eſſere $pp > \sqrt[n]{(aa+bb)}$, altrimenti ſi avrebbe q ſotto la forma $\sqrt{(pp - \sqrt[n]{(aa+bb)})}\sqrt{(-1)}$, e quindi $q\sqrt{(-1)}$ ſarebbe $= -\sqrt{(pp - \sqrt[n]{(aa+bb)})}$, cioè ſarebbe reale, e così l' immaginario $\sqrt[n]{(a \pm b\sqrt{(-1)})}$, che ſi è ſuppoſto $= p \pm q\sqrt{(-1)}$ ſarebbe eguale a una ſomma di reali, il che è impoſſibile. Eſſendo dunque per l' equazione

$\sqrt[n]{(a\pm b\sqrt{(-1)})}=p\pm q\sqrt{(-1)}$ ſempre ſicuro un valor reale di p, ed eſſendo reale anche il valor corriſpondente di q eſpreſſo per $\sqrt{(-pp+\sqrt[n]{(aa+bb)})}$, reſta dimoſtrato che $\sqrt[n]{(a\pm b\sqrt{(-1)})}$, anche quando n ſia un numero diſpari, è compreſo ſotto la forma generale $p\pm q\sqrt{(-1)}$, dove p, q denotano quantità reali.

Sia per ultimo n un numero pari, ma non della forma 2^r. Sarà egli della forma $2^r(2m+1)$, denotando r, ed m due numeri intieri poſitivi quali ſi vogliano. E ſiccome è

$\sqrt[2^r(2m+1)]{a\pm b\sqrt{(-1)}}=\sqrt[2^r]{\sqrt[2m+1]{a\pm b\sqrt{(-1)}}}$, e ſi è già or ora veduto, che $\sqrt[2m+1]{a\pm b\sqrt{(-1)}}$ è ſempre compreſo nella forma generale $p\pm q\sqrt{(-1)}$, così potraſſi intender

$\sqrt[2m+1]{a\pm b\sqrt{(-1)}}=p\pm q\sqrt{(-1)}$, con che il radicale propoſto $\sqrt[2^r(2m+1)]{a\pm b\sqrt{(-1)}}=\sqrt[2^r]{\sqrt[2m+1]{a\pm b\sqrt{(-1)}}}$ diventerà

$=\sqrt[2^r]{p\pm q\sqrt{(-1)}}$. Ma ſi vide già eſſere $\sqrt[2^r]{p\pm q\sqrt{(-1)}}$ riducibile ſempre alla ſolita forma $c\pm d\sqrt{(-1)}$. Dunque il radical propoſto, divenuto già $=\sqrt[2^r]{p\pm q\sqrt{(-1)}}$, potrà ſempre intenderſi ridotto anch' egli alla medeſima forma $c\pm d\sqrt{(-1)}$.

Qualunque pertanto ſia l' indice intiero, e poſitivo del radicale, ſotto cui ſi trova una quantità compoſta di due parti, una reale affatto, l' altra conſiſtente nel prodotto d' una reale per l' immaginario $\sqrt{(-1)}$, ſempre può intenderſi il radicale ridotto alla forma ſteſſa della quantità, che ſotto di sè contiene. Se l' indice del radicale ſi voleſſe ſuppor rotto, o negativo, la formola potrebbeſi ſempre traſformar in un' altra, in cui il radicale riuſciſſe coll' indice intiero, e poſitivo.

6. Da tutto ciò ſegue, che una quantità eſpreſſa comunque per radicali, ſotto de' quali ſieno ancora altri radicali, che ab-

bian pur anche ſotto di sè altri radicali, e così via diſcorrendo, quando ſotto ognuno, o ſotto alcuni di quei radicali ſiavi una quantità reale moltiplicata o in tutto, o in parte per l' immaginario $\sqrt{(-1)}$, ſempre potrà intenderſi la propoſta quantità ridotta alla forma $a \pm b\sqrt{(-1)}$; perciocchè poſſono per le coſe dette intenderſi ridotti a queſta forma i radicali ultimi più ſemplici, ridotti i quali ſi potran di nuovo intender ridotti alla ſteſſa forma i nuovi radicali ultimi più ſemplici; e ridotti pure queſti potran nuovamente intenderſi ridotti quei, che dopo la paſſata riduzione ſon divenuti ultimi, e più ſemplici; e così di mano in mano finchè ſi giunga ad aver per radicali ultimi quei, che da principio eran primi, e più compoſti, ridotti i quali avraſſi la quantità, che era per eſſi eſpreſſa, condotta alla forma $a \pm b\sqrt{(-1)}$.

7. Reſta da premettere anche una rifleſſione, ed è queſta. Niuna quantità meſſa in luogo dell' incognita potrà mai ridurre i termini dell' equazione a diſtruggerſi ed eliderſi facendo che reſti zero, quando non ſia ella data, o vogliam dire eſpreſſa in qualche maniera per li coefficienti de' termini dell' equazion medeſima, la qual coſa è per ſe ſteſſa chiariſſima, eſſendo evidente, che nell' equazione a cagion d' eſempio $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ fin tanto che ſi mettano in luogo di x quantità, che non involvano in niun modo le cognite a, b, c dell' equazione, ſarà impoſſibile ottener la eliſion de' termini. Donde appariſce, che ogni valore dell' incognita d' un' equazione ſarà ſempre una quantità, o una formola, qualunque poi ſiane la forma, eſpreſſa in qualche maniera per le quantità cognite, o vogliam dire per li coeſficieñti de' termini dell' equazione ſteſſa.

8. Premeſſe tutte queſte coſe ſia ora un' equazione di grado pari avente l' ultimo termine poſitivo, $x^{2^r(2m+1)} + \ldots + s = 0$, dove r ed m ſtanno in luogo di due numeri intieri poſitivi, de' quali m può anche eſſere $= 0$. Pongaſi $x = y\sqrt[2^r(2m+1)]{-1}$, e avraſſi $x^{2^r(2m+1)} = -y^{2^r(2m+1)}$: le altre poteſtà inferiori della x ſi troveranno, com' è manifeſto, eguali alle corriſpondenti poteſtà della y moltiplicate ciaſcuna

per una quantità data per $\sqrt{(-1)}$ in modo da poterſi ſempre intender ridotta (*n.* 5.) alla forma $A \pm B\sqrt{(-1)}$ denotando A, B quantità reali, delle quali potrà anche per alcuna di quelle poteſtà eſſere la $B = 0$. Fatte pertanto le ſoſtituzioni in luogo di x, e delle ſue poteſtà, riſulterà un' equazione in y dello ſteſſo grado che la propoſta, la qual equazione avrà il primo termine negativo, cioè $-y^{2^r(2m+1)}$, l' ultimo poſitivo, cioè $+s$, e tutti gli altri moltiplicati o per una quantità reale, o per una immaginaria bensì, ma però tale da poter eſſer inteſa ſempre ridotta alla forma $A \pm B\sqrt{(-1)}$. A rendere poſitivo il primo ſi muteranno i ſegni di tutti i termini di queſt' equazione, con che riuſcirà negativo l' ultimo termine, il quale diventerà $-s$; a togliere poi l' aſpetto d' immaginarietà ſi ſoſtituirà in ciaſcun de' termini, che ne ſono affetti, in luogo del coefficiente una ſpecie, come α nel ſecondo termine, β nel terzo, γ nel quarto, ecc. L'equazione in y così ridotta, eſſendo di grado pari, ed avendo negativo l' ultimo termine, avrà ſicuramente (*n.* 2.) due valori dell'incognita y reali, e queſti (*n.* 7.) dati per le quantità cognite reali nell' equazione medeſima, tra le quali ſarà la quantità s, e per le ſpecie α, β, γ, ecc. Reſtituendo in queſti due valori di y in luogo delle ſpecie α, β, γ, ecc. le quantità, alle quali erano eſſe ſtate ſoſtituite, le quali quantità ſono tutte della forma $A \pm B\sqrt{(-1)}$, diverrà ognun di loro una quantità data per s, e per li coefficienti dell' equazion propoſta, involuti alcuni di queſti in formole della forma $A \pm B\sqrt{(-1)}$. Ognun dunque di quei due valori di y potrà intenderſi ridotto (*n.* 6.) anch' egli alla forma $A \pm B\sqrt{(-1)}$. Ora moltiplicando ciaſcun di loro per $\sqrt[2^r(2m+1)]{-1}$ diverrà egli valore di $y\sqrt[2^r(2m+1)]{-1}$, cioè di x. Avrà pertanto l' equazione propoſta ſicuramente due valori di x, ciaſcuno della forma

$(A \pm B\sqrt{(-1)})\sqrt[2^r(2m+1)]{-1}$. Ma $\sqrt[2^r(2m+1)]{-1}$ ſi riduce ſempre (*n.* 5.)

(*n*.5.) alla ſorma $a \pm b \surd(-1)$. Dunque l' equazione di grado pari avente l' ultimo termine poſitivo avrà ſicuramente due valori dell' incognita tali, che ciaſcun di loro ſarà compreſo ſotto la forma $(A \pm B\surd(-1))(a \pm b\surd(-1))$, cioè $Aa - bB \pm (Ab + aB)\surd(-1)$, oppure $Aa + bB \mp (Aa - aB)\surd(-1)$, cioè (facendo $Aa \mp bB = M$, e $Aa \pm aB = N$) ſotto la forma $M \pm N\surd(-1)$, nella quale potrebbe la quantità denotata per N riuſcire $= 0$, e in tal caſo il valore ſarebbe reale.

9. Raccogliendo inſieme le coſe fin qui dette ſi può conchiudere 1°. che data un' equazione reale, cioè tale, che tutti i coefficienti de' termini ſieno quantità reali, di qualunque grado ella ſiaſi, e diviſala pel prodotto di tutte le radici, che naſcono dai valori reali dell' incognita per ottenere così nel quoziente il prodotto di tutte le radici, che naſcono dai valori dell' incognita immaginarj, ſi giungerà ad un' equazione reale di grado pari avente l' ultimo termine poſitivo (*n*.3.); 2°. che queſt' equazione, la quale già per ſuppoſizione non ha verun valore dell' incognita reale, ne avrà ſicuramente (*n*.8.) due immaginarj, ciaſcun de' quali ſarà contenuto ſotto la forma $A \pm B\surd(-1)$; 3°. che non potendo (*n*.4.) convenire all' incognita d' un' equazione il valore $a + b\surd(-1)$ ſenza che le convenga inſieme il valore $a - b\surd(-1)$, e viceverſa, ed eſſendo il prodotto di $x - a - b\surd(-1)$ in $x - a + b\surd(-1)$, che ſono le due radici nate da que' due valori, una quantità reale, cioè $xx - 2ax + aa + bb$, diviſa l' equazione per queſto prodotto ſi otterrà una nuova equazione reale di grado pari avente l' ultimo termine poſitivo; 4°. che ripetendo per queſt' equazione il diſcorſo fatto per la precedente, e così di mano in mano, reſta evidente che non vi può eſſere valor alcuno immaginario dell' incognita, che non ſia compreſo ſotto la ſolita forma $A \pm B\surd(-1)$.

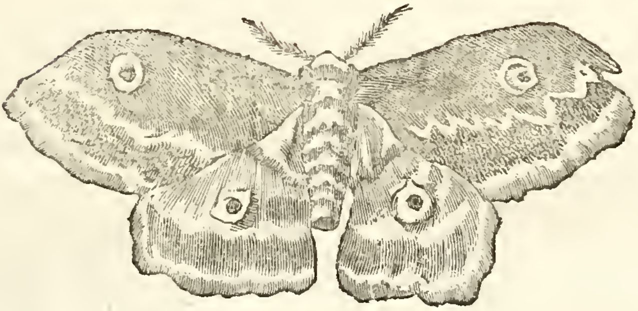
10. Siccome ogni quantità algebraica immaginaria, ſia pur ella in qualſivoglia modo compoſta, meſſa $= x$ colle ordinarie operazioni dell' algoritmo, e principalmente coll' inalzamento dell' una e dell' altra parte dell' eguaglianza a congrue poteſtà, arriva finalmente à ſomminiſtrare un' equazione reale, la quale avrà ſempre tutti i valori immaginarj della x compreſi (*n*.9.) ſotto la forma $A \pm B\surd(-1)$; e ſiccome

è evidente doverſi tra i valori immaginarj della x di queſt' equazione trovare la quantità algebraica immaginaria da principio propoſta ; così reſta dimoſtrato , che ogni quantità algebraica immaginaria viene ſempre compreſa ſotto quella forma $A \pm B\sqrt{(-1)}$, dove A, e B rappreſentano due quantità reali.

11. L' eſpoſta dimoſtrazione ha il vantaggio di far vedere , che per ogni equazione ſono ſempre poſſibili tra reali, e immaginarie tante formole date per li coefficienti dell' equazione medeſima, quant' è il ſuo grado, ognuna delle quali poſta in luogo dell' incognita verifichi la condizione facendo che i termini dell' equazione ſi elidano tra di loro, e riducaſi la loro ſomma a zero . Queſta verità ſi ſuole ordinariamente aſſumere dagli Autori : pure per un' equazione di grado pari avente l' ultimo termine poſitivo chi ne aſſicura che debba pur eſſervi una formola, ſe non reale, almeno immaginaria data per le cognite dell' equazione , che poſta in luogo dell' incognita faccia ſvanir i termini? Il Sig. *Eulero* in una ſua Memoria pubblicata nel 1749 tra quelle della Real Accademia di *Berlino* ha data, è vero, una dimoſtrazione di queſta verità ; ma oltrechè non ſarebbe eſſa molto adattata ad un trattato elementare della natura delle equazioni, è poi anche ſoggetta ad alcune difficoltà rilevate dal Sig. Cav. *Daviet* de Foncenex in una Memoria inſerita nel primo Tomo de' Miſcellanei della Società di Torino . Dall' altra parte la dimoſtrazione ſoſtituita da queſto Autore a quella del Sig. *Eulero*, quanto è ingegnoſa, ci ſembra altrettanto ſuperiore ancor eſſa alla portata di un trattato elementare.

12. Non mi eſtendo a dimoſtrar la riducibilità anche delle quantità traſcendenti immaginarie alla forma $A \pm B\sqrt{(-1)}$, per non uſcir dal confine , che in queſto ſcritto mi ſon prefiſſo, tanto più che ella è queſta una parte, che ſi trova già con molta ſemplicità ed eleganza trattata e dal Sig. Cav. *Daviet* de Foncenex nella citata Memoria , e dal celebre noſtro P. Gregorio *Fontana* in una dotta diſſertazione inſerita nel Tomo primo delle Memórie della Società Italiana. Del reſto quando uno dimoſtri, come queſti Autori fanno, indipendentemente dal calcolo infiniteſimale che $(a \pm b\sqrt{(-1)})^{p \pm q\sqrt{(-1)}}$ ſi comprende nella forma

$A \pm B\sqrt{(-1)}$, viene inſieme a dimoſtrare la propoſizione, che qui ſi è eſpoſta al n. 5, giacchè $\sqrt[n]{(a \pm b\sqrt{(-1)})}$ inchiudeſi in $(a \pm b\sqrt{(-1)})^{p \pm q\sqrt{(-1)}}$ ſupponendo $q = 0$. Ma ſi è creduto di dover trattare a parte la formola $\sqrt[n]{(a \pm b\sqrt{(-1)})}$ a fine di non aver per neceſſità da ricorrere al calcolo delle quantità circolari, e logaritmiche, da cui nel caſo qui contemplato ſi poteva preſcindere



SAGGIO

DI OSSERVAZIONI ANATOMICHE

Intorno agli organi della reſpirazione degli uccelli.

Del Sig. MICHELE GIRARDI Medico di Camera di S. A. R. di Parma, Preſidente al Gabinetto di Storia naturale, e Profeſſore primario della medeſima e di Notomia.

Al Sig. VINCENZO MALACARNE Direttore delle R. Terme Acqueſi e Chirurgo Maggiore del Reale Preſidio di Torino.

L'Eſpoſizione voſtra anatomica intorno all' encefalo degli uccelli, che voi con gentile ſorpreſa, e con troppo obbliganti eſpreſſioni avete voluto dirigermi, m'invita, e m'obbliga doppiamente ad indirizzare a voi queſta mia Memoria, e perchè veggiate quanto mi ſtiano a cuore i ſentimenti voſtri di urbanità ripieni e di corteſia, e perchè ancora conoſciate in qual pregio io tenga la vaſta eſtenſione delle cognizioni voſtre, e particolarmente anatomiche, le quali hanno ſaputo a tutta ragione conciliarvi la pubblica eſtimazione d'uomini per oneſtà e ſapere ragguardevoliſſimi, e ſegnatamente d'uno dei più celebri filoſofi, e naturaliſti che viva Carlo *Bonnet*, e dell' immortale *Allero* anatomico e fiſiologo inſigne, la cui memoria ſarà non meno ai poſteri, che ai viventi oggetto ſempre di riſpetto e di ammirazione. Nè meno certamente dovevate voi aſpettarvi dalla pubblicazione dell' opere voſtre, le quali voi avete voluto corteſemente favorirmi, poichè in eſſe ſi ſcorge per tutto il ſollecito ed attento oſſervatore, il quale guidato a mano da una ſana filoſofia non oſſerva confuſamente, e non iſcrive per oſtentazione, ma tutto eſattamente ponderando proccura di eſtendere per quanto poſſibil ſia i limiti delle noſtre cognizioni, come ne porge ben chiara prova la voſtra Encefalotomia univerſale. Queſta tra le altre opere che pubblicate avete, e particolarmente l'Eſpoſizione intorno agli uccelli, e quello che ſtate tuttora ſcrivendo di queſti chiama a sè, quand' anche altri motivi non vi foſſero, queſte mie oſſervazioni, che riguardano il ſoggetto medeſimo, ſebbene in organi differenti, eſſendo il principale ſcopo di queſte le parti alla reſpirazione inſervienti, ed il mirabile gioco dell' aria che in queſto genere di viventi particolarmente ſi oſſerva. Se voi dunque le leggerete, ſe me ne direte il ſentimento voſtro, quand' anche le oſſervazioni voſtre foſſero alle mie contrarie, io ve ne averò ſempre obbligo particolare, come lo averò a chiunque far ciò voleſſe con quelle maniere però che ad oneſta e gentile perſona convengono.

Non è certamente nuovo che gli uccelli abbiano gli organi della reſpirazione a differenza degli altri animali in modo particolare coſtruiti. Queſta differenza però, per quanto io mi ſappia, non è per anche ſtata riguardata con quella eſattezza che un ſimile intereſſante argomento ſembrava meritare, e ſe ſi eccettui il celebre Sig. Gian *Huntero*, il quale ſino dal 1774 nelle Tranſazioni Filoſofiche ha fatto prima di tutti accuratamente oſſervare che l'aria nei volatili dai polmoni e dalle veſciche aeree paſſa ancora nell' oſſa, dando per altro di queſto ammirabile fenomeno più un' idea generale che particolare e preciſa, tutto rimane ancora nell' embrione di prima, e le deſcrizioni che ne abbiamo o ſono di molto imperfette, o deſunte piuttoſto da una fervida immaginazione, che da vere ed eſatte oſſervazioni.

Queſto difetto, s' io mal non m' appongo, egli è nato non ſolo dalla ſomma difficultà che s' incontra nel notomizzare negli uccelli gli organi della reſpirazione, ma ancora dalle varietà che ſi veggono negli organi medeſimi; poichè non ſolo nei differenti generi ſi riſcontrano delle diverſità rimarcabili, ma ben anche negli uccelli della ſpecie medeſima, e non di raro mi è avvenuto di vedere che nell' uccello iſteſſo le veſciche aeree della deſtra parte non erano nè per la ſtruttura nè pel numero a quelle della ſiniſtra corriſpondenti. E quello che diciamo di queſte convien pur ripeterlo ancora di quella parte che chiamano laringe interna, poichè in alcuni uccelli è di craſſi muſcoli fornita, in altri n' è ſenza affatto; membranoſa ſi vede in alcuni, in altri cartilaginoſa, oſſea in altri; in cert' uni poi è contratta aſſai, in altri meno, e finalmente in diverſi non poco dilatata. Siccome però il deſcrivere tutte queſte varietà ſarebbe troppo lungo e ſpiacevole ancora, così voglio prima d' ogn' altro avvertito ch' io non darò che le diverſità maggiori e più notabili che mi ſarà avvenuto di vedere in quegli uccelli che furono da me oſſervati.

La trachea, o aſpra arteria che negli uccelli è più o meno lunga a miſura che gli uccelli hanno il collo più lungo o più breve, è un ampio canale che partendoſi dalla parte poſterior della bocca diſcende per tutta la lunghezza del collo, entra nella cavità del torace, e nei polmoni per cui l' aria paſſa alle parti interne, ed eſce liberamente. Queſta viene diſtinta in tre differenti parti, cioè in capo, tronco, e rami. Il capo che diceſi comunemente laringe è la parte ſuperior della ſteſſa, ed è coſtituita dietro la parte poſterior della lingua. La ſtruttura di queſta diſſe l' *Hallero* eſſer ſimile, oppure analoga a quella dell' uomo, e certo ſe ſi eccettuino alcune differenze che ſembrano rimarcabili, tra loro paſſa una grandiſſima analogia. Gli anatomici hanno negli uccelli conſiderate quattro cartilagini, cioè la cricoide, due aritenoidee, e la ſcutiforme; non pare però difficile il dimoſtrare ſe non l' epiglottide, almen altro ſimile che a queſta corriſponda.

La cartilagine cricoide o annulare che nell' uomo s' alza poſteriormente e ſi contrae anteriormente, negli uccelli è all' oppoſto dilatata all' innanzi, e contratta all' indietro, anzi ivi facendoſi oſſea produce internamente, e nel mezzo una picciola prominenza o ſia tubercolo che corriſponde rettamente alla feſſura ſuperior della glottide. A queſta picciola prominenza con mobile articolo ſi congiungono due picciole cartilagini che dalla loro ſede corriſpondono alle cartilagini aritenoidee deſtra e ſiniſtra.

Queſte cartilagini oſſee hanno due proceſſi, l' uno dei quali è ſuperiore, inferior l' altro. Queſto ſcorrendo ſopra il margine laterale della cartilagine cricoide va a congiungerſi anteriormente con la cricoide medeſima, il ſuperiore producendoſi innanzi inclinato a vicenda da entrambi i lati internamente , col mezzo di allungati e mobili legamenti ſi uniſce con l' apice della cartilagine ſcutiforme . Queſti proceſſi ſono in tal maniera coſtituiti , e così con gl' inferiori diſpoſti che comprendendo tra loro un leggier ſolco rappreſentano i legamenti della glottide, e la figura della glottide medeſima.

La cartilagine ſcutiforme, che pur negli uccelli è oſſea, è come compoſta di due oſſetti, ma in così fatta maniera congiunti che moſtrano la figura di due triangoli equilateri , i vertici dei quali convengono inſieme. Queſta cartilagine benchè poſſa a taluno ſembrare un' addizione della cartilagine annulare, od anche, non ſenza ragione, una porzione fatta oſſea della ſteſſa cartilagine, pure ſicccome è manifeſta e diſtinta aſſai maſſime nelle laringi eſſiccate, pare ſtrano che il *Caſſerio* Anatomico diligentiſſimo non l' abbia almeno indicata, e particolarmente nei galli d' india , dei quali dà la figura, poichè in queſti è così coſpicua che internamente ancora ha un leggiero tubercolo che direttamente corriſponde alla prominenza interna della cartilagine annulare.

Rimane infine la cartilagine epiglottide qualora creder ſi voglia la laringe degli uccelli corriſpondente a quella dell' uomo . Queſta cartilagine ſebbene diſtinta non ſi vegga , nè tale ſia effettivamente, pure al diſopra della cartilagine ſcutiforme evvi un proceſſo che il *Caſſerio* chiamò proceſſo digitato della cartilagine annulare. Quantunque però queſto proceſſo ſia coſtituito in maniera che in vece di coprir la glottide ſia tutto all' oppoſto roveſciato allo innanzi, e riguardi con l' ottuſo apice la lingua , ſembra ciò nonoſtante eſſer creato in maniera, onde preſtar poſſa l' offizio della epiglottide iſteſſa . Si produce queſto nell' intervallo che paſſa fra la glottide e la lingua , ed è poſto in modo che può alla medeſima accoſtarſi e rimoverſi ſecondo il biſogno . Quindi nella deglutizione degli alimenti portandoſi indietro la lingua, ed inalzandoſi la laringe , ne avviene che duplicata al diſopra del proceſſo la membrana che copre il proceſſo medeſimo , rialzandoſi , anche mercè d' una lunga cartilagine , che a guiſa di leva dalla baſe dell' oſſo joide ſotto al proceſſo diſcende, faciliti alla membrana ſuddetta lo ſcorrere, e diſcendere poſteriormente ſopra la glottide , onde a guiſa di valvula chiuda l' ingreſſo nella laringe agli alimenti che diſcendono nell' eſofago, compiendo così mirabilmente l' uffizio dell' epiglottide ſteſſa.

Finalmente alla laringe degli uccelli non mancano i muſcoli crico-aritenoidei dilatatori della glottide, nati dalla parte poſteriore della cartilagine cricoide, ed inſeriti nei proceſſi delle cartilagini aritenoidee, nè mancano ancora gli jotiroidei elevatori della laringe nati dalla baſe dell' oſſo joide, ed inſeriti ai lati della cartilagine ſcutiforme, come manifeſti anco ſono gli ſterno-tiroidei depreſſori, i quali nati dallo ſterno, ed inſeriti nella parte inferiore dell' aſpra arteria aſcendono lateralmente ſempre aderenti all' arteria medeſima, ed hanno fine ai lati della cartilagine ſcutiforme. Da tutto queſto ſembra poterſi credere con l' *Hallero* eſſere la laringe degli uccelli ſimile o almeno analoga a quella dell' uomo, e per conſeguenza influir eſſa pure nella varia modulazion delle voci.

Dalla laringe diſcende un lungo canale, che è il tronco dell' aſpra arteria compoſta di perfetti anelli cartilaginoſi, il numero dei quali varia ſecondo la maggiore o minore lunghezza del canale medeſimo. Queſti ſono inſieme uniti da una membrana che diſcende dalla cartilagine annulare per tutta la lunghezza della trachea, la quale penetra nella cavità del torace, e termina verſo la quarta vertebra dello ſteſſo.

Queſta mercè della membrana frappoſta agli anelli ſi allunga, e ſi contrae per mezzo dei muſcoli già deſcritti. Il diametro di queſto canale non è ſempre lo ſteſſo, più ſpazioſo d' ordinario ſi vede nel principio, indi inſenſibilmente ſi contrae conſervando ſempre la ſua figura, la quale in altri è circolare, in altri ellittica. Giunto verſo il fine ſi fa più riſtretto, gli anelli ſi accoſtano più tra loro, perdono la loro figura facendoſi più ſchiacciati, indi termina in un' allungata membrana piana e quaſi contigua da entrambi i lati, da cui hanno origine i bronchi. Queſta particolare ſtruttura è quella che chiamano laringe interna, e che vien riputata l' organo principal della voce. Queſta ſtruttura però, che tale è appunto quale abbiamo deſcritta nei gallinacei, non è ſempre la ſteſſa negli altri uccelli, poichè per eſempio nelle cicogne, e più ancor nei colombi la maggior latitudine della trachea è appunto nel fine, ove anche gli anelli più ſi ſcoſi ſcoſtano fra loro, e la ſrappoſta membrana ſi fa più ſpazioſa. Da queſta latitudine ſi può egli dedurre quella baſſa voce, e profonda che coſtantemente hanno i colombi? All'incontro debbonſi forſe ripetere le acute e ſonore dei cardellini, canarini, uſſignuoli da un picciolo globo cartilaginoſo, a cui ſono aderenti piccioli muſcoli, ed in cui termina la trachea, e principiano i bronchi? Certamente qui non vi ſono le membranoſe linguette che nei gallinacei abbiamo vedute, e che ſi annoverano tra gli organi principali della voce.

Queſta varietà di ſtruttura più mirabile ancora ſi moſtra nei corvi, e nei papagalli. I corvi nel fine della trachea, che vedeſi ſenza alcuna contrazione, hanno quattro elegantiſſimi muſcoli due anteriori, e due poſteriori, che tutti a guiſa di piramidi coſtituiti aſcendendo attaccati alla trachea, vanno eſtenuati inſenſibilmente a perderſi verſo il decimo anello degli aſcendenti della trachea ſteſſa. All' oppoſto i papagalli nel luogo medeſimo hanno due muſcoli, uno per ciaſcun lato poſti lateralmente, i quali, come in tre diviſi, rappreſentano la grazioſa figura di un giglio roveſciato, le cui parti laterali vanno a terminare nell' eſtremità di due lamine oſſee ſemilunari e quaſi contigue, che compongono il fine riſtretto della trachea; quella di mezzo poi diſcendendo incurvata ſi va ad inſerire nella parte conveſſa dei bronchi poco al diſotto del loro principio. Queſti muſcoli come ſervono a contrarre la trachea ed i bronchi, influirebbero nelle forti e clamoroſe lor voci?

Egli è certo che queſta inferiore ſtruttura della trachea ove principiano i bronchi, comunque coſtituita, è cagione della principale formazion della voce negli uccelli. Noi più volte abbiamo reciſa ad alcuni di queſti, viventi ancora, la parte ſuperiore della trachea due dita in circa al diſotto della laringe, ed abbiamo da queſti ottenute quaſi le voci medeſime, come ſe loro l' aſpra arteria reciſa non foſſe. Quindi in quegli uccelli ne' quali l' eſtremità di queſto canale è conformato molto diverſamente da ciò che fu detto, come nelle anitre maſchi, nei quali in vece di reſtringimento, o di linguette membranoſe, oppure di muſcoli, evvi una grande veſcica oſſea, la loro voce è rauca aſſai e molto dimeſſa; laddove nelle femmine che hanno un tubo oſſeo e riſtretto, inferiormente diviſo in due, da cui hanno origine i bronchi, le loro clamoroſe voci e penetranti aſſordano ed inquietano ſommamente.

Ove termina l'aſpra arteria ivi cominciano i bronchi, che ſono i due ſuoi rami deſtro e ſiniſtro, per mezzo dei quali l' aria paſſa dalla trachea nei polmoni. La ſtruttura di queſti è corriſpondente a quella del tronco, con queſta differenza però che gli anelli qui ſono imperfetti, e rappreſentano tanti ſemicircoli, che tengono la parte eſteriore dei bronchi, mentre la parte interna è ſoltanto membranoſa. Queſti bronchi divaricati a vicenda, ed in alcuni uccelli ſuperiormente uniti da un traſverſale legamento, entrano nel polmone da entrambi i lati, indi in più rami e ſpazioſi diviſi comunicano l' aria a tutto il polmone. In queſti rami, e ſegnatamente ne' maggiori, ſi veggono delle membranette tranſverſali aſcendenti che occupano la metà del lume dei rami medeſimi. Queſte membranette, per quanto dimoſtra la più ſcrupoloſa oſſervazione, ad altro non ſembrano eſſer fatte che per diriger l' aria per diverſe e particolari vie, dappoichè fra ognuno degli interſtizj, o vogliam dire delle cellette evvi il ſuo libero ed aperto pertugio che riceve l' aria, e la traſporta ad alcuni determinati condotti fuori del polmone coſtituiti. La natura, che nelle ſue operazioni tanto è più mirabile quanto più ſemplice, non ſembra aver già coſtrutte queſte membranette perchè concorreſſero alla formazion della voce, come è opinione d'alcuni illuſtri e celebri autori; poichè non pare molto ragionevole che la voce abbia a formarſi nella cavità dei polmoni e dei bronchi, eſſendo la laringe interna ed eſterna per ſe medeſime ſufficienti a produrla.

I polmoni, che ſi aprono in larghe e ſpazioſe celle, occupano nel torace quello ſpazio che è tra la prima e la ſettima coſta. Queſti non ſono già liberi come nei quadrupedi, ma ſi ritrovano aderenti alle vertebre del torace, alle coſte, ed ai muſcoli intercoſtali. Non ſono per tutto circondati dalla pleura; quindi l' aria eſce da loro liberamente, e paſſa ad altre cavità, delle quali in ſeguito parleremo. Diſſi che non ſono per tutto circondati dalla pleura, poichè queſta aſcendendo dalle parti laterali delle coſte, e ſtendendoſi ſovra di eſſi non copre che la parte loro anteriore e concava, e ſta ad eſſi irregolarmente aderente. Da ciò ne avviene che laſcia in alcune parti ſotto di eſſa libero l' egreſſo e l' ingreſſo dell' aria, ed in alcuni luoghi trovandoſi ancora pertugiata ed aderente al polmone, dà alla medeſima un facile e pronto paſſaggio. Queſta membrana, per cui ſcorrono alcuni faſcetti di fibre muſcolari che vengono dalle vicine coſte, è ſtata chiamata dal celebre *Huntero* il diafragma degli uccelli, *perchè ſcema la concavità dei polmoni verſo l' abdome, e perchè concorre a dilatar le celle dell' aria*, il che certamente convenendo in parte coll' uſo del diafragma merita che vi ſi abbia particolar rifleſſione. Io però niente togliendo a queſto, ſebbene altro non ſembri eſſere che la pleura irregolarmente al polmone aderente, mi farò lecito di accennare un' altra membrana, a cui, ſe non ſono di gran lunga ingannato, ſembra che poſſa più adeguatamente convenire il nome e l' uſo del diafragma. Queſta, che coſtantemente ſi vede, è una membrana tra il pericardio ed il fegato coſtituita, la quale diſcendendo anteriormente va a congiungerſi verſo la parte inferiore dell' oſſo dello ſterno, lateralmente con le coſte, poſteriormente con queſte, con la ſpina, e con la parte ſuperiore delle oſſa della pelvi, circoſcrivendo così le due cavità del torace e del ventre. Che queſto ſia il vero diafragma lo perſuade 1.° l' attacco ſuperiormente del pericardio con queſta membrana, inferiormente col legamento ſoſpenſorio del fegato: 2.° le fibre carnoſe che in alcuni uccelli, come nei corvi, carnoſe ſi veggono ſcorrere per la ſteſſa: 3.° la poſizion ſua che corriſponde a quella degli altri animali, e finalmente l' azione di queſto ſopra i viſceri del ventre.

Queſto diafragma, ſebbene nell' eſpirazione aſcenda e nell' inſpirazione diſcenda, pure non giunge mai a toccare i polmoni, i quali, come fu detto, ſono aderenti alla parte ſuperior del torace. Queſta nei volatili particolar adeſione dei polmoni è una di quelle mirabili produzioni, delle quali la Divina Increata Sapienza ha voluto provvedere con ſingolar magiſtero gli abitatori dell' aria, onde nulla alle complicate e varie di loro azioni mancar poteſſe. E di fatto ſiccome l' aria nei quadrupedi ſi diffonde ſoltanto nei polmoni, così nei volatili paſſando liberamente da queſti a molte altre cavità, non ſolo nelle parti molli, ma nelle oſſa eziandio coſtituite; era di neceſſità aſſoluta che fermi foſſero onde potere a queſte per gli opportuni e pronti meati comunicar l' aria liberamente. Ora quali ſiano queſte cavità, come e dove diſpoſte, quali i meati dell' aria, fa d' uopo conſiderare.

Queſte aeree cavità, oppur ricettacoli, o come chiamano comunemente veſciche, che ſparſe ſono pel corpo degli uccelli, e che per vie particolari comunicano tutte immediatamente o mediatamente coi polmoni, ſono fatte di una membrana traſparente e tenace, che differiſce di molto da quelle della tunica cellulare, e ſono in numero, figura, e capacità varie e ben differenti tra loro. Altre di queſte ſi veggono nelle cavità del torace, altre nelle parti laterali di queſto, altre nel collo, altre finalmente nel ventre.

Nel torace il quale ordinariamente ſi vede in due cavità laterali diviſo deſtra e ſiniſtra da una o più membrane, che figurano il mediaſtino, vi ſi riſcontrano d' ordinario in ogni lato due ampie veſciche, la ſuperiore delle quali alcuna volta è maggiore, tal' altra minore, ed in alcuni uccelli ſe ne veggono tre, e queſte ultime poſte ai lati del pericardio ſotto allo ſterno e molto minori, le quali però non vi ſono ſempre, nè da entrambi i lati coſtanti. La parte ſuprema poi del torace ſotto all' oſſo lunare è tutta cava chiuſa anteriormente da una ben diſteſa membrana ſimile alle deſcritte, la quale occupa tutto lo ſpazio che è fra le gambe del detto oſſo, e che diſcende ſino alle clavicole. Queſta ſpazioſa cavità aerea ſerve di comunicazione a molte altre minori laterali veſciche, che ſi veggono fuori della cavità del torace.

Queſte laterali veſciche ſono tre fra i muſcoli, ed alla articolazione dell' omero mirabilmente diſtribuite. Queſte ſi diſtinguono in ſuperiori, medie, ed inferiori. Le ſuperiori ſono poſte longitudinalmente ſotto la ſcapula tra le coſte e i muſcoli intercoſtali, e ſubſcapulari: le medie ſono fatte a guiſa di borſa tra l' eſtremità del muſcolo pettorale maggiore e minore: le inferiori e minori dell' altre ſono coſtituite ſotto le medie, e corriſpondono ſegnatamente al capo dell' omero. Oltre queſte tre laterali veſciche ve n' è una quarta poſta all' eſtremità della clavicola, e dell' oſſo lunare, che all' articolazione di queſt' oſſa corriſponde.

Nel collo ſi veggono ordinariamente due allungate veſciche una per ciaſcun lato che aſcendono aderenti ai proceſſi traſverſi, ed ai lati delle vertebre, le quali in molti uccelli terminano verſo la quarta o quinta vertebra delle aſcendenti.

Nel ventre finalmente più veſciche vi ſono, due delle quali ſono coſtantemente maggiori l' una a ſiniſtra, e l' altra a deſtra, e queſta quaſi ſempre maggiore della ſiniſtra, poichè nella parte inferiore ed eſtrema del ventre paſſa nella parte oppoſta in vicinanza, e quaſi a contatto della ſiniſtra. Queſte veſciche da entrambi i lati diſcendono dal diafragma, e comprendono fra loro uno ſpazio che contiene il ſegato, ed il ventriglio, in cui non entra mai aria. Oltre le due aeree cavità accennate altre ve ne ſono aderenti alle oſſa della pelvi, altre che diſcendono, e ſi cacciano tra gl' inteſtini per modo che tutto il ventre a riſerva dello ſpazio deſcritto ſi può dire inveſtito dall' aria e ripieno. Ora poſta l' enumerazione di queſte veſciche non andrebbe egli ingannato di molto chi voleſſe aſſerire ſu l' altrui autorità che dieci ſono ſoltanto, cioè otto nel petto, e due nel ventre?

Tutte queſte aeree cavità ricevono aria dai polmoni, che ſono come centro comune di tutte. Nella ſuperiore e laterale del torace entra l' aria per un foro, che ſi vede nel polmone e nella membrana che lo copre in vicinanza ai vaſi che dal cuore penetrano nel polmone, e così nell' inferiore per un foro ſimile, ma maggiore, che è manifeſto verſo la metà della parte cava dei polmoni, ed in alcuni uccelli come nei colombi, galli, pernici, quaglie ecc. per un' apertura tra la membrana che copre il polmone e le coſte, e nella ſuprema del torace per due ſpazioſi fori che ſi veggono tra l' eſofago ed i bronchi, e che derivano dalla parte anteriore e ſuperiore dei polmoni. Queſta grande cavità poi è come un atrio da cui prendono aria le contigue laterali veſciche.

Alle ſuperiori penetra per un' ampia bocca, e che coſtituiſce quaſi con la ſuprema una medeſima cavità, che ſi vede al diſopra dei vaſi e nervi alari: alle medie per una larga feſſura poſta tra la cavicola e il muſcolo ſubclavio; alle inferiori per un picciolo foro poſto verſo la eſtremità interna del muſcolo ſubclavio; alla quarta finalmente per un'apertura che ſi vede verſo la eſtrema parte della clavicola ove ſi congiunge con l' omero.

I polmoni che ſuperiormente ſi aprono in iſpazioſe celle mandano aria alle laterali del collo per due vie, che ſi ſcorgono nelle cavità ſuperiori e laterali del torace, e che ſcorrono ſopra i bronchi, e vaſi polmonari.

Le veſciche finalmente del ventre ſono dai polmoni abbondantemente corredate d' aria per due ſpazioſe aperture che hanno inferiormente, e che corriſpondono con altre ſimili che ſi veggono tra la parte poſteriore del diaframma e il lembo ſuperiore delle oſſa della pelvi.

Le oſſa non meno che le parti molli ſono negli uccelli d' aria ſuſcettibili. Non tutte però lo ſono egualmente; poichè quelle che ammettono aria ſono più leggieri e più bianche delle altre, ed hanno le celle oſſee interamente, o per la maggior parte vuote. Nei corvi, nelle pernici, nelle cicogne ecc. l' aria paſſa ſpeditamente nelle oſſa della teſta, in quelle della ſpina, nell' oſſo lunare, nelle ſcapule, nelle clavicole, negli omeri, nelle coſte, nello ſterno, nelle oſſa della pelvi, ed in quelle dell' oſſo ſacro. Allo incontro in quelli che furono da me cimentati il femore, le gambe, le oſſa del piede, e così il raggio, e l' ulna, e quelle che corriſpondono nei quadrupedi alle oſſa del carpo, e metacarpo la eſcludono intieramente, giacchè le celle di queſti oſſi ſono ripiene tutte, o in gran parte di midollo o di ſoſtanza ſanguigna. Nè ſolo queſt' oſſa eſcludono l' aria, ma nei galli, nelle quaglie ecc. l' aria non entra che per l' oſſo dell' omero, e della clavicola, ed in alcuni dell' omero ſoltanto. Ora veggiamo quali ſiano i meati pe' quali l' aria s' infonde nelle oſſa accennate.

Nelle oſſa della teſta aſcende l' aria per la tromba euſtachiana, e quindi dal timpano ſi diffonde per le ſpazioſe celle, o ſia pel meditullio di tutte le oſſa, che pur voi nella voſtra eſpoſizione dell' encefalo degli uccelli avete notato eſſere un teſſuto molto ſpugnoſo, ed abbondante. Nei corvi evvi coſa che merita particolarmente di eſſere ricordata. Oltre le cellette che ſi veggono fra le due lamine componenti le oſſa del cranio al diſotto della ſeconda lamina diſcendono infinite rette fibre, che a guiſa di tante colonnette ſi vanno ad unire ad una terza lamina oſſea ſottiliſſima traſparente, che copre la dura madre, laſciando tra queſta e la ſeconda uno ſpazio incirca d' una linea parigina, il quale viene dall' aria intieramente ripieno.

I polmoni, che come fu detto ſono colla parte loro conveſſa e poſteriore aderenti alla ſpina ed alle coſte, comunicano immediatamente l' aria per alcuni forellini, che ſi veggono ai lati delle vertebre del torace non ſolo ai corpi delle vertebre ſteſſe, ed ai proceſſi delle medeſime, ma paſſa ancora nel tubo ſpinale.

Inutilmente poi ſi cercherebbero nei corvi i paſſaggi dell' aria nell' eſtremità che riguardano il corpo dell' uccello nelle clavicole, nelle ſcapule, e nell' oſſo lunare, poichè in queſti ſi veggono nella parte oppoſta, ove queſt' oſſa ſi articolano fra loro: ordinariamente però, e nelle clavicole in particolare, ſervono a queſt' uſo alcuni piccioli rotondi orifizj, che ſi ſcorgono nella eſtrema interna parte di queſt' oſſo, ove allo ſterno ſi congiunge.

Perchè poi l' aria liberamente paſſaſſe nell' omero, pare che la natura vi abbia poſto un particolare artifizio. Preſſo al capo di queſt' oſſo nella parte ſua inferiore vi ſi ſcorge un ſeno profondo, e quaſi circolare che ſembra fatto appunto per raccoglier l' aria dalle inferiori laterali veſciche, alle quali diametralmente riſponde, e per indi tradurla per un foro poſto nella parte inferiore del ſeno in tutta l' interna cavità dell' oſſo medeſimo.

E' già noto che negli uccelli vi ſi veggono da ogni lato due ſerie di coſte, cioè le ſuperiori, e le inferiori. Le ſuperiori ricevono aria dai polmoni nelle loro eſtremità, ove ſi articolano con le vertebre; all' oppoſto le inferiori ove ſi congiungono collo ſterno, e queſto per alcuni forellini, che ſono tra gl' interſtizj delle articolazioni con le coſte, oppure per alcuni ſpazioſi fori poſti in queſt' oſſo nella parte interna e ſuperiore.

Il paſſaggio finalmente dell' aria nelle oſſa della pelvi è nella parte interna delle oſſa medeſime in quel luogo che riguarda le reni, e nell' oſſo ſacro per alcuni forellini poſti ai lati delle vertebre componenti l' oſſo ſteſſo, e che corriſpondono ad alcune veſcichette, che comunicano con le contigue del ventre.

Ecco come l' aria paſſa dalla laringe e dai polmoni alle oſſa, ed alle veſciche tutte del torace e del ventre, e come tutte queſte rimangono dall' aria riempiute e diſteſe. Sebbene però nel dar aria artifiziofamente alla trachea tutte ad un tempo e le veſciche del torace e quelle del ventre ſi gonfino inſieme, e tutte ricevano aria nel tempo medeſimo, pure nell' animal vivente ſi vede ad evidenza che nell' inſpirazione ſi diſtendono quelle del torace, e ſi contraggono quelle del ventre, e così a vicenda nell' eſpirazione ſi diſtendono queſte, e ſi contraggono quelle, rattenendoſi ſempre in queſta maniera una porzione dell' aria inſpirata, la quale vedremo in ſeguito eſſer non meno utile che neceſſaria.

Avendo finor veduto quali e quante ſieno negli uccelli queſte aeree veſciche, come e dove coſtituite, quali oſſa ſieno d' aria ſuſcettibili, e quali i meati per dove l' aria paſſa a queſte liberamente, reſta ora a conſiderarſi a qual uſo ſervir poſſa un così ammirabile e ſorprendente meccaniſmo. Tre ſono le congetture che ſembrano ragionevoli: la prima, che queſte veſciche ſiano come tante appendici dei polmoni inſervienti a ricevere, ed a contener l' aria: la ſeconda che ſervano per facilitare il moto ed il volo agli uccelli: la terza per accreſcere la forza delle lor voci, e per una più lunga protrazione del canto. Eſaminiamone brevemente ciaſcuna.

Il celebre *Huntero* penſando a qual uſo ſervir doveſſero queſti ricettacoli aerei ha creduto che queſti ſi poteſſero calcolare come tanti ſerbatoj d' aria, i quali preſtaſſero vantaggio grandiſſimo agli uccelli, togliendo loro quella difficoltà di reſpiro, alla quale volando vanno ſoggetti. A ciò fu egli condotto particolarmente dall' analogia che paſſa tra gli organi della reſpirazion degli uccelli e quella degli amfibj, come delle vipere, ſerpenti ecc., e ſiccome in queſti i lunghi ſacchi aerei di cui ſono dotati fanno sì che poſſano reſpirare meno frequentemente degli altri, così ha penſato che queſti ricettacoli produr poteſſero negli uccelli gli effetti medeſimi. Io credo bene che queſti ricettacoli preſtar poſſano in alcune circoſtanze un qualche vantaggio alla reſpirazion degli uccelli, ma non però così da paragonarſi con quello degli

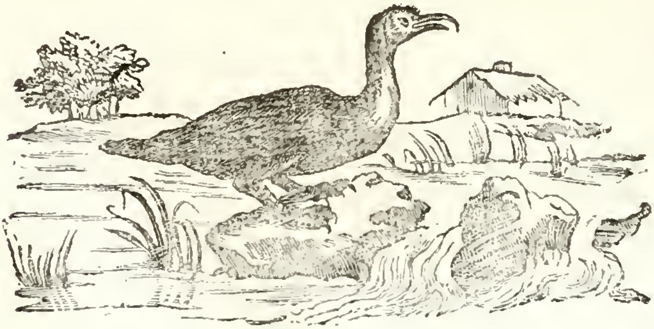
gli amfibj accennati. Gli animali freddi hanno ſenza comparazione alcuna minor biſogno di reſpirare dei caldi, ed è ſtato oſſervato che nel vuoto un ranocchio, una vipera ecc. campa più di quello che faccia un uccello, il che addiviene fra l' altre ragioni, perchè l' aria inſpirata da quelli rattiene più a lungo le naturali ſue qualità, che quella inſpirata da queſti. Quindi i ricettacoli aerei dei detti amfibj, che freddi animali ſono, ponno ſomminiſtrare alla loro tarda reſpirazione un vantaggio ſenza confronto molto maggiore che negli uccelli, i quali calidi eſſendo, e cangiando preſto perciò la natura dell' aria inſpirata, vengono da queſto quaſi ad una continua neceſſità di reſpirare eccitati.

Se queſti ricettacoli però ſono d' un leggier vantaggio alla reſpirazion degli uccelli, utiliſſimi ſembrano al moto di queſti ed al volo. E' già noto che i quadrupedi di qualunque genere ſono dagli uccelli in celerità di gran lunga ſuperati. Il più eſercitato, più leggiero, e vigoroſo cavallo non può fare più di trenta leghe in un giorno, nè il cervo più di quaranta, e l' immortale Sig. di *Buffon* aggiunge a queſto come particolare aſſai l' eſempio del corſo di un ingleſe, il quale in undici ore, e trenta due minuti fece ſeſſanta due leghe cambiando per altro ventuna volta i cavalli. Queſta celerità, che nei quadrupedi è grande, è poco o nulla ſe confrontar ſi voglia con quella degli uccelli. Nota pure il Sig. di *Buffon* che la facilità con cui da noi ſi allontana un groſſo uccello, un' aquila, un nibbio, un avoltojo, e in meno di tre minuti ſi perde di viſta, prova che può fare venti leghe in un' ora, e più aſſai di dugento in un giorno, calcolandoſi ancora, oltre la notte, molti intervalli di ripoſo e di quiete. Non reca dunque meraviglia ſe in meno di ſette od otto giorni le noſtre rondinelle ſi portano dal noſtro clima ſotto la linea, e ſe ſi ſono vedute in meno di otto o nove paſſare dall' Europa ſulle coſte del Senegal.

Per iſpiegare queſta grande lunghezza di volo gli oſſervatori di maggior conſiderazione ſono ricorſi alla leggerezza, ſuperficie, e diſpoſizion delle piume, alla conformazione delle ali, alla loro eſtenſione e ſolidità, alla forza dei muſcoli, e finalmente alla leggerezza delle oſſa, e del corpo. Io non negherò certamente che tutte queſte coſe non poſſano e debbano cooperare di molto alla ſpeditezza e lunghezza del volo; ma io credo ancora che a ciò contribuiſcano non poco le veſciche deſcritte, e l' aria che penetra ancora nelle cavità delle oſſa. Abbiamo veduto, che tutta la cavità del torace, e quaſi tutta quella del ventre è riempiuta di queſte veſciche; ora nella inſpirazion penetrando in queſte l' aria, e diſtendendole, due non leggieri effetti produce, l' uno che rende maggiore la ſuperſizie dell' uccello, l' altro che lo rende ſpecificamente più leggiero. Or chi non vede quanto da queſte due mutazioni debba accreſcerſi la facilità e ſpeditezza del volo? Una maggiore ſuperficie viene ad eſſere con maggiore facilità ſoſtenuta dalla colonna dell' aria, ſu di cui poggia; quindi quanto più facilmente viene a librarſi ſu l' aria, tanto meno uſa di fatica nel ſoſtenerſi, e tanto più facilmente può al volo abbandonarſi e far viaggio. Queſta utilità, che merita certo in un lungo cammino la ſua rifleſſione, maggiore ancora ſi fa dall' aria che inſpira, la quale penetrando nelle veſciche, e nell' oſſa, e fors' anche per fin nelle penne, che pur aria contengono, lo rende ſpecificamente più leggiero; e più ancora perchè rarefacendoſi cagiona per conſeguenza negli uccelli una maggior leggerezza. Or queſta rarefazione, che rende i volatili quaſi a guiſa di tanti palloni volanti, moſtra ad evidenza quanto debba in loro influire e facilitare ancora l' azione e ſpeditezza del volo. Quindi abbiamo veduto che nella maggior parte degli uccelli di gran volo, come nelle cicogne, corvi, pernici ecc. moltiſſime delle loro oſſa ſono vuote, e ricevono aria, là dove i gallinacei, che volano aſſai poco, non hanno d' ordinario che il ſolo omero che goda di queſto vantaggio. Nè a queſto ſi oppone, come venne creduto, fra gli altri l' eſempio dello ſtruzzo, la di cui ſtruttura corriſponde a quella degli altri uccelli, ſebbene non voli, poichè quantunque queſto animale non s' alzi a volo, pure ſcorre con tanta velocità che ſupera ogni più fiero e generoſo cavallo. Or queſta rapidità di moto, e queſta leggerezza in un uccello che per natura ſua è grave aſſai e macchinoſo, a coſa ſi deve ella mai attribuire ſe non ſe all' effetto dell' aria inſpirata? Certo le ragioni addotte ſembrano provarlo ad evidenza. Oltre ciò qualora lo ſtruzzo s' abbandona al corſo diſtende le ali, le agita leggermente, e ſembra ajutarſi in quella maniera però che le brevi di lui ali e diſordinate penne glielo ponno permettere. Or queſta azione di mover le ali, e più certamente negli altri uccelli viene ſecondata ed ajutata non poco dalle laterali veſciche, che appunto ſtanno all' articolazione dell'omero. Ecco come queſti ricettacoli aerei facilitar poſſono il moto ed il volo agli uccelli, il quale ſi rende in eſſi così facile e di sì poca fatica, che non di rado avviene che piacevolmente ne aſcoltiamo alcuni, i quali in alto ancora, a leggier volo elevati, riempiono l' aria per lungo tratto di tempo delle melodioſe loro voci.

Quelli che ſi ſono occupati nel calcolare la forza di queſte voci hanno oſſervato eſſere maggiore aſſai la voce degli uccelli che quella dei quadrupedi, ed è parere del lodato Sig. di *Buffon*, *che la voce di quelli ſia non ſolamente più forte di quella di queſti relativamente al volume dei loro corpi, ma anche aſſolutamente*, provando ciò coi fatti deſunti dalle proprie oſſervazioni, e dalla fiſica più ſcrupoloſa. Una diverſità così grande doveva certo riconoſcere una cauſa corriſpondente; quindi hanno oſſervato che la trachea negli uccelli è più grande e più forte proporzionatamente che nei quadrupedi, i polmoni più eſteſi, e gli organi tutti della voce così diſpoſti che ſembrano formati per accreſcerne l' intenſità e la forza. Queſta organizzazione però, che moltiſſimo può influire ſu la forza delle voci, poco o nulla ſervirebbe qualora gli organi ſteſſi non foſſero abbondantemente d' aria provveduti, in quella maniera che un organo muſicale, per eccellente che ſia, non manda voci ſe non che deboli e ſiacche, s' egli non è di ſoſtanza aerea ſovvenuto copioſamente. Lo ſteſſo dee pur dirſi negli uccelli, e ſiccome i ricettacoli aerei ſono in queſti quelle ſorgenti, che abbondante copia d' aria ſomminiſtrano agli organi della reſpirazione, così da queſti in maſſima parte dipender deve la forza maggiore delle lor voci. Quello che diciam della forza convien pure ripeterlo per la protrazione e modulazione del canto ancora. Chi v' è che non abbia più volte piacevolmente aſcoltato il dolce e ſoave canto di un uſſignuolo, oppure di un canerino qualora ſenza mai prender fiato in lunghe e continuate voci ed amoroſe prorompe, e che non abbia ad un tempo ſteſſo ammirate e la facilità e la lunghezza del canto medeſimo? Tanta copia d'aria, tanta forza quanta a ciò richiedeſi, e d'onde mai ſi può ella ripetere in così piccoli e dilicati animaletti, ſe non ricorriamo alla particolare loro ſtruttura, e ſegnatamente alle aeree veſciche? Non è però che alcune di queſte ſiano più preſto deſtinate al canto delle altre, come alcuno ha creduto, e che la cavità ſuprema del torace concorra meglio delle altre alla formazion della voce, e ciò perchè forata la membrana dell' oſſo lunare ſi perda la voce, poichè ciò non è particolare di queſta, ma comune a tutte le altre, le quali aperte che ſiano, perdono aria, e tolgono per conſeguenza l' alimento alla voce ed al canto.

Ecco quello che oſſervare ho potuto intorno agli organi della reſpirazion degli uccelli. Tornando a quello che già v' ho detto a principio, ho a voi dirette queſte oſſervazioni e per averne il ſentimento voſtro che pregio aſſai, e perchè il mondo vegga la ſtima e l'amicizia, che vi profeſſo, e che voi per moltiſſimi titoli meritate.



DELLE FORMOLE

DIFFERENZIALI

La cui integrazione dipende dalla rettificazione delle Sezioni coniche.

Del Sig. GIAN-FRANCESCO MALFATTI Pubblico Profeſſore di Matematica nella Pontificia Univerſità di Ferrara.

1. DA che conobbero i Geometri darſi un gran numero di formole differenziali, le quali ricuſano di ſottometterſi alla integrazione algebraica, o a quella ſpecie d' integrazioni, che ſuppongono la quadratura del circolo e dell' iperbola, con ſomma avvedutezza penſarono, che molte di queſte formole contumaci potrebbero eſſere integrate con archi di date elliſſi, e di date iperbole; e perciò i loro ſtudj rivolſero all' indagamento delle condizioni, di cui debbon le formole eſſer dotate, perchè oltre le quantità algebraiche, che poſſono avervi luogo, le integri uno o più archi di ſezion conica.

2. Tra quelli, che ſi diſtinſero in sì fatte ricerche, primo dee metterſi il noſtro celebre Italiano Conte Giulio Carlo de' *Fagnani* di Sinigaglia, che integrò l' arco della lemniſcata, o ſia della Caſſiniana iſocrona (*a*) colla rettificazione dell' arco ellittico e dell' arco iperbolico. Queſti fu ſegui-

---

(*a*) E' già noto che la lemniſcata, e la Caſſiniana, che ha il lato del quadrato coſtante eguale alla ſemidiſtanza de' fuochi, ſono la medeſima curva. L' iſocroniſmo poi di un grave, che diſcende per un ſuo arco qualunque cominciato dal punto del nodo, e per la corda corriſpondente, è ſtato da me dimoſtrato nel libro ſtampato a Pavia l' anno 1781, che ha per titolo: Della curva Caſſiniana e di una nuova proprietà meccanica, di cui eſſa è dotata Trattato ſintetico.

tato dal *Mac-Laurin*, che coſtrinſe alcune formole a ſoggiacere alle ſuddette rettificazioni. Moltiſſime poi ne riduſſe il Sig. d' *Alembert*, le quali ſon raccolte nel Trattato di calcolo integrale del Sig. di *Bougainville*; e vi han poſto pur mano, ampliando ſempre più la teoria, il Sig. *Lexell* ne' Comentarj della nuova Accademia di S. Pietroburgo, e il P. Vincenzo *Riccati*, che io nominerò ſempre con ſommo riſpetto, nell' Opuſc. 2. Tom. 2 de' ſuoi Opuſcoli, e nelle Inſtituzioni analitiche; coſicchè parer potrebbe, che la coſa foſſe ormai ridotta alla ſua perfezione.

3. Ciò non pertanto io trovo, che dovendo la variabile delle formole ſcorrere per tutti i valori, de' quali è ſuſcettibile, quando nelle integrazioni entra l' arco iperbolico unito a quantità algebraica, appariſcono in certe ſue determinazioni delle quantità infinite di ſegno diverſo, le quali laſciano incerto il Geometra ſul valore di queſte differenze, che può eſſere infinito, e alcuna volta ancora finito. Ove queſto valor ſia finito, io m' accingo a provare, non eſſer eſſo altra coſa che la differenza tra l' intero aſſintoto e l' arco infinito corriſpondente di una data iperbola. Ed anche quando queſto valore ſia infinito, traſformati i termini in due altri, un de' quali ſia la differenza ſuddetta, l' altro termine mi fa toſto conoſcere la ſua infinità, e per conſeguenza la infinità dell' integrale della propoſta formola.

4. Affinchè poi ne' caſi pratici, in cui i ſimboli cangianſi in numeri, ſi poſſano avere i valori proſſimi de' noſtri integrali, preſento una ſerie di notabile convergenza, e da neſſun Geometra, per quel ch' io ſappia, avvertita, la quale eſprime il valore della differenza tra l' aſſintoto e l' arco d' iperbola infinito. Con che agevolanſi al maggior ſegno i calcoli, e sgombranſi quelle oſcurità ed incertezze, nelle quali han laſciate involte le formole integrate i mentovati celebri Autori.

5. Gli archi ellittici, che per lo più meſcolati cogli archi iperbolici compariſcono nelle integrazioni, ci avviſano, che a certi valori della variabile poſſono rimaner traſformati in quadranti delle riſpettive elliſſi, e trovarſi eziandio in compagnia della differenza tra l' aſſintoto e l' arco infinito dell' iperbola. Onde ſiccome aſſegniamo la ſerie convergente,

che equivale a queſta differenza, ſarà bene che accanto a queſta ſi ponga pure la ſerie convergente, che rappreſenta il quadrante ellittico. Si vedrà, che per le noſtre formole dalle due ſerie unite ne riſulta una terza elegantiſſima: e che il metodo, di cui ci ſerviamo, per arrivare a ciaſcuna delle anzidette ſerie, può eſſer utile ancora per le approſſimazioni de' valori degli archi ellittici ed iperbolici, qualunque ſiaſi la determinazione attribuita alla variabile delle formole.

6. Cominciam dalle ſerie, che riguardano gli archi ellittici. Nella elliſſe VTu (*fig.* 1) di centro C, fuoco F, direttrice HH ſia il ſemiaſſe $CV = a$; la diſtanza CA del centro dalla direttrice $= b$. Coll' intervallo del 1.° ſemiaſſe CV ſi deſcriva da C il quadrante circolare VE, e il raggio CE ſeghi l' elliſſe nel punto T: indi preſa un' aſciſſa CP, ſi alzi all' elliſſe e al cerchio l' ordinata PMN. Chiamato l' arco $EN = u$, ſarà $CP = \text{ſen.}\,u$; $PN = \text{coſ.}\,u$; e in oltre $CT = \frac{a\sqrt{(b^2-a^2)}}{b}$. Ma ſta per proprietà dell' elliſſe $CE : CT :: PN : PM$. Dunque $a : \frac{a\sqrt{(b^2-a^2)}}{b} :: \text{coſ.}\,u : PM$; e però $PM = \frac{\text{coſ.}\,u\sqrt{(b^2-a^2)}}{b}$. Il differenziale di queſto per le note regole è $= -\frac{du\,.\,\text{ſen.}\,u\sqrt{(b^2-a^2)}}{ab}$, e il ſuo quadrato $= \frac{du^2\,.\,(\text{ſen.}\,u)^2(b^2-a^2)}{a^2b^2}$. Così il differenziale di CP, cioè di $\text{ſen.}\,u$, è $= \frac{du\,.\,\text{coſ.}\,u}{a}$, e il ſuo quadrato $= \frac{du^2(\text{coſ.}\,u)^2}{a^2}$ $= \frac{b^2du^2(\text{coſ.}\,u)^2}{a^2b^2}$. Preſo pertanto nell' elliſſi l' archetto infinitamente piccolo Mm, ſarà

$$Mm = \frac{du\sqrt{\left(b^2(\text{ſen.}\,u)^2 - a^2(\text{ſen.}\,u)^2 + b^2(\text{coſ.}\,u)^2\right)}}{ab}$$

$$= \frac{du\sqrt{\left(b^2 - (\text{ſen.}\,u)^2\right)}}{b}.$$

7. Coll' ajuto del canone newtoniano ſi rivolga in ſerie il radicale della formola, e troveraſſi;

$$\frac{\sqrt{(b^2-(\text{ſen.}\,u)^2)}}{b} = 1 - \frac{(\text{ſen.}\,u)^2}{2b^2} - \frac{1.(\text{ſen.}\,u)^4}{2.4\,b^4} - \frac{1.3.(\text{ſen.}\,u)^6}{2.4.6\,b^6}$$

$$- \frac{1.3.5\,(\text{ſen.}\,u)^8}{2.4.6.8\,b^8}$$ ecc. ſenza limite. Dunque

$$TM = \int \frac{du\sqrt{(b^2-(\text{ſen.}\,u)^2)}}{b} = (A)\;u - \int \frac{du\,(\text{ſen.}\,u)^2}{2b^2}$$

$$-\left(\int \frac{1.\,du\,(\text{ſen.}\,u)^4}{2.4\,b^4} + \int \frac{1.3\,du\,(\text{ſen.}\,u)^6}{2.4.6\,b^6}\right.$$

$$\left. + \int \frac{1.3.5\,du(\text{ſen.}\,u)^8}{2.4.6.8\,b^8} \ldots + \int \frac{1.3.5.7\ldots(n-3)(\text{ſen.}u)^n du}{2.4.6\ldots n.b^n} + \text{ecc.}\right)$$

in infinito; dove n rappreſenta un numero pari della ſerie 4, 6, 8 ecc. ſenza confine. Il calcolo poi de' ſeni e coſeni circolari ci dà $\int du\,(\text{ſen.}\,u)^2 = \frac{a^2u}{2} - \frac{a\,\text{coſ.}\,u\,\text{ſen.}\,u}{2}$; e generalmente, quando n nella ſerie de' pari comincia dal num.° 4;

$$\int du\,(\text{ſen.}\,u)^n = \frac{(n-1)(n-3)\ldots 3a^n u}{n(n-2)\ldots 4.2}$$

$$-\,\text{coſ.}\,u\left(\frac{(n-1)\,a^3\,(\text{ſen.}\,u)^{n-3}}{n(n-2)} + \frac{(n-1)(n-3)\,a^5\,(\text{ſen.}\,u)^{n-5}}{n(n-2)(n-4)}\right.$$

$$\left. + \frac{(n-1)(n-3)(n-5)\,a^7\,(\text{ſen.}\,u)^{n-7}}{n(n-2)(n-4)(n-6)} + \text{ecc.}\right),$$ intendendo che la ſerie continui ſino a che ſi arriva al termine di valore infinito. Queſt' omogeneo di comparazione può eſſere eſpreſſo in altra maniera coll' invertere i coefficienti numerici, e le podeſtà che ſono ne' termini. Sarà quindi

$$\int du\,(\text{ſen.}\,u)^n = \frac{1.3.5.7\ldots(n-1)\,a^n u}{2.4.6.8\ldots n} - \frac{a\,\text{coſ.}\,u\,(\text{ſen.}\,u)^{n-1}}{n}$$

$$-\,\text{coſ.}\,u\left(\frac{3.5.7\ldots(n-1)\,a^{n-1}\,\text{ſen.}\,u}{2.4.6.8\ldots n} + \frac{5.7.9\ldots(n-1)a^{n-3}(\text{ſen.}\,u)^3}{4.6.8\ldots n}\right.$$

$$\left. + \frac{7.9.11\ldots(n-1)a^{n-5}\,(\text{ſen.}\,u)^5}{6.8.10\ldots n} + \ldots + \frac{(n-1)a^3\,(\text{ſen.}\,u)^{n-3}}{(n-2)\,n}\right).$$

Per conſeguenza $TM = u - \frac{a^2u}{4b^2} - \frac{a\,\text{coſ.}\,u\,.\,\text{ſen.}\,u}{4b^2}$

$- 1^2.3^2.5^2\ldots$

$$-\frac{1^2.3^2.5^2....(n-3)^2(n-1)a^n u}{2^2.4^2.6^2....n^2 b^n}+\frac{1.3.5.7....(n-3)a\,\text{cof.}\,u(\text{fen.}\,u)^{n-1}}{n(2.4.6....n)b^n}$$

$$+\frac{1.3.5.7....(n-3)\,\text{cof.}\,u}{2.4.6....n.b^n}\Big(\frac{3.5.7....(n-1)a^{n-1}\,\text{fen.}\,u}{2.4.6....n}$$

$$+\frac{5.7.9....(n-1)a^{n-3}(\text{fen.}\,u)^3}{4.6.8....n}+\frac{7.9.11...(n-1)a^{n-5}(\text{fen.}\,u)^5}{6.8.10....n}+...$$

$$+\frac{(n-1)a^3(\text{fen.}\,u)^{n-3}}{(n-2)n}\ \text{ecc.}\Big).$$ Non s'aggiunge coſtante, perchè tutto ſvaniſce, quando ſono u, e $\text{cof.}\,u=0$.

8. Si deve avvertire, che in queſto ſecondo membro i termini, principiando dal quarto, non eſprimono che i termini generali delle riſpettive ſerie; e che per avere l' arco *TM* è neceſſario attribuire ſucceſſivamente alla ſpecie n tutti i valori che ſono nella ſerie de' pari 4, 6, 8, ecc. in infinito. Riſulteran quindi infinite ſerie convergenti, una delle quali appartiene ai termini, ov' entra l' arco u; le altre ſpettano alle podeſtà di ſen. u; e queſte ultime non ſolo ſon convergenti, ma di più d' una convergenza creſcente a miſura che creſcono le ſuddette podeſtà. Per la qual coſa è facile il conoſcere, che aſſegnati competenti valori numerici ai ſimboli a, b, u, ſi potrà con non molto calcolo determinare il valor proſſimo di qualunque arco *TM* della elliſſi.

9. Vogliaſi preſentemente la ſerie, che eſprime il quadrante ellittico *TV*, che chiamo $\mathcal{Q}$. In tal caſo diventa $u=$ alla 4ª parte *EV* della circonferenza circolare, $\text{fen.}\,u=a$, $\text{cof.}\,u=0$; e denominata col ſimbolo ϕ la circonferenza di raggio 1, avremo $\mathcal{Q}=\frac{a\phi}{2}-\frac{a^3\phi}{2.4b^2}$

$$-\frac{(n-1)}{2}\Big(\frac{1^2.3^2.5^2.....(n-3)^2a^{n+1}\phi}{2^2.4^2.6^2.....n^2b^n}\Big).$$ Poſto $n=4$, l' ultimo termine ſi fa $=\frac{-1^2.3a^5\phi}{2.2^2.4^2b^4}$. A $n=6$ corriſponde il termine ultimo $=\frac{-1^2.3^2.5a^7\phi}{2.2^2.4^2.6^2b^6}$ ecc. colla legge che è manifeſta.

Dunque $(B)\ \mathcal{Q} = \frac{a\phi}{2} - \frac{a\phi}{2}\left(\frac{1.a^2}{2^2b^2} + \frac{1^2.3a^4}{2^2.4^2b^4} + \frac{1^2.3^2.5a^6}{2^2.4^2.6^2b^6} + \frac{1^2.3^2.5^2.7^2a^8}{2^2.4^2.6^2.8^2b^8}\text{ ecc.}\right)$, cioè ove A, B, C, D ecc. rappreſentino i termini precedenti; $\mathcal{Q} = \frac{a\phi}{2} - \frac{a\phi}{2}\left(\frac{1.1a^2}{2^2b^2} + \frac{1.3a^2A}{4^2b^2} + \frac{3.5a^2B}{6^2b^2} + \frac{5.7a^2C}{8^2b^2}\text{ ecc.}\right)$. La ſerie del 2°. membro di queſte due equazioni è convergente, perchè i numeri de' denominatori in tutti i termini ſon maggiori de' numeri de' numeratori, e perchè $\frac{a}{b}$ in tutte le elliſſi è minore dell' unità; onde ne' caſi particolari ſarà facilmente reperibile il valor proſſimo di $\mathcal{Q}$.

10. Paſſiam' ora a trovar la ſerie, che eguagli la differenza tra l' aſſintoto e l' arco iperbolico infinito. Sia l' iperbola VMM' (*fig.* 2.) de' due ſemiaſſi CV, VT, coſicchè CTD divenga il ſuo aſſintoto. Coll' iſteſſo vertice primario V, e i ſemiaſſi eguali ad VC ſi deſcriva l' iperbola equilatera VNN', il cui aſſintoto ſia CL. Aſſunta un' aſciſſa CP, vi s' adatti PMN ad angolo retto, che interſechi l' aſſintoto CD in D, e divenga PM l' ordinata dell' iperbola VM, PN l' ordinata dell' equilatera VN. Da M poi all' aſſintoto CD ſi guidi la $M\mathcal{Q}$ parallela all' altro aſſintoto Ci, e la MG, che compie il rettangolo de' lati MP, CP, tagli l' aſſintoto CD nel punto O.

I. Sarà $CV : VT :: PN : PM$. Perchè, per proprietà dell' iperbola equilatera, abbiamo $(CP)^2 - (CV)^2 = (PN)^2$. Ma l' altra curva ci ſomminiſtra l' analogia $(CP)^2 - (CV)^2 : (PM)^2 :: (CV)^2 : (VT)^2$. Dunque $(PN)^2 : (PM)^2 :: (CV)^2 : (VT)^2$; ovvero $CV : VT :: PN : PM = \frac{VT.PN}{CV}$.

II. Eſſendo HH la direttrice dell' iperbola VM, e F il ſuo foco, ſarà $CA : CV :: PN : CO$. Perchè la teoria delle ſezioni coniche c' inſegna, che ſta $CA : CV :: CV : CF = CT$; e pei triangoli ſimili DMO, DPC; $PD : CD :: VT : CT :: PM : CO$. Ma pel num.° I. $CV : VT :: PN : PM$. Dunque CV:

$CT::PN:CO$, ovvero $AC:CV::PN:CO=\frac{CV.PN}{CA}$.

III. $OG=PN$; $MO=CP-PN$. Imperciocchè $CT:CV::CO:OG$, e perchè $CT:CV::CV:CA$, ſarà anche $CV:CA::CO:OG$. Ma, per l' antecedente numero, $CV:CA::CO:PN$. Dunque $OG=PN$, e in conſeguenza $MO=GM-OG=CP-PN$.

IV. $OQ=\frac{CV(CP-PN)}{2CA}$; $CQ=\frac{CV(CP+PN)}{2CA}$. Si tiri VZ parallela all' aſſintoto Ci. Siccome TV è la metà di Ti, così TZ è la metà di TC. Ma i triangoli TVC, DMO ſon ſimili e ſimilmente poſti; in oltre MQ è parallela ad VZ. Quindi anche MQ dividerà per mezzo la DO. Ora ſta $CV:CT::CA:CV::MO:OD$, e però $CA:CV::CP-PN$ (III)$:OD$. Avrem dunque $OD=\frac{CV(CP-PN)}{CA}$, e conſeguentemente $OQ=\frac{CV(CP-PN)}{2CA}$. E perchè $CQ=CO+OQ$ $=\frac{CV:PN}{CA}$ (II) $+\frac{CV(CP-PN)}{2CA}$, riſulterà $CQ=\frac{CV(CP+PN)}{2CA}$.

V. Non cangiano le coſe dimoſtrate ne' precedenti numeri, ancorchè l' iperbola VM cadeſſe ſuperiormente all' equilatera VN, cioè il ſemiaſſe ſecondo foſſe maggiore del primo.

VI. Si conduca CLN' aſſintoto dell' iperbola equilatera, e ſi produca VT fino a queſto aſſintoto in L, ſarà $CV=VL$. Ora l' eſtremo punto dell' aſſintoto infinito CLN' coincidendo in un punto infinitamente lontano della curva, ſe ſupporremo CP, PN divenute le infinite CP', $P'N'$, N' cadrà preciſamente dove l' aſſintoto incontra l' iperbola, ed avremo il triangolo infinito $CP'N'$ ſimile al triangolo CVL. Ma $CV=VL$. Dunque l' infinita aſciſſa CP' è eguale all' infinita ordinata $P'N'$.

VII. Raccoglieremo da ciò, che eſſendo in genere la porzione aſſintotica $CQ=\frac{CV(CP+PN)}{2CA}$ (IV), pel caſo dell' aſciſſa e dell' ordinata infinite, diventerà l' intero aſſintoto $CTM' = \frac{CV.CP'}{CA} = \frac{CV^2}{CA}.\frac{CP'}{CV} = \frac{CV.P'N'}{CA}$.

VIII. La TK parallela all' aſſe primario CV determina la CK eguale al 2.° ſemiaſſe: Ora il num.° I. ci preſenta $PN = \frac{CV.PM}{TV} = \frac{CV.CG}{CK}$. Il perchè nell' ipoteſi delle coordinate infinite, cangiandoſi CG nell' infinita $CG' = P'M'$, ſarà l' aſſintoto $CTM' = \frac{CV^2}{CA}.\frac{CG'}{CK}$; il che ſerve per gli archi iperbolici, che ſi riferiſcono al 2.° aſſe, quand' eſſi divengono infiniti.

11. Queſte nozioni premeſſe, chiamo $CV = a$, $CA = b$; il doppio ſettore CNV diviſo per $CV = u$, onde riſulta $CP =$ coſ. iperb.° u, $PN =$ ſen. iperb.° u; e pel num.° I, $PM = \frac{VT.\text{ſen. ip}.u}{a}$. Il differenziale di CP ſi fa $= \frac{du.\text{ſen. ip}.u}{a}$, e il differenziale di $PM = \frac{du.VT.\text{coſ. ip}.u}{a^2}$. Ma, preſo l' archetto minimo Mm, il quadrato di queſto archetto è eguale alla ſomma de' quadrati de' due ſuddetti differenziali. Dunque, poichè $CT = CF = \frac{a^2}{b}$, e $(\text{coſ. ip}.u)^2 - (\text{ſen. ip}.u)^2 = a^2$, ſi avrà $Mm = \frac{du\sqrt{((\text{coſ. ip}.u)^2 - b^2)}}{b}$.

12. Per integrare queſta formola, butto in ſerie il radicale, e mi naſce; $\sqrt{((\text{coſ. ip}.u)^2 - b^2)} = \text{coſ. ip}.u - \frac{b^2}{2\,\text{coſ. ip}.u} - \frac{1.b^4}{2.4(\text{coſ. ip}.u)^3} - \frac{1.3b^6}{2.4.6(\text{coſ. ip}.u)^5} - \frac{1.3.5b^8}{2.4.6.8(\text{coſ. ip}.u)^7}$, ecc. ſenza limite. Queſta ſerie è convergente, perchè le quantità numeriche ſono maggiori ne' denominatori de' termini, che ne' numeratori, e di più in tutte le iperbole coſ. ip. $u > b$. Sicchè $\int Mm = VM = (C)\int\frac{du.\text{coſ. ip}.u}{b} - \frac{b}{2}\int\frac{du}{\text{coſ. ip}.u}$

$$-\left(\frac{1.b^3}{2.4}\int\frac{du}{(\text{coſ. ip.}u)^3}+\frac{1.3b^5}{2.4.6}\int\frac{du}{(\text{coſ. ip.}u)^5}\right.$$

$$\left.+\frac{1.3.5b^7}{2.4.6.8}\int\frac{du}{(\text{coſ. ip.}u)^7}+\ldots\ldots+\frac{1.3.5.7\ldots(m-2)b^m}{2.4.6\ldots\ldots(m+1)}\times\right.$$

$\left.\int\frac{du}{(\text{coſ. ip.}u)^m}\text{ ecc.}\right)$ in infinito, rappreſentando m un numero qualunque poſto nella ſerie de' diſpari 3, 5, 7, 9, ecc.

13. Quanto al 1°. termine di queſt' omogeneo, i teoremi de' ſeni e coſeni iperbolici ce 'l danno $=\frac{a.\,\text{ſen. ip.}u}{b}$. Il 2°. laſciamol per ora coll' eſpreſſione della ſommatoria; e per gl' integrali ſuſſeguenti, applichiamo la ſuddetta dottrina alla integrazione della formola generale $\frac{du}{(\text{coſ. ip.}u)^m}$, la qual ſi trova eſpreſſa dalla ſeguente equazione; $\int\frac{du}{(\text{coſ. ip.}u)^m}$

$$=\frac{(m-2)(m-4)(m-6)\ldots\ldots 3.2}{(m-1)(m-3)\ldots.\,4.2a^{m-1}}\int\frac{du}{\text{coſ. ip.}u}$$

$$+\frac{\text{ſen. ip.}u}{(m-1)a(\text{coſ. ip.}u)^{m-2}}$$

$$+\text{ſen. ip.}u\left(\frac{m-2}{(m-1)(m-3)a^3(\text{coſ. ip.}u)^{m-3}}\right.$$

$$+\frac{(m-2)(m-4)}{(m-1)(m-3)(m-5)a^5(\text{coſ. ip.}u)^{m-5}}$$

$$+\frac{(m-2)(m-4)(m-6)}{(m-1)(m-3)(m-5)(m-7)a^7(\text{coſ. ip.}u)^{m-7}}$$

$$\left.+\ldots.+\frac{(m-2)(m-4)(m-6)\ldots\ldots 3.1}{(m-1)(m-3)(m-5)\ldots.\,4.2a^{m-2}(\text{coſ. ip.}u)^2}\right),$$

o uſando d' un' inverſione ſimile all' altra dell' arco ellittico;

$$\int\frac{du}{(\text{coſ. ip.}u)^m}=\frac{1.3.5\ldots\ldots(m-2)}{2.4.6\ldots\ldots(m-1)a^{m-1}}\int\frac{du}{\text{coſ. ip.}u}$$

$$+\frac{\text{ſen. ip.}u}{(m-1)a(\text{coſ. ip.}u)^{m-2}}$$

$$+\,\text{ſen. ip.}u\left(\frac{3.5.7\,\ldots\,(m-2)}{2.4.6\,\ldots\,(m-1)\,a^{m-2}\,(\text{coſ. ip.}u)^2}\right.$$

$$+\frac{5.7.9\,\ldots\,(m-2)}{4.6.8\,\ldots\,(m-1)\,a^{m-4}\,(\text{coſ. ip.}u)^4}$$

$$+\frac{7.9.11\,\ldots\,(m-2)}{6.8.10\,\ldots\,(m-1)\,a^{m-6}\,(\text{coſ. ip.}u)^6}+\ldots\ldots$$

$$\left.+\frac{m-2}{(m-1)(m-3)\,a^3\,(\text{coſ. ip.}u)^{m-3}}\right).$$

14 Integriamo ora la formola $\int\frac{du}{\text{coſ. ip.}u}$. Poichè $D.(\text{ſen. ip.}u)=\frac{du.\,\text{coſ. ip.}u}{a}$, ſarà $du=\frac{aD.(\text{ſen. ip.}u)}{\text{coſ. ip.}u}$, e quindi $\int\frac{du}{\text{coſ. ip.}u}=\int\frac{aD.(\text{ſen. ip.}u)}{(\text{coſ. ip.}u)^2}=\frac{1}{a}\int\frac{a^2D.(\text{ſen. ip.}u)}{a^2+(\text{ſen. ip.}u)^2}$. Ma $\int\frac{a^2D.(\text{ſen. ip.}u)}{a^2+(\text{ſen. ip.}u)^2}$ è eguale a un arco circolare di raggio a, tangente, ſen. ip. u. Dunque, chiamando d queſt' arco, riſulta $\int\frac{du}{\text{coſ. ip.}u}=\frac{d}{a}$.

15. Surroghiam finalmente in (C) queſti valori, ed otterremo l' arco iperbolico $VM=(D)\,\frac{a\,\text{ſen. ip.}u}{b}-\frac{bd}{2a}$

$$-\frac{1^2.3^2.5^2\ldots\,(m-2)^2b^md}{(m+1)(2^2.4^2.6^2\ldots\ldots(m-1)^2a^m}-\frac{(1.3.5.7\ldots\ldots(m-1)b^m.\,\text{ſen. ip.}u}{2.4.6\ldots\,(m+1)}$$

$$\left(\frac{3.5.7\ldots\,(m-2)}{2.4.6\ldots\,(m-1)a^{m-2}(\text{coſ. ip.}u)^2}+\frac{5.7.9\ldots\,(m-2)}{4.6.8\ldots(m-1)a^{m-4}(\text{coſ. ip.}u)^4}\right.$$

$$+\frac{7.9\ldots\ldots(m-2)}{6.8.10\ldots(m-1)a^{m-6}(\text{coſ. ip.}u)^6}+\ldots\ldots\ldots$$

$$\left.+\frac{m-2}{(m-1)(m-3)a^3\,(\text{coſ. ip.}u)^{m-3}}\ \text{ecc.}\right)\ \text{in infinito}.$$

16. Qui pure avvertiremo, come abbiam fatto al num.° 8 per l' arco ellittico; 1.°, che in queſta integrazione non

va aggiunta alcuna coſtante, perchè, eſſendo nullo VM, ſvaniſce ſen. ip. u, e in conſeguenza l' arco d, onde tutto va a zero; 2.°, che i termini dell' omogeneo, cominciando dal terzo, eſprimono i termini generali delle ſerie corriſpondenti, dovendoſi, per avere il valore di VM, aſſegnar ſucceſſivamente alla ſpecie m tutti i valori de' numeri diſpari 3, 5, 7 ecc. ſenza limite; 3.°, che per eſſere ſempre $b < a$, e molto più $<$ coſ. ip. u, le ſerie indi naſcenti, ordinate ſecondo le podeſtà de' coſeni, avranno maggior convergenza, quanto maggiore è la podeſtà del coſeno; finalmente, che attribuiti valori numerici ai ſimboli a, b, u, ſi verrà a determinare in numeri il valor proſſimo di qualunque arco iperbolico VM della data iperbola.

17. Stabiliſcaſi ora l' arco VM infinito. A tale ipoteſi corriſpondono il ſeno, e il coſeno iperbolici infiniti ed eguali. Dunque ſvaniranno affatto le ſerie del 4°. termine nell' omogeneo (D) del numero 15; l' arco circolare d, che ha la tangente infinita, diventerà il quadrante della periferia; e fatto ϕ eguale alla ſemicirconferenza di raggio 1, ſarà l' arco infinito

$$VM' = \frac{a.\,\text{ſen. ip.}u}{b} - \frac{b\phi}{4}$$

$$- \frac{b\phi}{2}\left(\frac{1^2.3^2.5^2.\ldots.(m-2)^2\, b^{m-1}}{(m+1)\,(2^2.4^2.6^2.\ldots..(m-1)^2\, a^{m-1}}\right),$$ cioè;

$$\frac{a.\,\text{ſen. ip.}u}{b} - VM' = \frac{b\phi}{4}$$

$$+ (E)\,\frac{b\phi}{2}\left(\frac{1^2.3^2.5^2.\ldots(m-2)^2\, b^{m-2}}{(m+1)(2^2.4^2.6^2\ldots(m-1)^2 a^{m-1}}\right).$$

18. Fatto $m = 3$, riſulta il termine $(E) = \frac{b\phi}{2}\left(\frac{1^2 b^2}{4.2^2 a^2}\right)$. All' ipoteſi di $m = 5$ compete $(E) = \frac{b\phi}{2}\left(\frac{1^2.3^2 b^4}{6.2^2.4^2 a^4}\right)$. La ſuſſeguente di $m = 7$ dà $(E) = \frac{b\phi}{2}\left(\frac{1^2.3^2.5^2 b^6}{8.2^2.4^2.6^2 a^6}\right)$ ecc., giacchè la legge è evidente. Di più pel num.° VII. ove infinito ſia l' arco dell' iperbola, diventa $\frac{a.\,\text{ſen. ip.}\,u}{b}$, l' intero aſſintoto

CM' ; e quindi $\frac{a\,.\,\text{ſen. ip}\,.\,u}{b} - VM'$, è eguale alla differenza tra l' aſſintoto e l' arco iperbolico infinito. Eſpreſſa perciò queſta differenza col ſimbolo Δ, ſarà $\Delta = (F)\,\frac{b\phi}{4} + \frac{b\phi}{2}\Big(\frac{1^2.\,b^2}{2^2 4a^2}$

$$+\frac{1^2.\,3^2.\,b^4}{2^2.4^2.6a^4} + \frac{1^2.3^2.5^2 b^6}{2^2.4^2.6^2.8a^6} + \frac{1^2.3^2.5^2.\,7^2 b^8}{2^2.4^2.6^2.8^2.10a^8}\ \text{ecc.}\Big)$$

$$= \frac{b\phi}{4} + \frac{b\phi}{2}\Big(\frac{1^2 b^2}{4.4a^2} + \frac{3^2 b^2\,.\,A'}{4.6\,a^2} + \frac{5^2 b^2\,.\,B'}{6.8\,a^2} + \frac{7^2 b^2\,.\,C'}{8.\,10\,a^2}\ \text{ecc.}\Big),$$

intendendo che A' , B' , C' ecc. ſignifichino i termini precedenti. Dall' eſſer $b < a$ in qualunque iperbola, la convergenza della preſente ſerie ſi rende manifeſtiſſima ; onde al caſo che b, ed a abbian valori numerici , avrem pronto il valor proſſimo di Δ colla addizione di non molti ſuoi termini .

19. Dopo le anzidette teorie mettiamci ſotto all' occhio la forma che hanno i moltipli de' differenziali degli archi ellittici ed iperbolici , i quali ſi riferiſcono ad un' aſciſſa centrale ſituata nel 1.° o nel 2.° aſſe . Chiamato pertanto f il 1.° ſemiaſſe della ſezione conica , g il 2.° , cz l' aſciſſa centrale, e $\frac{1}{\sqrt{h}}$ il moltiplo dell' arco, avremo, ſiccome è noto

1.° $\frac{1}{\sqrt{h}}$. diff. dell' arco ellittico coll' aſciſſa cz nel 1.° aſſe

$$= \frac{dz\sqrt{(f^2-(f^2-g^2)c^2z^2 : f^2)}}{\sqrt{(f^2h : c^2 - hz^2)}}$$

2.° $\frac{1}{\sqrt{h}}$. diff. dell' arco ellittico coll' aſciſſa cz nel 2.° aſſe

$$= \frac{dz\sqrt{(g^2+(f^2-g^2)c^2z^2 : g^2)}}{\sqrt{(g^2h : c^2 - hz^2)}}$$

3.° $\frac{2}{\sqrt{h}}$. diff. dell' arco iperbolico coll' aſciſſa cz nel 1.° aſſe

$$= \frac{dz\sqrt{(-f^2+(f^2+g^2)\,c^2z^2 : f^2)}}{\sqrt{(-f^2h : c^2 + hz^2)}}$$

4.° $\frac{1}{\sqrt{h}}$. diff. dell' arco iperbolico coll' aſciſſa cz nel 2.° aſſe $= \frac{dz\sqrt{(g^2 + (f^2 + g^2)c^2z^2 : g^2)}}{\sqrt{(g^2h : c^2 + hz^2)}}$. Quindi concluderemo, che tutte le formole differenziali, le quali ſono integrabili cogli archi ellittici, ed iperbolici, ſi potranno con opportune ſoſtituzioni trasſigurare nella forma generica $\frac{dx\sqrt{(A + Bx^2)}}{\sqrt{(C + Dx^2)}}$, in cui A, B, C, D poſſono eſſere quantità poſitive o negative. Supporrò dunque, che ſotto qualunque diverſo aſpetto ſi ſian preſentate al Geometra formole, che per l' integrazione ammettano i ſuddetti archi, egli le abbia cogli artifizj dell' analiſi ridotte alla ſuddetta forma generale, la quale nel decorſo di queſto ſcritto ſarà l' oggetto unico delle noſtre conſiderazioni.

20. Arrivati che ſaremo alla formola $\frac{dx\sqrt{(A + Bx^2)}}{\sqrt{(C + Dx^2)}}$, non potrem toſto concludere, che il ſuo integrale ſia o un arco ſemplice di ſezion conica, o un moltiplo di queſt' arco; perchè ciò dipende non ſolo dai ſegni che ſi voglion prefiſſi alle quantità coſtanti A, B, C, D, ma eziandio dal valor maggiore o minore di queſte medeſime quantità. In alcuni caſi la formola differenziale potrebb' eſſere immaginaria, come ſe foſſe $\frac{dx\sqrt{(-A - Bx^2)}}{\sqrt{(C + Dx^2)}}$, e per conſeguenza impoſſibile la ſua integrazione in termini reali. In alcuni altri eſſa debb' eſſere nuovamente trasformata, affinchè il confronto colle 4 formole del numero 19 non induca alcun asſurdo. Una piccola rifleſſione farà conoſcere il caſo della impoſſibilità; ed ove, eſſendo reale, ſenza incongruenze ricuſi di farſi identica con una delle quattro ſuddette, tre Lemmi baſteranno a cangiarla in più formole per modo, che di alcune algebraicamente, e dell' altre colla notata identicità ſe ne poſſa aſſegnare l' integrazione.

21. Ecco il 1°. Lemma; $\frac{dx\sqrt{(A + Bx^2)}}{\sqrt{(C + Dx^2)}}$

$= \frac{(BC - AD)x^2dx}{C\sqrt{(A + Bx^2)}\sqrt{(C + Dx^2)}} + \frac{Adx\sqrt{(C + Dx^2)}}{C\sqrt{(A + Bx^2)}}$. La riduzione dell' omogeneo renderà evidente la verità di queſto Lemma. Si faccia ora $\sqrt{(A + Bx^2)} = z$. Da queſta ſoſtituzione trarremo $\frac{dx\sqrt{(A + Bx^2)}}{\sqrt{(C + Dx^2)}} = \frac{(BC - AD)}{BC} \cdot \frac{dz\sqrt{(-A + z^2)}}{\sqrt{(BC - AD + Dz^2)}}$ $+ \frac{Adx\sqrt{(C + Dx^2)}}{C\sqrt{(A + Bx^2)}}$. Diremo poi: o ciaſcuna delle due formole di queſt' ultimo membro ſoffre ſenza aſſurdo il confronto coi moltipli de' differenziali degli archi, o no. Nel 1.° caſo la propoſta formola è già integrata; nel 2.° v' è biſogno di una nuova traſformazione.

22. Sia in genere $\frac{dt\sqrt{(E + Ft^2)}}{\sqrt{(G + Ht^2)}}$ la formola nuovamente traſformabile. Pongaſi $u = \frac{\sqrt{(E + Ft^2)}}{\sqrt{(G + Ht^2)}}$, onde proviene $t = \frac{\sqrt{(E - Gu^2)}}{\sqrt{(-F + Hu^2)}}$; e ſarà $\int \frac{dt\sqrt{(E + Ft^2)}}{\sqrt{(G + Ht^2)}} = \int udt$ $= ut - \int tdu = \frac{t\sqrt{(E + Ft^2)}}{\sqrt{(G + Ht^2)}} - \int \frac{du\sqrt{(E - Gu^2)}}{\sqrt{(-F + Hu^2)}}$; e queſto è il 2.° Lemma.

23. Se queſta traſformazione praticata nella formola $\frac{dt\sqrt{(E + Ft^2)}}{\sqrt{(G + Ht^2)}}$ non valeſſe a rendere il termine $\int \frac{du\sqrt{(E - Gu^2)}}{\sqrt{(-F + Hu^2)}}$ identico con un moltiplo d' arco di ſezion conica, ſi faccia queſt' altra ſoſtituzione; $u' = \frac{\sqrt{(G + Ht^2)}}{\sqrt{(E + Ft^2)}}$, che dà $t = \frac{\sqrt{(-G + Eu'^2)}}{\sqrt{(H - Fu'^2)}}$. Alzata al quadrato l' una o l' altra di queſte frazioni, ſi ha $Eu'^2 + Ft^2u'^2 = G + Ht^2$; e differenziando; $Eu'du' + Ftu'.D.(tu') = Htdt$, cioè $\frac{dt}{u}$ $= \frac{F.D(tu')}{H} + \frac{Edu'}{Ht}$; e quindi $\int \frac{dt\sqrt{(E + Ft^2)}}{\sqrt{(G + Ht^2)}}$

$= \frac{Ft\sqrt{(G+Ht^2)}}{H\sqrt{(E+Ft^2)}} + \frac{E}{H}\int\frac{du'\sqrt{(H-Fu'^2)}}{\sqrt{(-G+Eu'^2)}}$, equazione, in cui conſiſte il 3.° Lemma. O coll' una o coll' altra traſformazione, che fanno naſcere queſti due ultimi Lemmi tratti dal citato Opuſcolo Riccaziano, otterrem ſempre la bramata integrazione.

24. Da ciò ſi raccoglie, che la formola $\frac{dx\sqrt{(A+Bx^2)}}{\sqrt{(C+Dx^2)}}$ al più reſta integrata con due archi di ſezion conica, preſcindendo dalla quantità algebraica, che pur vi ha luogo. Il metodo uſato dal P. *Riccati* porta alcune volte le integrazioni a tre archi coll' unione di più termini algebraici; laddove il mio ſi raccomanda per la ſua maggiore ſemplicità, avendoſi con eſſo al più 3 ſoli termini integrali, come vedremo ne' ſeguenti numeri, cioè una quantità algebraica, un moltiplo d' arco ellittico, e un moltiplo d' arco iperbolico. Ma venghiamo ad eſaminare partitamente tutte le combinazioni, che può ricever la formola generale $\frac{dx\sqrt{(m+nx^2)}}{\sqrt{(p+qx^2)}}$ e per rapporto ai ſegni, e per rapporto ai valori delle coſtanti, che moltiplicano i termini vincolati dai radicali; onde nelle integrazioni o appariſca colla quantità algebraica il ſolo arco iperbolico, o l' arco ellittico e l' arco iperbolico inſieme. Di quelle modificazioni di formole, le cui integrazioni dipendono dalla quantità algebraica e dall' arco ellittico unicamente, non faremo menzione, perchè queſte, qualunque valor reale s' attribuiſca alla variabile, non avranno mai differenze finite di termini infiniti.

25. Venga innanzi a tutte la formola 1.ª $\frac{dx\sqrt{(m+nx^2)}}{\sqrt{(p+qx^2)}}$, nella quale m, n, p, q ſian tutte poſitive. Due ipoteſi ſi poſſon fare; 1.ª, che ſia $np > mq$, 2.ª, che ſia $mq > np$. Pel caſo della 1.ª ipoteſi, confrontata la formola colla 4.ª del num.° 19, ſi vedrà a un tratto, che il ſuo integrale è

$= \frac{1}{\sqrt{q}}\Big($ arco iperbolico di 1.° ſemiaſſe; $\frac{\sqrt{(np-mq)}}{\sqrt{q}}$; aſciſſa

2.° ſemiaſſe; $\sqrt{m}$

centrale nel 2.° aſſe; $\frac{x\sqrt{mq}}{\sqrt{p}}$), e non è ſoggetto ad alcuna difficoltà. La 2.ª ipoteſi di $mq > np$ vuole per l' integrazione della formola il ſoccorſo de' due primi Lemmi notati ai numeri 21, 22, e ſi avrà $\int\frac{dx\sqrt{(m+nx^2)}}{\sqrt{(p+qx^2)}}$

$= -\frac{(mq-np)}{np}\cdot\frac{x\sqrt{(m+nx^2)}}{\sqrt{(p+qx^2)}} + \frac{(mq-np)}{np\sqrt{q}}$ (arco ellittico di 1.° ſem. $\sqrt{m}$; aſciſſa cent. nel 1.° aſſe; $\frac{x\sqrt{mq}}{\sqrt{(p+qx^2)}}$)
2.° ſem. $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}}$

$+\frac{m}{p\sqrt{n}}$ (arco iperbolico di 1.° ſem. $\frac{\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{n}}$; aſciſſa
2.° ſem. $\sqrt{p}$
cent. nel 2.° aſſe; $\frac{x\sqrt{np}}{\sqrt{m}}$) $+ C$.

26. Si accetti l' ipoteſi, che fatto $x = 0$ ſia l' integrale $= 0$. Perchè con tale ſuppoſizione ſvaniſcono tutti i termini dell' omogeneo, non va aggiunta alcuna coſtante, e riman $C = 0$. Se ſi fa $x = \infty$, l' arco ellitico ha $\sqrt{m}$ per aſciſſa nel 1°. aſſe, cioè l' aſciſſa e il primo ſemiaſſe ſono eguali; e quindi l' arco diventa il quadrante $\mathfrak{Q}$ dell' elliſſi. Il termine algebraico ſi cangia in queſt' altra formola; $-\frac{(mq-np).x}{p\sqrt{nq}}$, che è una quantità infinita negativa. E perchè l' arco ip. ha l' aſciſſa nel 2°. aſſe $= \frac{x\sqrt{np}}{\sqrt{m}}$, cioè infinita, ſarà pure eſſo arco un infinito ma poſitivo.

27. Per avere la differenza di queſti due infiniti, rieſce opportuno l' eſprimere il termine algebraico $-\frac{(mq-np)x}{p\sqrt{nq}}$ in queſt' altra maniera equivalente; $\frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{q}} - \frac{mx\sqrt{q}}{p\sqrt{n}}$, onde, quando x è infinita, riſulti $\int\frac{dx\sqrt{(m+nx^2)}}{\sqrt{(p+qx^2)}} = \frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{q}}$

$$+\frac{(mq-np)}{np\sqrt{q}}.\mathcal{Q}-\frac{m}{p\sqrt{n}}\left(x\sqrt{q}-\text{arco ip. di }\begin{array}{l}1^\circ\text{ ſem. }\frac{\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{n}};\\ 2^\circ\text{ ſem. }\sqrt{p}\end{array}\right.$$

aſciſſa cent. nel 2° aſſe; $\left.\frac{x\sqrt{np}}{\sqrt{m}}\right)$. Conſultiamo ora il num°. VIII, che in qualunque iperbola riferita al 2°. aſſe ci dà il valor dell' aſſintoto infinito $= \frac{CV^2.CG'}{CA.CK}$. Poichè per le teorie coniche $\frac{CV^2}{CA}$ è eguale alla radice della ſomma de' quadrati de' due ſemiaſſi, ſarà nel caſo noſtro $\frac{CV^2}{CA}=\frac{\sqrt{mq}}{\sqrt{n}}$, e $\frac{CG'}{CK}=\frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{m}}$. Quindi il noſtro aſſintoto $=x\sqrt{q}$, e $x\sqrt{q}$ — arco ip. ſuddetto eguale alla differenza Δ tra l' aſſintoto e l' arco ip. infinito. Perilchè, quando ſia $mq>np$ e l' aſciſſa centrale infinita, ſi trova $\int\frac{dx\sqrt{(m+nx^2)}}{\sqrt{(p+qx^2)}}=\frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{q}}+\frac{(mq-np)}{np\sqrt{q}}\mathcal{Q}-\frac{m\Delta}{p\sqrt{n}}$. E ſiccome queſti due ultimi termini ſono quantità finite, rimanendo il primo $\frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{q}}$ un infinito, nella accettata ſuppoſizione; $\int\frac{dx\sqrt{(m+nx^2)}}{\sqrt{(p+qx^2)}}$ diventa $=\infty$. Ed ecco, come la incertezza, che potea naſcere ſulla finità, o infinità della differenza tra i due termini infiniti, reſti colla ſcorta delle noſtre teorie totalmente dileguata.

28. 2ª. formola da integrarſi; $\frac{dx\sqrt{(m+nx^2)}}{\sqrt{(-p+qx^2)}}$. Qui ſi vede ſubito, eſſere il minor valore della $x=\pm\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$, potendo poi creſcere sì poſitivamente che negativamente all' infinito. Nella formola preſente, ſiccome in tutte l' altre avvenire per maggior comodo conſidereremo le ſole x poſitive, e intanto

diremo, che è il minor valore della $x = \frac{\surd p}{\surd q}$, e il maſſimo eguale all' infinito poſitivo. Poſcia col maneggio de' due primi Lemmi, troverem preſto; $\int \frac{dx\surd(m+nx^2)}{\surd(-p+qx^2)} = \left(\frac{mq+np}{np\surd q}\right)$ (arco iperbolico di 1.° ſem. $\surd m$; aſciſſa cent. nel 1.° aſſe;
2.° ſem. $\frac{\surd np}{\surd q}$
$\left.\frac{\surd mq\surd(m+nx^2)}{\surd(mq+np)}\right) - \frac{mx\surd(-p+qx^2)}{p\surd(m+nx^2)} + \frac{m}{p\surd n}$ (arco ellittico di 1.° ſem. $\frac{\surd(mq+np)}{\surd n}$; aſciſſa cent. nel 2.°; $\frac{\surd np}{\surd q} \times$
2.° ſem. $\surd p$
$\left.\surd\frac{(-p+qx^2)}{\surd(m+nx^2)}\right)$.

29. Nell' ipoteſi che la formola integrata ſvaniſca, quando $x = \frac{\surd p}{\surd q}$, l' aſciſſa cent. dell' arco iperbolico rieſce eguale al 1°. ſemiaſſe $\surd m$; e però l' arco è nullo, ſiccome nulle riſultano le quantità ſuſſeguenti, onde per l' integrale completo non ſi ricerca coſtante di alcuna ſorta. Ma ſe ſi pone $x = \infty$, l' arco iperbolico proviene infinito di valore, perchè ha infinita l' aſciſſa centrale $\frac{x\surd(mnq)}{\surd(mq+np)}$; ed infinita eziandio è la quantità algebraica che gli tien dietro, la quale ſi cangia in $-\frac{mx\surd q}{p\surd n}$. Finalmente riuſcendo l' aſciſſa dell' arco ellittico eguale al 2°. ſemiaſſe $\surd p$, l' arco diventa il quadrante $\mathfrak{Q}$ dell' elliſſe. Quanto ai due termini infiniti, che hanno i ſegni contrarj, convien vedere, ſe la loro differenza ſia finita o infinita: e a queſto fine ſcriveremo la quantità algebraica e il moltiplo dell' arco iperbolico equivalentemente coſì; $\frac{x\surd n}{\surd q} - \left(\frac{mq+np}{np\surd q}\right)$ ($x\surd n$ — arco iperbolico di

1.° ſem. $\sqrt{m}$; aſciſſa cent. nel 1.°; $\frac{x\sqrt{(mnq)}}{\sqrt{(mq+np)}}\Big)$. Appreſſo
2.° ſem. $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}}$

dal num.° VII trarremo l' aſſintoto $=\frac{CV^2}{CA}\cdot\frac{CP}{CV}$
$=\frac{\sqrt{(mq+np)}}{\sqrt{q}}\cdot\frac{x\sqrt{nq}}{\sqrt{(mq+np)}}=x\sqrt{n}$; dal che ſi rileva, eſſere i termini tra la parenteſi la differenza Δ tra l' aſſintoto e l' arco infinito. Per conſeguenza, fatto $x=\infty$, haſſi $\int\frac{dx\sqrt{(m+nx^2)}}{\sqrt{(-p+qx^2)}}=\frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{q}}-\frac{(mq+np)}{np\sqrt{q}}\cdot\Delta+\frac{m\mathfrak{Q}}{p\sqrt{n}}$; e ſiccome Δ, $\mathfrak{Q}$ ſono quantità finite e $\frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{q}}$ un infinito, ſarà infinito di valore il noſtro integrale.

30. 3.ª formola, $\frac{dx\sqrt{(m-nx^2)}}{\sqrt{(p+qx^2)}}$. In queſta formola è chiaro, che i limiti de' valori di x ſono $x=0$; $x=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$, divenendo eſſa immaginaria ne' valori maggiori. Fatto uſo del 1.° e del 3.° Lemma, ſi avrà pronto il ſuo integrale
$=\frac{(mq+np)\sqrt{(m-nx^2)}\sqrt{(p+qx^2)}}{npqx}-\frac{(mq+np)\sqrt{m}}{npq}\Big($ arco iperbolico di 1.° ſem. $\sqrt{q}$; aſciſſa cent. nel 1.°; $\frac{\sqrt{mq}\sqrt{(p+qx^2)}}{x\sqrt{(mq+np)}}\Big)$
2.° ſem. $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{m}}$
$+\frac{m}{p\sqrt{n}}\Big($ arco ellittico di 1.° ſem. $\frac{\sqrt{(mq+np)}}{\sqrt{n}}$; aſciſſa cent.
2.° ſem. $\sqrt{p}$
nel 2.°; $\frac{x\sqrt{np}}{\sqrt{m}}\Big)+C$.

31. Abbracciando l' ipoteſi, che tutto vada a zero, quando $x=0$, reſterà determinata la coſtante C. In tal caſo ſva-

niſce l' arco ellittico, perchè è nulla l' aſciſſa centrale; ma i due primi termini, che ſi mutano in queſti altri;

$\frac{(mq+np)\sqrt{m}}{npq}\Big(\frac{\sqrt{p}}{x} -$ arco iperbolico di 1.° ſem. $\sqrt{q}$, aſciſ-

2.° ſem. $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{m}}$

ſa cent. nel 1.°, $\frac{\sqrt{(mpq)}}{x\sqrt{(mq+np)}}\Big)$ ſono la differenza di due quantità infinite. Poichè l'aſciſſa ſi aſſume nel 1.° aſſe, riſulta l' aſſintoto iperbolico $= \frac{CV^2}{CA}\cdot\frac{CP'}{CV} = \frac{\sqrt{(mq+np)}}{\sqrt{m}}\cdot\frac{\sqrt{mp}}{x\sqrt{(mq+np)}} = \frac{\sqrt{p}}{x}$; ſicchè i due termini vincolati dalla parenteſi dinotano la ſolita differenza finita Δ. Nella ipoteſi di $x=0$, ſarà quindi $0=\frac{(mq+np)\Delta\sqrt{m}}{npq}+C$, o ſia

$C=-\frac{(mq+np)\Delta\sqrt{m}}{npq}$; e il completo integrale della formola $=\frac{(mq+np)\sqrt{m}}{npq}\Big(\frac{\sqrt{(m-nx^2)}\sqrt{(p+qx^2)}}{x\sqrt{m}} - \Delta -$ arco

iperbolico di 1.° ſem. $\sqrt{q}$; aſciſſa nel 1.° $\frac{\sqrt{mq}\sqrt{(p+qx^2)}}{x\sqrt{(mq+np)}}\Big)$

2.° ſem. $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{m}}$

$+\frac{m}{p\sqrt{n}}\Big($ arco ellittico di 1.° ſem. $\frac{\sqrt{(mq+np)}}{\sqrt{n}}$; aſciſſa nel 2.°

2.° ſem. $\sqrt{p}$

$\frac{x\sqrt{np}}{\sqrt{m}}\Big)$. Ove poi ſaper vogliaſi, quale integrale competa al valor maſſimo di x, cioè a $x=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$, fatta la ſoſtituzione, ſi troverà, che l' arco iperbolico, e la quantità algebraica ſvaniſcono, e che l' arco ellittico diventa il quadrante

dell'

dell' elliſſi. Onde eſſendo $x = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$, ſi ha $\int \frac{dx^2 \sqrt{(m - nx^2)}}{\sqrt{(p + qx^2)}} = - \frac{(mq + np)\Delta\sqrt{m}}{npq} + \frac{m\mathcal{Q}}{p\sqrt{n}}$; il che fa conoſcere, non poter mai l' integrale della formola aver valore infinito.

32. 4ª. formola; $\frac{dx\sqrt{(m - nx^2)}}{\sqrt{(p - qx^2)}}$. Diſtinguiamo in queſta due ipoteſi; la 1ª. che ſia $mq > np$; la 2ª. che ſia $np > mq$. Nella prima l' integrazione accetta ſolo l' arco ellittico e non è di quelle che noi conſideriamo. Laonde ſi aſſuma l' altra di $np > mq$ che porta all' arco iperbolico, e riflettiamo a 3 caſi. Il 1°. che il valore di x ſia poſto tra i limiti $x = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$; $x = \infty$; il 2°. che ſtia tra i limiti $x = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$; $x = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$; il 3°. che ſtia tra i limiti $x = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$; $x = 0$. Non c' è difficoltà alcuna pel 1°. caſo, avvegnachè l' integrale della formola è

$\frac{1}{\sqrt{q}}$ (arco ip. di 1°. ſem. $\sqrt{m}$; aſciſſa cent. nel 1°. aſſe;
2°. ſem. $\frac{\sqrt{(np - mq)}}{\sqrt{q}}$
$\frac{x\sqrt{mq}}{\sqrt{p}}$), ſupponendo che l' integrale ſia zero, quando $x = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$. Creſciuta poi x ſino all' infinito, poichè l' aſciſſa $\frac{x\sqrt{mq}}{\sqrt{p}}$ è infinita, toſto ſi ſcorge, che l' arco, e in conſeguenza l' integral della formola è un infinito.

33. Se x è collocata tra i limiti $x = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$; $x = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$, che è il caſo 2°, ſi fa chiara l' immaginarietà della formola, onde altro non ci reſta che il 3°. caſo del valore di x poſto tra

i limiti $x = 0$; $x = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$, pel quale l' uſo del 3°. Lemma con breve calcolo ci preſenta; $\int \frac{dx\sqrt{(m-nx^2)}}{\sqrt{(p-qx^2)}} = \frac{nx\sqrt{(p-qx^2)}}{q\sqrt{(m-nx^2)}}$ $- \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{q}}$ (arco ip. di 1°. ſem. $\sqrt{q}$, aſciſſa nel 1°; $\frac{\sqrt{mq}}{\sqrt{p}} \times$

2.° ſem. $\frac{\sqrt{(np-mq)}}{\sqrt{m}}$

$\frac{\sqrt{(p-qx^2)}}{\sqrt{(m-qx^2)}}$). Tralaſcio la coſtante, perchè ſuppongo, che ſatto $x = 0$, tutto ſvaniſca; il che avviene sì nella parte algebraica, come anche nell' arco iperbolico, la cui aſciſſa centrale ſi ſa eguale al 1.° ſemiaſſe. Pongo ora $x = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$; e i due termini dell' integrazione diventano due quantità infinite che ſi poſſono eſprimer così; $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{q}}\left(\frac{\sqrt{(np-mq)}}{\sqrt{(m-nx^2)}}\right.$ — arco iperbolico di 1.° ſem. $\sqrt{q}$; aſciſſa nel 1.° $\left.\frac{\sqrt{mq}}{\sqrt{np}} \times \frac{\sqrt{(np-mq)}}{\sqrt{(m-nx^2)}}\right)$.

2.° ſem. $\frac{\sqrt{(np-mq)}}{\sqrt{m}}$

Ma pel num.° VII. eſſendo l' aſſintoto $= \frac{CV^2}{CA} \cdot \frac{CP}{CV}$, nel caſo noſtro diventa $= \frac{\sqrt{(np-mq)}}{\sqrt{(m-nx^2)}}$. Dunque i termini nella parenteſi ſono la conſueta differenza Δ; e conſeguentemente ſe ſia $x = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$, ſarà $\int \frac{dx\sqrt{(m-nx^2)}}{\sqrt{(p-qx^2)}} = \frac{\Delta\sqrt{m}}{q}$.

34. 5ª. formola; $\frac{dx\sqrt{(-m+nx^2)}}{\sqrt{(p-qx^2)}}$. Qui pure han luogo due ipoteſi; 1ª. $np > mq$; 2ª. $mq > np$. Nella 1ª. ſuppoſizione, i limiti de' valori della x ſono; $x = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$; $x = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$, de' quali il primo è minore, l' altro maggiore; e coll' unico 2°.

Lemma agevolmente ſi ottiene; $\int \frac{dx\sqrt{(-m+nx^2)}}{\sqrt{(p-qx^2)}}$ $= \frac{x\sqrt{(-m+nx^2)}}{\sqrt{(p-qx^2)}} - \frac{1}{\sqrt{q}}$ (arco ip. di 1°. ſem. $\frac{\sqrt{(np-mq)}}{\sqrt{q}}$; 2°. ſem. $\sqrt{m}$ aſciſſa nel 2°.; $\frac{\sqrt{mq}}{\sqrt{n}} \times \frac{\sqrt{(-m+nx^2)}}{\sqrt{(p-qx^2)}}$). Ommetto di aggiunger coſtante, perchè ſtabiliſco, che la formola integrata s' annulli, quando $x = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$. Diaſi ora a x il maggior valore, cioè ſi faccia $x = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$; e i due termini della integrazione diventano due infiniti, che ſi poſſono mettere ſotto queſta forma; $\frac{1}{\sqrt{q}} \left(\frac{\sqrt{p}\sqrt{(np-mq)}}{\sqrt{q}\sqrt{(p-qx^2)}} \right.$ — arço iperbolico di 1°. ſem. $\frac{\sqrt{(np-mq)}}{\sqrt{q}}$; 2°. ſem. $\sqrt{m}$ aſciſſa nel 2°; $\left. \frac{\sqrt{m}\sqrt{(np-mq)}}{\sqrt{n}\sqrt{(p-qx^2)}} \right)$. In queſta iperbola la ſomma de' quadrati de' ſemiaſſi è $\frac{np}{q}$. Dunque $\frac{CV^2}{CA} = \frac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}}$; $\frac{CG'}{CK} = \frac{\sqrt{(np-mq)}}{\sqrt{n}\sqrt{(p-qx^2)}}$; e l' aſſintoto $= \frac{CV^2}{CA} \cdot \frac{CG'}{CK}$ (num. VIII) $= \frac{\sqrt{p}\sqrt{(np-mq)}}{\sqrt{q}\sqrt{(p-qx^2)}}$. Quindi, eſſendo $x = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$, avremo $\int \frac{dx\sqrt{(-m+nx^2)}}{\sqrt{(p-qx^2)}} = \frac{\Delta}{\sqrt{q}}$, appartenendo Δ all' iperbola di 1°. ſem. $\frac{\sqrt{(np-mq)}}{\sqrt{q}}$; 2°. ſem. $\sqrt{m}$.

35. La 2ª. ipoteſi fiſſa $mq > np$. Poichè queſto è l' ultimo caſo tra quelli, in cui le formole eſigono per la loro integrazione gli archi iperbolici, noi il tratterem per diſteſo, affinchè indi trar ſi poſſa norma pel maneggio degli altri, che abbiamo ne' ſuperiori numeri conſiderati. I limiti

de' valori di x nella formola $\frac{dx\sqrt{(-m+nx^2)}}{\sqrt{(p-qx^2)}}$, quando $mq>np$, ſono $x=\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$, che è il valor minore; $x=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$, che è il valor maggiore. Ora dal 1°. Lemma abbiamo;
$$\frac{dx\sqrt{(m-nx^2)}}{\sqrt{(-p+qx^2)}}=\frac{(mq-np)x^2dx}{p\sqrt{(m-nx^2)}\sqrt{(-p+qx^2)}}$$
$-\frac{mdx\sqrt{(-p+qx^2)}}{p\sqrt{(m-nx^2)}}$; e poſto $\sqrt{(m-nx^2)}=z$; riſulta
$$\frac{x^2dx}{\sqrt{(m-nx^2)}\sqrt{(-p+qx^2)}}=-\frac{dz\sqrt{(m-z^2)}}{n\sqrt{(mq-np-qz^2)}}.$$
Il confronto poi di queſt' ultima formola colla 1ª. del num. 19 ci manifeſta eſſere $\int-\frac{dz\sqrt{(m-z^2)}}{n\sqrt{(mq-np-qz^2)}}=-\frac{1}{n\sqrt{q}}\Big($ arco ellittico di 1°. ſem. $\sqrt{m}$; aſciſſa nel 1°., $\frac{z\sqrt{mq}}{\sqrt{(mq-np)}}\Big)$;

2°. ſem. $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}}$

onde $\frac{(mq-np)}{p}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(m-nx^2)}\sqrt{(-p+qx^2)}}=-\frac{(mq-np)}{np\sqrt{q}}$ $\Big($ arco ellittico di 1°. ſem. $\sqrt{m}$; aſciſſa nel 1°;

2°. ſem. $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}}$

$\frac{\sqrt{mq}\sqrt{(m-nx^2)}}{\sqrt{(mq-np)}}\Big)$. L' altro termine $-\frac{mdx\sqrt{(-p+qx^2)}}{p\sqrt{(m-nx^2)}}$ non è riducibile a neſſuna delle formole del num°. 19. Valendoſi perciò del 2°. Lemma ſi metta $u=\frac{\sqrt{(-p+qx^2)}}{\sqrt{(m-nx^2)}}$, onde abbiaſi $\int\frac{dx\sqrt{(-p+qx^2)}}{\sqrt{(m-nx^2)}}=ux-\int\frac{du\sqrt{(p+mu^2)}}{\sqrt{(q+nu^2)}}$. Ma, perchè $mq>np$; $\int\frac{du\sqrt{(p+mu^2)}}{\sqrt{(q+nu^2)}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\Big($ arco iperbolico di

1°. ſem. $\frac{\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{n}}$; aſciſſa nel 2°. $\frac{u\sqrt{np}}{\sqrt{q}}\Big)$, come fa cono-
2°. ſem. $\sqrt{p}$
ſcere il paragone colla 4 formola del num°. 19. Dunque in vece di u ſoſtituito il ſuo valore per x, ſarà

$\int -\frac{mdx\sqrt{(-p+qx^2)}}{p\sqrt{(m-nx^2)}} = -\frac{mx\sqrt{(-p+qx^2)}}{p\sqrt{(m-nx^2)}} + \frac{m}{p\sqrt{n}}\Big($ arco

iperbolico di 1.° ſem. $\frac{\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{n}}$; aſciſſa nel 2.° $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}}\times$
2.° ſem. $\sqrt{p}$
$\frac{\sqrt{(-p+qx^2)}}{\sqrt{(m-nx^2)}}\Big)$; e finalmente $\int\frac{dx\sqrt{(m-nx^2)}}{\sqrt{(-p+qx^2)}}$
$= -\frac{(mq-np)}{np\sqrt{q}}\Big($ arco ellittico di 1.° ſem. $\sqrt{m}$; aſciſſa nel
2.° ſem. $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}}$
1.° ; $\frac{\sqrt{mq}\sqrt{(m-nx^2)}}{\sqrt{(mq-np)}}\Big) - \frac{mx\sqrt{(-p+qx^2)}}{p\sqrt{(m-nx^2)}} + \frac{m}{p\sqrt{n}}\Big($ arco iper-

bolico di 1.° ſem. $\frac{\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{n}}$; aſciſſa nel 2.° $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}}\times$
2.° ſem. $\sqrt{p}$
$\frac{\sqrt{(-p+qx^2)}}{\sqrt{(m-nx^2)}}\Big) + C$.

36. L' ipoteſi che l' integrale ſvaniſca, quando vuolſi $x=\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$, valor minimo della variabile, ſerva a determinare la coſtante C. In tale ſuppoſizione l' aſciſſa centrale dell' arco ellittico diventa $=\sqrt{m}$, che è il 1°. ſemiaſſe, ove ſi prendon le aſciſſe. Facendoſi pertanto l' arco eguale al quadrante ellittico $\mathfrak{Q}$, ed annullandoſi evidentemente gli altri due termini, avrem l' equazione $0 = -\frac{(mq-np)}{np\sqrt{q}}\mathfrak{Q} + C$; e quindi $\int\frac{dx\sqrt{(m-nx^2)}}{\sqrt{(-p+qx^2)}} = \left(\frac{mq-np}{np\sqrt{q}}\right)\Big(\mathfrak{Q} -$ arco ellittico di

1°. ſem. $\sqrt{m}$; aſciſſa nel 1.°, $\frac{\sqrt{mq}\,.\,\sqrt{(m-nx^2)}}{\sqrt{(mq-np)}}\Big)$

2.° ſem. $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}}$

$-\frac{mx\sqrt{(-p+qx^2)}}{p\sqrt{(m-nx^2)}}+\frac{m}{p\sqrt{n}}\Big($ arco iperbolico di

1.° ſem. $\frac{\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{n}}$; aſciſſa nel 2.°, $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}}\times\frac{\sqrt{(-p+qx^2)}}{\sqrt{(m-nx^2)}}\Big)$.

2.° ſem. $\sqrt{p}$

37. Renderemo anche più ſemplice queſto integrale, ſe rifletteremo, che la differenza tra il quadrante dell' elliſſi e il notato arco è eguale all' arco ellittico de' predetti ſemiaſſi, coll'aſciſſa centrale nel 2.° aſſe $=\frac{n\sqrt{p}\sqrt{(-p+qx^2)}}{\sqrt{q}\sqrt{(mq-np)}}$. Sicchè, quando $mq>np$; $\int\frac{dx\sqrt{(m-nx^2)}}{\sqrt{(-p+qx^2)}}=\left(\frac{mq-np}{np\sqrt{q}}\right)\Big($ arco ellittico di 1.° ſem. $\sqrt{m}$; aſciſſa nel 2.°, $\frac{n\sqrt{p}\,\sqrt{(-p+qx^2)}}{\sqrt{q}\,\sqrt{(mq-np)}}\Big)$

2.° ſem. $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}}$

$-\frac{mx\sqrt{(-p+qx^2)}}{p\sqrt{(m-nx^2)}}+\frac{m}{p\sqrt{n}}\Big($ arco iperbolico di

1.° ſem. $\frac{\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{n}}$; aſciſſa nel 2.° $\frac{\sqrt{np}\,\sqrt{(-p+qx^2)}}{\sqrt{q}\sqrt{(m-nx^2)}}\Big)$.

2.° ſem. $\sqrt{p}$

38. Dal minimo valore di $x=\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$, che ci ha ſervito a determinare la coſtante C, ſi paſſi al maſſimo $x=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$, e ſi cerchi quale integrale gli corriſponda. A buon conto, per l' arco ellittico, riuſcendo l' aſciſſa nel 2.° aſſe eguale a $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}}$, che è appunto il 2.° ſemiaſſe, il ſuddetto arco ſi muta nel quadrante $\mathfrak{Q}$; i due termini poi che ſeguono ſono di valore infinito; ma adoperando l' uſitata eſpreſſione, colla introduzione del valore dato di x li potremo ſcriver così;

$- \frac{m}{p\sqrt{n}}\left(\frac{\sqrt{m}\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{n}\sqrt{(m-nx^2)}}\right.$ — arco iperbolico di 1.° ſem. $\frac{\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{n}}$; aſciſſa nel 2.° $\left.\frac{\sqrt{p}\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{q}\sqrt{(m-nx^2)}}\right)$. Ora 2.° ſem. $\sqrt{p}$
poichè, coll' adattamento de' valori del num.° VIII. alla preſente iperbola, diventa $\frac{CV^2}{CA} = \frac{\sqrt{mq}}{\sqrt{n}}$, e $\frac{CG'}{CK} = \frac{\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{q}\sqrt{(m-nx^2)}}$, onde ſi trae l' intero aſſintoto $= \frac{\sqrt{m}\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{n}\sqrt{(m-nx^2)}}$, cioè = al termine algebraico, che dentro la parenteſi precede l' arco iperbolico infinito; reſta chiariſſima la concluſione, che gli anzidetti due termini equivalgono a $\frac{m\Delta}{p\sqrt{n}}$, e che, ove ſuppongaſi $x = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$ ſi fa (G) $\int \frac{dx\sqrt{(m-nx^2)}}{\sqrt{(-p+qx^2)}} = \frac{(mq-np)}{np\sqrt{q}}\, \mathfrak{Q} - \frac{m\Delta}{p\sqrt{n}}$.

39. Ritornando ora alle ſerie (B), (F) de' num. 9, 18, le quali eſibiſcono il valore del quadrante $\mathfrak{Q}$ dell' elliſſi, e la differenza Δ tra l' aſſintoto e l' arco infinito dell' iperbola, e ſono $\mathfrak{Q} = \frac{a\phi}{2} - \frac{a\phi}{2}\left(\frac{1.a^2}{2^2.b^2} + \frac{1^2.3a^4}{2^2.4^2b^4} + \frac{1^2.3^25a^6}{2^2.4^2.6^2b^6}\ \text{ecc.}\right)$;
$\Delta = \frac{b\phi}{4} + \frac{b\phi}{2}\left(\frac{1^2.b^2}{2^2.4a^2} + \frac{1^2.3^2b^4}{2^2.4^2.6a^4} + \frac{1^2.3^2.5^2.b^6}{2^2.4^2.6^2.8a^6}\ \text{ecc.}\right)$, farem la rifleſſione, che, nell' una e nell' altra ſerie, a rappreſenta il 1°. ſem. della curva; b la diſtanza del centro dalla direttrice, la qual diſtanza nella elliſſe è 3^a. proporzionale dopo la radice della differenza de' quadrati de' due ſemiaſſi e il ſemiaſſe 1°; nella iperbola è 3.^{a} proporzionale dopo la radice della ſomma, e lo ſteſſo 1°. ſemiaſſe. Pel noſtro quadrante $\mathfrak{Q}$, ſarà dunque $a = \sqrt{m}$; $b = \frac{m\sqrt{q}}{\sqrt{(mq-np)}}$, e

$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{mq}}$; e però $\mathfrak{Q} = \frac{\phi\sqrt{m}}{2} - \frac{\phi\sqrt{m}}{2}\left(\frac{1.(mq-np)}{2^2mq}\right.$

$+\frac{1^2\cdot 3\,(mq-np)^2}{2^2\cdot 4^2 m^2q^2}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5\,(mq-np)^3}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2 m^3q^3}$ ecc. $\Big)$ per la differenza Δ avrem poi $a=\frac{\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{n}}$; $b=\frac{mq-np}{\sqrt{(mnq)}}$, e $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{mq}}$, che è lo ſteſſo valore di $\frac{a}{b}$ nel quadrante ellittico. Quindi $\Delta=\frac{\phi(mq-np)}{4\sqrt{(mnq)}}+\frac{\phi(mq-np)}{2\sqrt{(mnq)}}\Big(\frac{1^2(mq-np)}{2^2\cdot 4mq}$ $+\frac{1^2\cdot 3^2(mq-np)^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6m^2q^2}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot(mq-np)^3}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8m^3q^3}$ ecc. $\Big)$. E colla ſoſtituzione di queſte due ſerie nell' equazione (G), quando $x=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$, ſarà

$$\int\frac{dx\sqrt{(m-nx^2)}}{\sqrt{(-p+qx^2)}}=\frac{\phi\sqrt{m}\,(mq-np)}{2np\sqrt{q}}$$

$$-\frac{\phi\sqrt{m}\,(mq-np)}{2np\sqrt{q}}\Big(\frac{1.(mq-np)}{2^2mq}+\frac{1^2\cdot 3\,(mq-np)^2}{2^2\cdot 4^2m^2q^2}\text{ ecc.}\Big)$$

$$-\frac{\phi\sqrt{m}\,(mq-np)}{4np\sqrt{q}}-\frac{\phi\sqrt{m}\,(mq-np)}{2np\sqrt{q}}\Big(\frac{1^2(mq-np)}{2^2\cdot 4mp}$$

$$+\frac{1^2\cdot 3^2(mq-np)^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6m^2q^2}\text{ ecc.}\Big),$$ ovvero $-\int\frac{dx\sqrt{(m-nx^2)}}{\sqrt{(-p+qx^2)}}$

$$=\frac{\phi\sqrt{m}\,(mq-np)}{4np\sqrt{q}}-\frac{\phi\sqrt{m}\,(mq-np)}{2np\sqrt{q}}\Big(\frac{1\,(mq-np)}{2^2mq}$$

$$+\frac{1^2(mq-np)}{2^2\cdot 4mq}+\frac{1^2\cdot 3\,(mq-np)^2}{2^2\cdot 4^2m^2q^2}+\frac{1^2\cdot 3^2(mq-np)^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6m^2q^2}$$

$$+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5\,(mq-np)^3}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2m^3q^3}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2(mq-np)^3}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8m^3q^3}+\text{ecc.}\Big).$$

La legge di queſta elegante ſerie è chiariſſima, ſiccome è chiara ancora la ſua convergenza, atteſochè i fattori numerici de' denominatori ſono in ciaſcun termine maggiori de' fattori numerici ne' numeratori; in oltre $\frac{mq-np}{mq}$, e molto più le creſcenti podeſtà intere di queſta frazione ſon ſempre minori dell' unità.

40. Un bell' eſempio della neceſſità di conoſcere il valore della differenza tra l' aſſintoto e l' arco iperbolico infinito ci viene ſomminiſtrato da un de' problemi, che ſcioglie il celebre

celebre P. *Fontana* nel I. Tomo delle Memorie della *Società Italiana* alla pag. 123 e ſeguenti. Queſto problema riſguarda la miſura della luce, che riceve un punto collocato dentro l' aja d'un cerchio, la cui circonferenza ſia raggiante; e viene ſciolto dal ſuddetto Autore prima nell' ipoteſi ordinaria, che la quantità del lume ricevuto debba unicamente ripeterſi dalla quantità illuminatrice moltiplicata nel quadrato inverſo della diſtanza del punto illuminato dal punto, da cui ſi ſcaglia il raggio illuminatore: poi nell' altra di *Bouguer* e di *Lambert*, i quali oltre i detti elementi giudicano neceſſario d' introdurvi ancora il ſeno dell' angolo d' emanazione, vale a dire quell' angolo, che fa il raggio lucido colla ſuperficie del corpo luminoſo, da cui emana.

41. Non dipartendomi dalle traccie del ch. Autore ſtabiliſco che dalla circonferenza raggiante del cerchio $SMRB$ venga illuminato il punto F (*fig.* 3), per cui e pel centro C del cerchio conduco il diametro BR. Prendo poi l'arco variabile RM, e guidato il raggio CM, indi da M calata ſul diametro la normale MN, chiamo ϕ l' angolo MCO, eſſendo O il punto, ove concorre col raggio prodotto la tangente MO. Fatto poi $CR = r$, $CF = K$, che dà $RF = K + r$, avremo $CN = r\,.\,\text{coſ.}\,\phi$; $NM = r\,.\,\text{ſen.}\,\phi$; $NF = K + r\,.\,\text{coſ.}\,\phi$, e l' archetto infiniteſimo $Mm = rd\phi$. Secondo l' ipoteſi Euleriana, ſuppoſta T una data illuminazione, ſarà quella che raccoglie F dall' archetto $Mm = \dfrac{Trd\phi}{(FM)^2} = \dfrac{Trd\phi}{K^2 + r^2 + 2Kr\,.\,\text{coſ.}\,\phi}$, perchè $FM = \surd\left((FN)^2 + (NM)^2\right) = \surd\left(K^2 + r^2 + 2Kr\,.\,\text{coſ.}\,\phi\right)$. Adottando poi l' ipoteſi di *Lambert*, biſogna moltiplicare il trovato differenziale pel ſeno dell' angolo FMO, che è l' angolo d' emanazione. Ora $FMO = FMN + MCO = FMN + \phi$, e in conſeguenza $\text{ſen.}\,FMO = \text{ſen}\cdot FMN\,.\,\text{coſ.}\,\phi$

$$+ \text{ſen.}\,\phi\,.\,\text{coſ.}\,FMN = \frac{(K + r\,\text{coſ.}\,\phi)\,\text{coſ.}\,\phi + r\,(\text{ſen.}\,\phi)^2}{FM}$$

$= \dfrac{K\,.\,\text{coſ.}\,\phi + r}{\surd(K^2 + r^2 + 2Kr\,.\,\text{coſ.}\,\phi)}$. Perilchè la quantità di luce, che da Mm ſi comunica a F con queſt' ultima ipoteſi, riſulta $\dfrac{Trd\phi\,(r + K\,.\,\text{coſ.}\,\phi)}{(K^2 + r^2 + 2Kr\,.\,\text{coſ.}\,\phi)^{3:2}} = \dfrac{Tr}{h^{3:2}}\left(\dfrac{d\phi\,(r + K\,.\,\text{coſ.}\,\phi)}{(1 + e\,.\,\text{coſ.}\,\phi)^{3:2}}\right)$, ove ſi ponga $K^2+r^2=h$, $\frac{2Kr}{K^2+r^2}=e$. Queſt' ultima ſoſtituzione fa conoſcere, che e debb' eſſer ſempre minore dell' unità, perchè $K^2+r^2>2Kr$ in tutti i caſi.

42. Arrivato il P. *Fontana* alla formola $\frac{d\phi\,(r+K.\,\text{coſ}.\,\phi)}{(1+e.\,\text{coſ}.\,\phi)^{3:2}}$, intraprende d' integrarla coll' ajuto delle ſerie; ma queſte gli riſultano sì incomode e inviluppate, che io ho creduto tornar meglio aſſai di rivolgerſi ad integrarla colle rettificazioni degli archi ellittici ed iperbolici, ottenendoſi per tal mezzo una illuminazione totale, che rieſce al maggior ſegno elegante.

43. Per piegar la formola a ricever l' aſpetto di una di quelle, che negli antecedenti numeri abbiamo già integrato, faccio $1+e.\,\text{coſ}.\,\phi=\frac{1}{x^2}$; onde naſce $\text{coſ}.\,\phi=\frac{1-x^2}{ex^2}$;

$r+K.\,\text{coſ}.\,\phi=\frac{erx^2-Kx^2+K}{ex^2}$; $1+\text{coſ}.\,\phi=\frac{1-x^2(1-e)}{ex^2}$;

$1-\text{coſ}.\,\phi=-\frac{1+x^2(1+e)}{ex^2}$;

$\text{ſen}.\,\phi=\frac{\sqrt{(1-x^2(1-e))}\sqrt{(-1+x^2(1+e))}}{ex^2}$. E perchè coſ. ϕ cala a miſura che creſce l' arco RM, ſarà, differenziando la prima equazione, $-e d\phi.\,\text{ſen}.\,\phi=-\frac{2dx}{x^3}$, cioè

$$d\phi=\frac{2dx}{x\sqrt{(1-x^2(1-e))}\sqrt{(-1+x^2(1+e))}}$$ e quindi

$$\frac{Tr}{h^{3:2}}.\frac{d\phi\,(r+K.\,\text{coſ}.\,\phi)}{(1+e.\,\text{coſ}.\,\phi)^{3:2}}$$
$$=\frac{2Tr}{h^{3:2}}.\frac{dx\,(erx^2-Kx^2+K)}{e\sqrt{(1-x^2(1-e))}\sqrt{(-1+x^2(1+e))}}.$$

44. Laſcio da parte il fattor coſtante $\frac{2Tr}{h^{3:2}}$, e m' accingo ad integrare la formola;

$\frac{dx(erx^2 - Kx^2 + K)}{e\sqrt{(1 - x^2(1 - e))}\sqrt{(-1 + x^2(1 + e))}}$, che eſprimo con equivalenza in tal modo ; $\frac{dx(erx^2 + eKx^2 - eKx^2 + K - Kx^2)}{e\sqrt{(1 - x^2(1 - e))}\sqrt{(-1 + x^2(1 + e))}}$

$$= \frac{(r + K)x^2dx}{\sqrt{(1 - x^2(1 - e))}\sqrt{(-1 + x^2(1 + e))}} - \frac{Kdx\sqrt{(-1 + x^2(1 + e))}}{e\sqrt{(1 - x^2(1 - e))}}.$$

Poſto in ſeguito $\sqrt{(1 - x^2(1 - e))} = z$, mi naſce;

$$\frac{x^2dx}{\sqrt{(1 - x^2(1 - e))}\sqrt{(-1 + x^2(1 + e))}} = \frac{-dz\sqrt{(1 - z^2)}}{(1 - e)\sqrt{(2e - z^2(1 + e))}},$$

di cui l' integrale è $= \frac{-1}{(1 - e)\sqrt{(1 + e)}}$ (arco ellittico di 1.° ſem. 1 ; aſciſſa cent. nel 1.° aſſe ; $\frac{z\sqrt{(1 + e)}}{\sqrt{2e}}$), come

2.° ſem. $\frac{\sqrt{(1 - e)}}{\sqrt{(1 + e)}}$

porta il confronto colla 1.ª formola del num. 19. Coll' ajuto poi del 2.° Lemma ſi troverà l' integrale dell' altra formola; $\frac{dx\sqrt{(-1 + x^2(1 + e))}}{\sqrt{(1 - x^2(1 - e))}} = \frac{x\sqrt{(-1 + x^2(1 + e))}}{\sqrt{(1 - x^2(1 - e))}}$ $- \frac{1}{\sqrt{(1 - e)}}$ (arco iperbolico di 1.° ſem. $\frac{\sqrt{2e}}{\sqrt{(1 - e)}}$; aſciſſa

2.° ſem. 1

cent. nel 2.° aſſe ; $\frac{\sqrt{(1 - e)}}{\sqrt{(1 + e)}} \times \frac{\sqrt{(-1 + x^2(1 + e))}}{\sqrt{(1 - x^2(1 - e))}}$). Quindi nella precedente integrazione ſurrogando a z il ſuo valore $\sqrt{(1 - x^2(1 - e))}$, ſarà ;

$$\int \frac{dx(erx^2 - Kx^2 + K)}{e\sqrt{(1 - x^2(1 - e))}\sqrt{(-1 + x^2(1 + e))}} = - \frac{(r + K)}{(1 - e)\sqrt{(1 + e)}}$$

(arco ellittico di 1.° ſem. 1 ; aſciſſa cent. nel 1.°,

2.° ſem. $\frac{\sqrt{(1 - e)}}{\sqrt{(1 + e)}}$

$$\frac{\sqrt{(1+e)}}{\sqrt{2e}}\cdot\sqrt{\left(1-x^2(1-e)\right)}\Bigg)-\frac{Kx\sqrt{\left(-1+x^2(1+e)\right)}}{e\sqrt{\left(1-x^2(1-e)\right)}}$$

$+\dfrac{K}{e\sqrt{(1-e)}}\Bigg($ arco iperbolico di 1.° ſem. $\dfrac{\sqrt{2e}}{\sqrt{(1-e)}}$; aſciſſa

2.° ſem. 1

cent. nel 2.°; $\dfrac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)}}\times\dfrac{\sqrt{\left(-1+x^2(1+e)\right)}}{\sqrt{\left(1-x^2(1-e)\right)}}\Bigg)+C$: o ritornando al ſimbolo coſ. ϕ; $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\frac{d\phi\,(r+K.\text{coſ.}\,\phi)}{(1+e.\text{coſ.}\,\phi)^{3:2}}$

$=-\dfrac{(r+K)}{(1-e)\sqrt{(1+e)}}\Bigg($ arco ellittico di 1.° ſem. 1 ; aſciſſa

2.° ſem. $\dfrac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)}}$

cent. nel 1.° $\dfrac{\sqrt{(1+e)}}{\sqrt{2}}\times\dfrac{\sqrt{(1+\text{coſ.}\,\phi)}}{\sqrt{(1+e.\text{coſ.}\,\phi)}}\Bigg)$

$-\dfrac{K\sqrt{(1-\text{coſ.}\,\phi)}}{e\sqrt{(1+e.\text{coſ.}\,\phi)}\sqrt{(1+\text{coſ.}\,\phi)}}+\dfrac{K}{e\sqrt{(1-e)}}\Bigg($ arco iperbolico di 1.° ſem. $\dfrac{\sqrt{2e}}{\sqrt{(1-e)}}$; aſciſſa centrale nel 2.°,

2.° ſem. 1

$\dfrac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)}}\cdot\dfrac{\sqrt{(1-\text{coſ.}\,\phi)}}{\sqrt{(1+\text{coſ.}\,\phi)}}\Bigg)+C.$

45. Quando l' arco RM è nullo, neceſſariamente debb' eſſer nulla l' illuminazione. Fatto pertanto coſ. $\phi=1$, che corriſponde all' arco $RM=0$, verremo a determinare la coſtante C. Ora in queſta ſuppoſizione l' aſciſſa centrale dell' arco ellittico diventa 1, cioè il 1°. ſemiaſſe; il che vuol dire, che l' arco ſi cangia nel quadrante $\mathcal{Q}$ dell' elliſſi; in oltre ſvaniſcono i due ſuſſeguenti termini dell' integrazione. Dunque ci ſi preſenterà l' equazione;

$0=-\dfrac{(r+K)\mathcal{Q}}{(1-e)\sqrt{(1+e)}}+C$, cioè $C=\dfrac{(r+K)\mathcal{Q}}{(1-e)\sqrt{(1+e)}}$; e perciò ſarà l' integrale completo della noſtra formola

$= \frac{(r+K)}{(1-e)\sqrt{(1+e)}} \Big(\mathcal{Q} -$ arco ellittico di 1°. ſem. 1; aſciſſa

2°. ſem. $\frac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)}}$

nel 1°; $\frac{\sqrt{(1+e)}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{(1+\text{coſ.}\,\phi)}}{\sqrt{(1+e.\,\text{coſ.}\,\phi)}} \Big)$

$- \frac{K}{e\sqrt{(1-e)}} \Big(\frac{\sqrt{(1-e)}\sqrt{(1-\text{coſ.}\,\phi)}}{\sqrt{(1+e.\,\text{coſ.}\,\phi)}\sqrt{(1+\text{coſ.}\,\phi)}} -$ arco iperbolico di 1°. ſem. $\frac{\sqrt{2e}}{\sqrt{(1-e)}}$; aſciſſa nel 2°;

2°. ſem. 1

$\frac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)}} \cdot \frac{\sqrt{(1-\text{coſ.}\,\phi)}}{\sqrt{(1+\text{coſ.}\,\phi)}} \Big) = (H) \Big(\frac{r+K}{(1-e)\sqrt{(1+e)}} \Big) \Big($ arco ellittico di 1°. ſem. 1; aſciſſa nel 2°;

2°. ſem. $\frac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)}}$

$\frac{(1-e)\sqrt{(1-\text{coſ.}\,\phi)}}{\sqrt{2}\sqrt{(1+e)}\sqrt{(1+e.\,\text{coſ.}\,\phi)}} \Big)$

$- \frac{K}{e\sqrt{(1-e)}} \Big(\frac{\sqrt{(1-e)}\sqrt{(1-\text{coſ.}\,\phi)}}{\sqrt{(1+e.\,\text{coſ.}\,\phi)}\sqrt{(1+\text{coſ.}\,\phi)}} -$ arco iperbolico di 1°. ſem. $\frac{\sqrt{2e}}{\sqrt{(1-e)}}$; aſciſſa nel 2°;

2.° ſem. 1

$\frac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)}} \cdot \frac{\sqrt{(1-\text{coſ.}\,\phi)}}{\sqrt{(1+\text{coſ.}\,\phi)}} \Big)$.

46. Creſciuto l' arco *RM* fino a divenire la ſemiperiferia *RMB*, ſi cangia coſ. ϕ in -1, e l' aſciſſa centrale dell' arco ellittico in (H) ſi fa eguale al 2°. ſemiaſſe; ovvero l' arco ſi fa il quadrante $\mathcal{Q}$ dell' elliſſe, mentre gli altri due termini, che ſeguitano, ſon due quantità infinite. Queſte, introdotta la modificazione di coſ. $\phi = -1$, ſi ſcrivan così;

$- \frac{K}{e\sqrt{(1-e)}} \Big(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(1+\text{coſ.}\,\phi)}} -$ arco iperbolico di

1°. ſem. $\frac{\sqrt{2e}}{\sqrt{(1-e)}}$; aſciſſa nel 2°; $\frac{\sqrt{2}\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)}\sqrt{(1+\text{coſ.}\,\phi)}}$);
2°. ſem. 1
ed invocato il numero VIII, che ci dà per noſtra iperbola $\frac{CV'}{CA}=\frac{\sqrt{(1+e)}}{\sqrt{(1-e)}}$; $\frac{CG'}{CK}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)}\sqrt{(1+\text{coſ.}\,\phi)}}$, troverem l' aſſintoto $=\frac{CV'}{CA}\cdot\frac{CG'}{CK}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(1+\text{coſ.}\,\phi)}}$. Sicchè i due ſoprannotati termini dentro la parenteſi vengono ad eſprimere la differenza Δ tra l'aſſintoto e l'arco iperbolico infinito; e perciò l' integrale ſpettante alla ſemicirconferenza *RMB* ſarà; $\frac{(r+K)\mathcal{Q}}{(1-e)\sqrt{(1+e)}}-\frac{K\Delta}{e\sqrt{(1-e)}}$, appartenendo $\mathcal{Q}$ all' elliſſi di 1.° ſem. 1; 2.° ſem. $\frac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)}}$, e Δ all' iperbola di 1.° ſem. $\frac{\sqrt{2e}}{\sqrt{(1-e)}}$; 2.° ſem. 1.

47. Poichè il 1.° ſemiaſſe dell' elliſſi, cui ſpetta il quadrante $\mathcal{Q}$, è 1, e il 2.° $\frac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)}}$, nella ſerie (*B*) del num. 9. ſarà $a=1$, $b=\frac{\sqrt{(1+e)}}{\sqrt{2e}}$, $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{2e}}{\sqrt{(1+e)}}$, dai quali valori riſulta $\mathcal{Q}=\frac{\phi}{2}-\frac{\phi}{2}\left(\frac{1.2e}{2^2(1+e)}+\frac{1^2.3.2^2e^2}{2^2.4^2(1+e)^2}+\frac{1^2.3^2.5.2^3e^3}{2^2.4^2.6^2(1+e)^3}\text{ ecc.}\right)$. Parimente riferendoſi Δ all'iperbola di 1.° ſem. $\frac{\sqrt{2e}}{\sqrt{(1-e)}}$; 2.° ſem. 1, nell'altra ſerie (*F*) del num. 18. ſarà $a=\frac{\sqrt{2e}}{\sqrt{(1-e)}}$; $b=\frac{2e}{\sqrt{(1+e)}\sqrt{(1-e)}}$, e $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{2e}}{\sqrt{(1+e)}}$, onde ſi trae $\Delta=\frac{e\phi}{2\sqrt{(1+e)}\sqrt{(1-e)}}$
$+\frac{e\phi}{\sqrt{(1+e)}\sqrt{(1-e)}}\left(\frac{1^2.2e}{2^2.4(1+e)}+\frac{1^2.3^2.2^2e^2}{2^2.4^2.6(1+e)^2}\right.$

$+\dfrac{1^2.3^2.5^2.2^3e^3}{2^2.4^2.6^2.8(1+e)^3}$ ecc. $)$. Soſtituendo pertanto queſti valori nell' integrale $\dfrac{(r+K)\mathfrak{Q}}{(1-e)\sqrt{(1+e)}} - \dfrac{K\Delta}{e\sqrt{(1-e)}}$, e rimeſſo ancora il fattore $\dfrac{2Tr}{b^{3:2}}$, ſi avrà la metà dell' illuminazione che inveſte il punto

$$F = \frac{Tr^2\phi}{b^{3:2}(1-e)\sqrt{(1+e)}} - \frac{Tr\phi(r+K)}{b^{3:2}(1-e)\sqrt{(1+e)}} \left(\frac{1.2e}{2^2(1+e)} + \frac{1^2.3.2^2e^2}{2^2.4^2(1+e)^2}\text{ ecc.}\right) - \frac{2TrK\phi}{b^{3:2}(1-e)\sqrt{(1+e)}} \left(\frac{1^2.2e}{2^2.4(1+e)} + \frac{1^2.3^2.2^2e^2}{2^2.4^2.6(1+e)}\text{ ecc.}\right) = (H)\ \frac{Tr^2\phi}{(r-K)^2(r+K)}$$

$$- \frac{Tr\phi}{(r-K)^2}\left(\frac{1.2^2Kr}{2^2(r+K)^2} + \frac{1^2.3.2^4K^2r^2}{2^2.4^2(r+K)^4} + \frac{1^2.3^2.5.2^6K^3r^3}{2^2.4^2.6^2(r+K)^6}\text{ ecc.}\right)$$

$$- \frac{2TrK\phi}{(r-K)^2(r+K)}\left(\frac{1^2.2^2Kr}{2^2.4(r+K)^2} + \frac{1^2.3^2.2^4K^2r^2}{2^2.4^2.6(r+K)^4} + \frac{1^2.3^2.5^2.2^6K^3r^3}{2^2.4^2.6^2.8(r+K)^6}\text{ ecc.}\right) = \frac{Tr^2\phi}{(r-K)^2(r+K)}$$

$$- \frac{Tr\phi}{(r-K)^2}\left(\frac{1.1.2^2Kr}{2^2(r+K)^2} + \frac{1.3.2^2Kr.A}{4^2(r+K)^2} + \frac{3.5.2^2Kr.B}{6^2(r+K)^2} + \frac{5.7.2^2Kr.C}{8^2(r+K)^2}\text{ ecc.}\right) - \frac{2TrK\phi}{(r-K)^2(r+K)}\left(\frac{1^2.2^2Kr}{4.4(r+K)^2} + \frac{3^2.2^2Kr.A'}{4.6(r+K)^2} + \frac{5^2.2^2Kr.B'}{6.8(r+K)^2} + \frac{7^2.2^2Kr.C'}{8.10(r+K)^2}\text{ ecc.}\right)$$

Le majuſcole A, B, C ecc.; A', B', C' ecc. di queſt' ultima ſerie ſono i termini, che precedono immediatamente.

48. Vogliaſi a cagion d' eſempio, che il punto F reſti collocato alla metà del raggio CB. Divenendo in tal caſo $K = \dfrac{r}{2}$, la metà della illuminazione ſi fa

$$= \frac{8T\phi}{r} - \frac{4T\phi}{r}\left(\frac{1.1.8}{2^2.9} + \frac{1.3.8A}{4^2.9} + \frac{3.5.8B}{6^2.9} + \frac{5.7.8C}{8^2.9}\text{ ecc.}\right) = \frac{8T\phi}{3r}\left(\frac{1^2.8}{4.4.9} + \frac{3^2.8A'}{4.6.9} + \frac{5^2.8B'}{6.8.9} + \frac{7^2.8C'}{8.10.9}\text{ ecc.}\right).$$

Nell' una e nell' altra ſerie vanno preſi 32 termini, ſe ſi vuole ſpingere l' approſſimazione ſino a tre, o quattro decimali; e dopo le neceſſarie riduzioni proviene la ſuddetta metà di luce $= \frac{T\phi}{r}$ (1. 246066), ovvero per maggior eſattezza ne' numeri, $= \frac{T\phi}{r}$ (1. 246). Ora, ſiccome quando F cade nel centro C, ſvaniſcono K ed e, e naſce il valore della ſemi-illuminazione $= \frac{T\phi}{r}$, ſe faremo, che $\frac{T\phi}{r}$ rappreſenti l' unità di luce, ſarà quella, che riceve F ſituato alla metà del raggio CB alla ſemiperiferia raggiante $= 1.246$, cioè 1 e poco più di $\frac{1}{5}$.

49. A miſura che s' intende F ritirarſi verſo B, K s' accoſta al valore di r, ed e al valore di 1, coſicchè fatto $K = r$, diventa $e = 1$, e per ragione del fattore $(r - K)^2$ ne' denominatori della ſerie (H), la illuminazione rieſce infinita. Ciò però meglio ſi rileva, ſe ci riportiamo alla formola differenziale; $\frac{2Trdx\,(erx^2 - Kx^2 + K)}{b^{3:2}.\,e\sqrt{(1 - x^2(1-e))}\sqrt{(-1 + x^2(1+e))}}$.
Queſta nell' ipoteſi di $e = 1$ così ſi modifica; $\frac{2Tr^2dx}{b^{3:2}\sqrt{(-1 + 2x^2)}}$

$$= \frac{Tdx}{r\sqrt{2}\sqrt{(-1 + 2x^2)}},$$

di cui l' integrale completo è

$$= \frac{T}{2r} l. \left(\frac{1}{x\sqrt{2} - \sqrt{(2x^2 - 1)}} \right) = \frac{T}{2r} l. \left(\frac{\sqrt{(1 + \text{coſ.}\,\phi)}}{\sqrt{2} - \sqrt{(1 - \text{coſ.}\,\phi)}} \right)$$

$$= \frac{T}{2r} l. \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{(1 - \text{coſ.}\,\phi)}}{\sqrt{(1 + \text{coſ.}\,\phi)}} \right),$$

onde ſi deduce, che quando $\text{coſ.}\,\phi = -1$, cioè quando F cade in B, viene F inveſtito da una luce infinita.

50. Queſta infinità di luce non gli può derivare, che dall' unico punto raggiante B, in cui eſſo s' immerge, perchè qualunque arco RM minore di RB non gliene comunica che una quantità finita. Dunque l' indole del problema non permette,

permette, che dopo aver ſuppoſta nulla l' illuminazione di F nella nullità dell' arco RM, ſi cerchi quanto lume inveſta F ſituato in R; a motivo che la coincidenza di F con qualunque punto raggiante della periferia lo rende infinitamente illuminato; e ciò ripugna all' ipoteſi della nullità di luce, che F raccoglie da R. Per la qual coſa appunto, volendo immergere F in qualche punto luminoſo, ho ſcelto il punto oppoſto B, che ſalva egregiamente la prima ſuppoſizione.

51. E' coſa per altro curioſa il vedere a che s' agguagliano in tal caſo i termini della noſtra integrazione. Poichè l' immerſione di F in B produce che ſia $K = r$, $e = 1$, naſce la ſemi-illuminazione in genere $= \frac{T}{r(1-e)}\Big($ arco ellittico di 1°. ſem. 1; aſciſſa nel 2°; $\frac{(1-e)\sqrt{(1-\text{coſ.}\,\phi)}}{2\sqrt{(1+\text{coſ.}\,\phi)}}\Big)$

2°. ſem. $\frac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{2}}$

$- \frac{T\sqrt{(1-\text{coſ.}\,\phi)}}{r\sqrt{2(1+\text{coſ.}\,\phi)}} + \frac{T}{r\sqrt{2}\sqrt{(1-e)}}\Big($ arco iperbolico di

1°. ſem. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(1-e)}}$; aſciſſa nel 2°; $\frac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{(1-\text{coſ.}\,\phi)}}{\sqrt{(1+\text{coſ.}\,\phi)}}\Big)$.
2°. ſem. 1

Il 1°. termine è un moltiplo infinito d' un arco ellittico, che ha il ſemiaſſe ſecondo e l' aſciſſa centrale nulli; l' ultimo è parimente un moltiplo infinito ma di un arco iperbolico che ha infinito il primo ſemiaſſe e nulla l' aſciſſa centrale, coſicchè parer potrebbe, che, prendendoſi le aſciſſe nel 2°. aſſe, l' arco non differiſſe per niente dall' aſciſſa centrale e foſſe il ſuo moltiplo $= \frac{T}{r\sqrt{(1-e)}\,.\,\sqrt{2}} \times \left(\frac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{(1-\text{coſ.}\,\phi)}}{\sqrt{(1+\text{coſ.}\,\phi)}}\right) = \frac{T}{2r} \times \frac{\sqrt{(1-\text{coſ.}\,\phi)}}{\sqrt{(1+\text{coſ.}\,\phi)}}$, quantità algebraica e finita. E pure con tal concluſione cadrebbeſi in parallogiſmo, perchè differenziando sì il moltiplo dell' arco ellittico come anche il moltiplo dell' arco iperbolico, dopo

aver poſto $u = \frac{\sqrt{(1 - \text{coſ.}\,\phi)}}{\sqrt{(1 + \text{coſ.}\,\phi)}}$ e fatte le dovute ſoſtituzioni, ſi arriva nell' uno e nell' altro caſo al differenziale $\frac{T du \sqrt{(1 + u^2)}}{2r}$, il cui integrale ſarà ai ſuddetti due moltipli comune. Ora queſt' integrale è $\frac{T}{4r}\Big(u\sqrt{(1 + u^2)} + l.\big(u + \sqrt{(1 + u^2)}\big)\Big) = \frac{T}{4r}\Big(\frac{\sqrt{2}\sqrt{(1 - \text{coſ.}\,\phi)}}{1 + \text{coſ.}\,\phi} + l.\Big(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{(1 - \text{coſ.}\,\phi)}}{\sqrt{(1 + \text{coſ.}\,\phi)}} \Big)\Big)$, cioè d' un valore onninamente diverſo dal ſuperiore; $\frac{T}{2r} \times \frac{\sqrt{(1 - \text{coſ.}\,\phi)}}{\sqrt{(1 + \text{coſ.}\,\phi)}}$; e può ſervir d' avviſo ai calcolatori di non trar troppo preſto concluſioni dai loro calcoli, ſenza aver prima eſaminato ogni coſa colla maggiore attenzione. Intanto noi diremo, che, quando $e = 1$, varrà l' equazione; $\frac{1}{\sqrt{(1 - e)}}\Big($ arco ellittico di 1°. ſem. 1; aſciſſa nel 2°; $\frac{(1 - e)\sqrt{(1 - \text{coſ.}\,\phi)}}{2\sqrt{(1 + \text{coſ.}\,\phi)}}$; 2°. ſem. $\frac{\sqrt{(1 - e)}}{\sqrt{2}}$ $\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big($ arco iperbolico di 1°. ſem. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(1 - e)}}$; aſciſſa nel 2°; $\frac{\sqrt{(1 - e)}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{(1 - \text{coſ.}\,\phi)}}{\sqrt{(1 + \text{coſ.}\,\phi)}}$; 2°. ſem. 1 $\Big)$
e che i due archi moltipli preſi inſieme verranno a formar l' integrale $\frac{T}{2r}\Big(\frac{\sqrt{2}\sqrt{(1 - \text{coſ.}\,\phi)}}{1 + \text{coſ.}\,\phi} + l.\Big(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{(1 - \text{coſ.}\,\phi)}}{\sqrt{(1 + \text{coſ.}\,\phi)}} \Big)\Big) = \frac{T\sqrt{(1 - \text{coſ.}\,\phi)}}{r\sqrt{2(1 + \text{coſ.}\,\phi)}} + \frac{T}{2r} l.\Big(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{(1 - \text{coſ.}\,\phi)}}{\sqrt{(1 + \text{coſ.}\,\phi)}} \Big)$. Aggiunto poi a queſti due il termine algebraico $-\frac{T\sqrt{(1 - \text{coſ.}\,\phi)}}{r\sqrt{2(1 + \text{coſ.}\,\phi)}}$, ſi ottiene la mezza illuminazione $= \frac{T}{2r} l.\Big(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{(1 - \text{coſ.}\,\phi)}}{\sqrt{(1 + \text{coſ.}\,\phi)}} \Big)$ tal quale preciſamente s' è trovata al num°. 49.

MEMORIA

SULL' EQUAZIONI A DIFFERENZE FINITE E PARZIALI.

Del Sig. PIETRO PAOLI Pubblico Profeſſore nella Univerſità di Pavia.

I Due illuſtri Geometri, i Signori *de la Place* e *de la Grange* hanno inſegnato ad integrare l' equazioni a differenze finite e parziali. Il primo nel Tomo 6.° e 7.° delle *Memorie preſentate all' Accademia di Parigi* ha dato un metodo generale per integrare l' equazioni lineari a differenze finite e parziali di un ordine qualunque n, a coefficienti comunque variabili o coſtanti. Il ſecondo nelle *Memorie dell' Accademia di Berlino* dell' anno 1775. ha dato due metodi per integrare le medeſime equazioni, quando i coefficienti ſono coſtanti. Se $Z^{(y,x)}$ rappreſenta una funzione delle variabili y ed x, l'equazioni finora trattate ſi riducono alla forma ſeguente:

$$\begin{aligned}Z^{(y,x)} = {} & AZ^{(y-1,x)} + BZ^{(y-2,x)} + \dots + NZ^{(y-n,x)} + X \\ & + A'Z^{(y,x-1)} + B'Z^{(y-1,x-1)} + \dots + N'Z^{(y-n,x-1)} \\ & + A''Z^{(y,x-2)} + B''Z^{(y-1,x-2)} + \dots + N''Z^{(y-n,x-2)} \\ & \vdots \\ & + A^{(n)}Z^{(y,x-n)} + B^{(n)}Z^{(y-1,x-n)} + \dots + N^{(n)}Z^{(y-n,x-n)}\end{aligned}$$

ove per A, A', ecc., B, B', ecc., e per X il Sig. *de la Place* intende qualunque funzione data di x; il Sig. *de la Grange* ſuppone che A, B, ecc. ſiano quantità coſtanti, ed $X = 0$: ambedue pongono n eſſere una quantità coſtante.

Niuno di loro ha mai penſato a trattare quel caſo, in cui le differenze di y ſuppongonſi funzioni della variabile x (*a*). Tale è l' equazione ſempliciſſima $Z^{(y,x)} = Z^{(y-x,x)} + Z^{(y-1,x-1)}$, alla quale ſi giunge, ſe il numero delle maniere ſi cerca, nelle quali un numero y può eſſer la ſomma di x termini della ſerie naturale 1, 2, 3, 4, 5 ecc. I metodi del Sig. *de la Grange* ſono inapplicabili a queſta ſorte di equazioni: quello del Sig. *de la Place* può applicarviſi, come vedremo in appreſſo; ma egli non ha mai conſiderate queſt' equazioni. Avendomi pertanto il primo metodo del Sig. *de la Grange* ſuggerita un' altra via, per cui giunger ſi può alla integrazione di queſt' equazioni, ho penſato di preſentare ai Geometri un ſaggio di quelle ricerche, che ho fatte in queſta materia.

ARTICOLO I.

Dell' integrazione dell' equazioni a differenze finite, variabili, e parziali.

1. Sia pertanto propoſto d' integrar l' equazione

$$Z^{(y,x)} = \underset{x}{A}\, Z^{(y-1,x)} + \underset{x}{B}\, Z^{(y-2,x)} + \ldots + \underset{x}{X}\, Z^{(y-x,x)} + \ldots$$

$$+ \underset{x}{A'}\, Z^{(y,x-1)} + \underset{x}{B'}\, Z^{(y-1,x-1)} + \ldots + \underset{x}{X'}\, Z^{(y-x,x-1)} + \ldots$$

ove $\underset{x}{A}$, $\underset{x}{A'}$, $\underset{x}{B}$, $\underset{x}{B'}$, ecc. eſprimono funzioni date di x, e nelle diverſe funzioni $Z^{(y-1,x)}$, $Z^{(y-1,x-1)}$, ecc. la y può variare comunque, purchè però la ſua variazione ſia ſempre una funzione di x.

Supponghiamo, che l'integrale cercato abbia queſta forma:

$$Z^{(y,x)} = m a^{y} \underset{x}{\nabla\alpha} + n b^{y} \underset{x}{\nabla\beta} + p c^{y} \underset{x}{\nabla\gamma} + \text{ecc.}$$

ove le lettere m, n, p, ecc. a, b, c, ecc. eſprimono quan-

(*a*) Il Sig. Cav. *Lorgna* è il primo, che abbia trattato delle funzioni ed equazioni differenziali finite a due variabili, ſupponendo le differenze di y funzioni della variabile x (Mem. della *Società Italiana* Tomo I. pag. 377, 388, 395 e ſegu.); ma non ha ancora pubblicato la continuazione delle ſue ricerche ſull' equazioni a più di due variabili, come s' è propoſto di fare alla pag. 375.

tità coſtanti, α_x, β_x, γ_x, ecc. ſono funzioni di x; $\nabla\alpha_x$ ſecondo la maniera di ſcrivere del Sig. *de la Place* rappreſenta il prodotto $\alpha_1 . \alpha_2 . \alpha_3 \ldots \alpha_x$; in modo che ſarà $\nabla\alpha_{x-1} = \alpha_1 . \alpha_2 . \alpha_3 \ldots \alpha_{x-1}$, e perciò $\nabla\alpha_x = \alpha_x \nabla\alpha_{x-1}$: il numero poi de' termini dell' integrale è indefinito. Soſtituendo adunque nella equazione propoſta in luogo di $Z^{(y,x)}$ il di lui valore, avremo

$$\begin{aligned}
ma^y\nabla\alpha_x = {} & mA_x\, a^{y-1}\nabla\alpha_x + mB_x\, a^{y-1}\nabla\alpha_x + \ldots \\
& + mX_x\, a^{y-x}\nabla\alpha_x + \ldots + mA'_x\, a^y\nabla\alpha_{x-1} \\
& + mB'_x\, a^{y-1}\nabla\alpha_{x-1} + \ldots + mX'_x\, a^{y-x}\nabla\alpha_{x-1} + \ldots \\
+ nb^y\nabla\beta_x \quad & + nA_x\, b^{y-1}\nabla\beta_x + nB_x\, b^{y-2}\nabla\beta_x + \ldots \\
& + nX_x\, b^{y-x}\nabla\beta_x + \ldots + nA'_x\, b^y\nabla\beta_{x-1} \\
& + nB'_x\, b^{y-1}\nabla\beta_{x-1} + \ldots + nX'_x\, b^{y-x}\nabla\beta_{x-1} + \ldots \\
+ pc^y\nabla\gamma_x \quad & + pA_x\, c^{y-1}\nabla\gamma_x + pB_x\, c^{y-2}\nabla\gamma_x + \ldots \\
& + pX_x\, c^{y-x}\nabla\gamma_x + \ldots + pA'_x\, c^y\nabla\gamma_{x-1} \\
& + pB'_x\, c^{y-1}\nabla\gamma_{x-1} + \ldots + pX'_x\, c^{y-x}\nabla\gamma_{x-1} + \ldots \\
+ \text{ecc.} \quad & + \text{ecc.}
\end{aligned}$$

Per ſoddisfare a queſta equazione, ponghiamo

$$\begin{aligned}
ma^y\nabla\alpha_x = {} & mA_x\, a^{y-1}\nabla\alpha_x + mB_x\, a^{y-2}\nabla\alpha_x + \ldots \\
& + mX_x\, a^{y-x}\nabla\alpha_x + \ldots + mA'_x\, a^y\nabla\alpha_{x-1} \\
& + mB'_x\, a^{y-1}\nabla\alpha_{x-1} + \ldots + mX'_x\, a^{y-x}\nabla\alpha_{x-1} + \ldots
\end{aligned}$$

$$nb^y\nabla\beta_x = nA_x\, b^{y-1}\nabla\beta_x + nB_x\, b^{y-2}\nabla\beta_x + \ldots$$

$$+nX_x\, b^{y-x}\nabla\beta_x + \dots + nA'_x\, b^y\nabla\beta_{x-1}$$

$$+nB'_x\, b^{y-1}\nabla\beta_{x-1} + \dots + nX'_x\, b^{y-x}\nabla\beta_{x-1} + \dots$$

$$pc^y\nabla\gamma_x = pA_x\, c^{y-1}\nabla\gamma_x + pB_x\, c^{y-2}\nabla\gamma_x + \dots$$

$$+pX_x\, c^{y-x}\nabla\gamma_x + \dots + pA'_x\, c^y\nabla\gamma_{x-1}$$

$$+pB'_x\, c^{y-1}\nabla\gamma_{x-1} + \dots + pX'_x\, c^{y-x}\nabla\gamma_{x-1} + \dots$$

ecc.

e ſiccome $\nabla\alpha_x = \alpha_x\,\nabla\alpha_{x-1}$, $\nabla\beta_x = \beta_x\,\nabla\beta_{x-1}$,

$\nabla\gamma_x = \gamma_x\,\nabla\gamma_{x-1}$, ecc. avremo

$$\alpha_x = \frac{A'_x + B'_x\, a^{-1} + \dots + X'_x\, a^{-x} + \dots}{1 - A_x\, a^{-1} - B_x\, a^{-2} - \dots - X_x\, a^{-x} - \dots}$$

$$\beta_x = \frac{A'_x + B'_x\, b^{-1} + \dots + X'_x\, b^{-x} + \dots}{1 - A_x\, b^{-1} - B_x\, b^{-2} - \dots - X_x\, b^{-x} - \dots}$$

$$\gamma_x = \frac{A'_x + B'_x\, c^{-1} + \dots + X'_x\, c^{-x} + \dots}{1 - A_x\, c^{-1} - B_x\, c^{-2} - \dots - X_x\, c^{-x} - \dots}$$

ecc.

e quindi ancora i valori di $\nabla\alpha_x$, $\nabla\beta_x$, $\nabla\gamma_x$, ecc.

2. Si riduca in ſerie diſcendente la quantità $\nabla\alpha_x$, lo che ſecondo i diverſi caſi potrà per i metodi cogniti farſi in diverſe maniere. In generale ponghiamo

$$\nabla\alpha_x = A + A'a^{-1} + A''a^{-2} + A'''a^{-3} + \text{ecc.}$$

e prendendo i logaritmi avremo

$$l.\nabla x_x = l.\left(A + A'a^{-1} + A''a^{-2} + A'''a^{-3} + \text{ecc.}\right)$$

Differenziando adeſſo nell' ipoteſi di x coſtante, ed a variabile, ſarà

$$\frac{-a^2 d\underset{x}{\nabla x}}{\underset{x}{\nabla x}\;.\,da} = \frac{A'+2A''a^{-1}+3A'''a^{-2}+\text{ecc.}}{A+A'a^{-1}+A''a^{-2}+A'''a^{-3}+\text{ecc.}}\,.$$

Ora, eſſendo $\underset{x}{\nabla x}$ una funzione fratta di a^{-1}, ſe cerchiamo le radici del numeratore e del denominatore di queſta frazione, cioè i valori di a facendo l' uno e l' altro $=0$; è facile il vedere, che poſta $r=$ alla ſomma delle radici del denominatore meno quelle del numeratore, $r'=$ ai quadrati delle radici del denominatore meno quelli del numeratore, e in generale $r^{(m)}=$ alle potenze $(m+1)^{esime}$ delle radici del denominatore meno le potenze $(m+1)^{esime}$ delle radici del numeratore, avremo

$$\frac{-a^2 d\underset{x}{\nabla x}}{\underset{x}{\nabla x}\;d.a} = r+r'a^{-1}+r''a^{-2}+r'''a^{-3}+\text{ecc.}$$

Sarà dunque

$$r+r'a^{-1}+r''a^{-2}+r'''a^{-3}+\text{ecc.}$$
$$=\frac{A'+2A''a^{-1}+3A'''a^{-2}+\text{ecc.}}{A+A'a^{-1}+A''a^{-2}+A'''a^{-3}+\text{ecc.}}\,.$$

Quindi ſi deduce

$$A'=Ar$$
$$2A''=A'r+Ar'$$
$$3A'''=A''r+A'r'+Ar''$$
$$4A''''=A'''r+A''r'+A'r''+Ar'''$$
ecc.

La quantità A ſi determinerà ponendo $a=0$ nella funzione $\underset{x}{\nabla x}$. Dall' equazioni precedenti ſi rileva

$$\frac{A'}{A}=r$$
$$\frac{A''}{A}=\frac{r'}{2}+r\frac{r}{2}$$

$$\frac{A'''}{A}=\frac{r''}{3}+r\frac{r'}{3}+\left(\frac{r'}{2}+r\frac{r}{2}\right)\frac{r}{3}$$

$$\frac{A''''}{A}=\frac{r'''}{4}+r\frac{r''}{4}+\left(\frac{r'}{2}+r\frac{r}{2}\right)\frac{r'}{4}+\left(\frac{r''}{3}+r\frac{r'}{3}+\left(\frac{r'}{2}+r\frac{r}{2}\right)\frac{r}{3}\right)\frac{r}{4}.$$

e in generale

$$\begin{aligned}\frac{A^{(m+1)}}{A}=&\frac{r^{(m)}}{m+1}+r\frac{r^{(m-1)}}{m+1}+\left(\frac{r'}{2}+r\frac{r}{2}\right)\frac{r^{(m-2)}}{m+1}+\left(\frac{r''}{3}+r\frac{r'}{3}\right.\\ &\left.+\left(\frac{r'}{2}+r\frac{r}{2}\right)\frac{r}{3}\right)\frac{r^{(m-3)}}{m+1}+\left(\frac{r'''}{4}+r\frac{r''}{4}+\left(\frac{r'}{2}+r\frac{r}{2}\right)\frac{r'}{4}\right.\\ &\left.+\left(\frac{r''}{3}+r\frac{r'}{3}+\left(\frac{r'}{2}+r\frac{r}{2}\right)\frac{r}{3}\right)\frac{r}{4}\right)\frac{r^{(m-4)}}{m+1}\\ &+\left\{\frac{r''''}{5}+r\frac{r'''}{5}+\left(\frac{r'}{2}+r\frac{r}{2}\right)\frac{r''}{5}+\left(\frac{r''}{3}+r\frac{r'}{3}\right.\right.\\ &\left.+\left(\frac{r'}{2}+r\frac{r}{2}\right)\frac{r}{3}\right)\frac{r'}{5}+\left(\frac{r'''}{4}+r\frac{r''}{4}+\left(\frac{r'}{2}+r\frac{r}{2}\right)\frac{r'}{4}\right.\\ &\left.\left.+\left(\frac{r''}{3}+r\frac{r'}{3}+\left(\frac{r'}{2}+r\frac{r}{2}\right)\frac{r}{3}\right)\frac{r}{4}\right)\frac{r}{5}\right\}\frac{r^{(m-5)}}{m+1}+\text{ecc.}\end{aligned}$$

Merita di eſſere oſſervata queſta formola per la legge, che oſſervano tra di loro i di lei diverſi termini. Il coefficiente del ſecondo termine ſi ha ponendo nel primo $m=0$; il coefficiente del terzo facendo nel primo e nel ſecondo $m=1$; e generalmente il coefficiente del termine $(\mu+2)^{esimo}$ facendo ne' termini antecedenti $m=\mu$.

3. Abbiamo dunque

$$\nabla\alpha_{x}=A+A'a^{-1}+A''a^{-2}+A'''a^{-3}+\text{ecc.}$$

ed è evidente che farà ſimilmente

$$\nabla\beta_{x}=A+A'b^{-1}+A''b^{-2}+A'''b^{-3}+\text{ecc.}$$

$$\nabla\gamma_{x}=A+A'c^{-1}+A''c^{-2}+A'''c^{-3}+\text{ecc.}$$

ecc.

Dunque l' integrale cercato farà

$Z^{(y-x)}$

$$\begin{aligned}Z^{(y,x)} = {} & mAa^{y} + mA'a^{y-1} + mA''a^{y-2} + mA'''a^{y-3} + \text{ecc.}\\ & + nAb^{y} + nA'b^{y-1} + nA''b^{y-2} + nA'''b^{y-3} + \text{ecc.}\\ & + pAc^{y} + pA'c^{y-2} + pA''c^{y-2} + pA'''c^{y-3} + \text{ecc.}\\ & + \text{ecc.}\end{aligned}$$

Ma la quantità $ma^{y} + nb^{y} + pc^{y} +$ ecc. può rappreſentare qualunque funzione di y; ſupponghiamo dunque che queſta funzione di y ſia $\phi . y$, ed avremo

$$Z^{(y,x)} = A\phi y + A'\phi(y-1) + A''\phi(y-2) + A'''\phi(y-3) + \text{ecc.}$$

La funzione $\phi . y$ è quella funzione arbitraria, che deve aver luogo nell' integrale della equazione propoſta. Per determinarla conviene che ſia dato il valore di $Z^{(y,0)}$, cioè il valore di $Z^{(y,x)}$, quando vi ſi fa $x = 0$, come più chiaramente vedremo ne' caſi particolari.

4. Ecco adunque come ſi deve operare per aver l' integrale della propoſta equazione. Si faccia $Z^{(y,x)} = b^{y}\nabla\underset{x}{\alpha}$, e ſoſtituendo queſto valore di $Z^{(y,x)}$ nella propoſta, ſe ne dedurrà il valore di $\underset{x}{\alpha}$, e quindi quello di $\nabla\underset{x}{\alpha}$. Si riduca $\nabla\underset{x}{\alpha}$ nella ſerie $A + A'b^{-1} + A''b^{-2} + A'''b^{-3} +$ ecc. e ſi avrà ſubito l' integrale cercato così eſpreſſo:

$$Z^{(y,x)} = A\phi . y + A'\phi(y-1) + A''\phi(y-2) + A'''\phi(y-3) + \text{ecc.}$$

5. Per applicare l' eſpoſta Teoria ai caſi particolari, cerchiamo il termine generale di alcune di quelle ſerie, che il Sig. *de la Place* ha chiamate *ricorro-ricorrenti*. Le ſerie di queſta ſpecie, che ſono ſtate finora trattate, erano tali, che un termine qualunque dipendeva con una certa legge da altri antecedenti ſempre ugualmente remoti da quello: nelle ſerie, delle quali ſiamo per parlare, un termine dipende con una certa legge da altri ſempre diſugualmente diſtanti da quello.

PROBLEMA I.

6. *Trovare il termine generale della ſerie*

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	....y
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
3	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45	
4	0	0	0	1	4	10	20	35	56	84	
5	0	0	0	0	0	0	1	5	15	35	....
x											

In queſta ſerie ciaſcun termine dipende da altri due in modo, che è uguale alla ſomma del termine precedente della medeſima linea orizzontale, e di quel termine della fila antecedente, il di cui poſto è diſtante di $x-2$ unità dal numero propoſto. Così nella quinta fila, ove $x=5$, ciaſcun numero, come il 35, è uguale al numero precedente 15 + quel numero che nella fila antecedente è nel terzo poſto avanti il 35, che in queſto caſo è il 20. Sia $Z^{(y,x)}$ il termine generale di queſta ſerie, e per le condizioni del Problema avremo l' equazione

$$Z^{(y,x)} = Z^{(y-1,x)} + Z^{(y-x+2,x-1)}$$

Ponghiamo $Z^{(y,x)} = b^y \nabla\alpha_x$, ed avremo $\alpha_x = b^{-1}x_x + b^{-x+2}$,

cioè $\alpha_x = \dfrac{b^{-x+2}}{1-b^{-1}}$, e $\nabla\alpha_x = \dfrac{b^{1}.b^{0}.b^{-1}.b^{-2}\ldots\ldots b^{-x+2}}{(1-b^{-1})^x}$

$= \dfrac{b^{-x(x-3):2}}{(1-b^{-1})^x}$. Si riduca in ſerie per mezzo del Teorema *Newtoniano* la quantità $\dfrac{1}{(1-b^{-1})^x}$, e ſi avrà

$$\nabla\alpha_x = b^{-x(x-3):2} + xb^{-x(x-3):2-1} + \frac{x(x+1)}{2}\,b^{-x(x-3):2-2} + \text{ecc.}$$

Onde per le coſe precedenti ſarà (4)

$$Z^{(y,x)} = \phi\left(y - \frac{x(x-3)}{2}\right) + x\phi\left(y - \frac{x(x-3)}{2} - 1\right)$$
$$+ \frac{x(x+1)}{2}\,\phi\left(y - \frac{x(x-3)}{2} - 2\right) + \text{ecc.}$$

Adeſſo per determinare la funzione arbitraria $\phi . y$, facciamo $x = 0$, ed avremo $Z^{(y,0)} = \phi . y$. Dunque $\phi . y$ è ciò che diviene $Z^{(y,x)}$, quando vi ſi fa $x = 0$. Ma noi non conoſciamo il valore di $Z^{(y,0)}$; onde converrà dedurre il valore di queſta funzione da quello di $Z^{(y,1)}$, il quale è eſpreſſo dalla prima linea orizzontale della ſerie propoſta. Biſogna prima oſſervare, che continuando la ſerie dalla parte ſiniſtra, cioè dando ad y i valori 0, -1, -2, ecc., i valori di $Z^{(y,1)}$ diverranno tutti $= 0$, cioè ſarà $Z^{(0,1)} = 0$, $Z^{(-1,1)} = 0$, $Z^{(-2,1)} = 0$, ecc. In fatti ponendo nella equazione del problema x ſucceſſivamente $= 2, 3$, ecc., ed $y = 0, 1, 2$, ecc. avremo

$$Z^{(0,1)} = Z^{(0,2)} - Z^{(-1,2)} \qquad Z^{(-1,2)} = Z^{(0,3)} - Z^{(-1,3)}$$
$$Z^{(0,2)} = Z^{(1,3)} - Z^{(0,3)} \qquad Z^{(-1,3)} = Z^{(1,4)} - Z^{(0,4)}$$
$$Z^{(0,3)} = Z^{(2,4)} - Z^{(1,4)} \qquad Z^{(0,4)} = Z^{(3,5)} - Z^{(2,5)}$$

ecc. ecc.

Ora $Z^{(2,4)} = 0$, e $Z^{(1,4)} = 0$; dunque $Z^{(0,3)} = 0$: quindi ſiccome $Z^{(1,3)} = 0$, ſarà $Z^{(0,2)} = 0$. Così, ſiccome $Z^{(3,5)}$ e $Z^{(2,5)}$ ſono $= 0$, ſarà $Z^{(0,4)} = 0$, $Z^{(-1,3)} = 0$, $Z^{(-1,2)} = 0$, e perciò $Z^{(0,1)} = 0$. Nella medeſima maniera ſi dimoſtrerà eſſere uguali a zero tutt' i valori di $Z^{(y,1)}$, quando y è negativa.

Adeſſo, ſe facciamo $x = 1$, avremo $Z^{(y,1)} = Z^{(y-1,1)} + Z^{(y+1,0)}$. cioè $Z^{(y,0)} = Z^{(y-1,1)} - Z^{(y-2,1)}$; e quindi

$$Z^{(0,0)} = Z^{(-1,1)} - Z^{(-2,1)} = 0$$
$$Z^{(1,0)} = Z^{(0,1)} - Z^{(-1,1)} = 0$$
$$Z^{(2,0)} = Z^{(1,1)} - Z^{(0,1)} = 1$$
$$Z^{(3,0)} = Z^{(2,1)} - Z^{(1,1)} = 0$$

ecc.

Di qui appariſce, che la funzione $Z^{(y,0)}$ è $= 1$ nel ſolo caſo di $y = 2$; negli altri caſi è ſempre $= 0$. Se adunque facciamo $y - \frac{x(x-3)}{2} - m = 2$, ſarà $\phi\left(y - \frac{x(x-3)}{2} - m\right) = 1$, e $Z^{(y,x)}$ ſarà uguale al coefficiente del termine $\phi\left(y - \frac{x(x-3)}{2} - m\right)$, poichè gli altri termini della ſerie ſvaniſcono. Eſſendo $m = y - \frac{x(x-3)}{2} - 2$, ſi troverà queſto coefficiente uguale a

$$\frac{x(x+1)(x+2)\,.....\,x+y-\frac{x(x-3)}{2}-3}{1.2.3\,.....\,(y-\frac{x(x-3)}{2}-2)},$$

e la funzione ricercata $Z^{(y,x)}$, o ſia il termine generale della ſerie propoſta

$$= \frac{x(x+1)(x+2)\,.....\,x+y-\frac{x(x-3)}{2}-3}{1.2.3\,.....\,(y-\frac{x(x-3)}{2}-2)}.$$

Per eſempio ſupponendo $y = 10$, $x = 5$, avremo il decimo termine della quinta fila $= \frac{5.6.7}{1.2.3} = 35$, come appunto è nella ſerie.

7. La funzione arbitraria introdotta nell' integrale della equazione propoſta ſi è trovata eſſere $Z^{(y,0)}$; ſe vogliamo invece introdurvi la funzione $Z^{(y,1)}$, che data dalla prima linea della ſerie, baſterà fare $Z^{(y,x)} = b^y \nabla\alpha_{x-1}$, ſupponendo

$\nabla\alpha_{x-1} = \alpha_1 . \alpha_2 . \alpha_3 \,.....\, \alpha_{x-1}$. Perchè avremo $\alpha_{x-1} = b^{-1}\alpha_{x-1} + b^{-x+2}$, cioè $\alpha_{x-1} = \frac{b^{-x+2}}{1-b^{-1}}$, e $\nabla\alpha_{x-1} = \frac{b^0 . b^{-1} . b^{-2} \,....\, b^{-x+2}}{(1-b^{-1})^{x-1}}$

$= \frac{b^{-(x-1)(x-2):2}}{(1-b^{-1})^{x-1}}$, o ſia $\nabla\alpha_{x-1} = b^{-(x-1)(x-2):2}$

$+ (x-1)\, b^{-(x-1)(x-2):2-1} + \frac{(x-1)x}{2}\, b^{-(x-1)(x-2):2-2} +$ ecc. e quindi (4)

$$Z^{(y,x)} = \phi\left(y - \frac{(x-1)(x-2)}{2}\right) + (x-1)\,\phi\left(y - \frac{(x-1)(x-2)}{2} - 1\right)$$

$$+ \frac{(x-1)x}{2}\,\phi\left(y - \frac{(x-1)(x-2)}{2} - 2\right) + \text{ecc.}$$

Facendo $x = 1$, abbiamo $\phi . y = Z^{(y,1)}$, cioè $\phi . y = 1$, ſe y

è poſitiva, e $=0$, ſe y è zero o negativa. Avremo dunque

$$Z^{(y,x)} = 1 + (x-1) + \frac{(x-1)x}{2} + \frac{(x-1)x(x+1)}{2.3} + \dots\dots + \frac{(x-1)x \dots\dots \left(x+y-\frac{(x-1)(x-2)}{2}-3\right)}{2 \dots\dots \left(y-\frac{(x-1)(x-2)}{2}-1\right)},$$

la quale eſpreſſione combina coll' altra ſuperiormente ritrovata.

8. Similmente, ſe ſi vorrà nell' integrale introdurre la funzione $Z^{(y,2)}$, baſterà ſupporre $Z^{(y,x)} = b^y \nabla\alpha_{x-2}$. Perchè ſoſtituendo ſi avrà $\alpha_{x-2} = b^{-1}\alpha_{x-2} + b^{-x+2}$, cioè $\alpha_{x-2} = \frac{b^{-x+2}}{1-b^{-1}}$, e $\nabla\alpha_{x-2} = \frac{b^{-(x-2)(x-1):2}}{(1-b^{-1})^{x-2}}$, cioè riducendo queſto valore in ſerie

$$\nabla\alpha_{x-2} = b^{-(x-2)(x-1):2} + (x-2)b^{-(x-2)(x-1):2-1} + \frac{(x-2)(x-1)}{2}b^{-(x-2)(x-1):2-2} + \text{ecc.}$$

e quindi (4)

$$Z^{(y,x)} = \varphi\left(y-\frac{(x-2)(x-1)}{2}\right) + (x-2)\varphi\left(y-\frac{(x-2)(x-1)}{2}-1\right) + \frac{(x-2)(x-1)}{2}\varphi\left(y-\frac{(x-2)(x-1)}{2}-2\right) + \text{ecc.}$$

Facendo $x=2$, ſi ha $\varphi y = Z^{(y,2)}$, cioè $\varphi y = y$, quando y è poſitiva, e $=0$, quando y è zero o negativa. Quindi ſarà

$$Z^{(y,x)} = y - \frac{(x-2)(x-1)}{2} + (x-2)\left(y-\frac{(x-2)(x-1)}{2}-1\right) + \frac{(x-2)(x-1)}{2}\left(y-\frac{(x-2)(x-1)}{2}-2\right) + \text{ecc.}$$

finchè ſi giunga ad un termine uguale a zero. Di qui ſi vede, come introdur ſi poſſa nell' integrale che ſi cerca qualunque altra funzione eſpreſſa da una linea orizzontale della ſerie. E queſto ha luogo generalmente, qualunque ſia l' equazione, che ſi voglia integrare.

PROBLEMA II.

9. *Trovare il termine generale della ſerie*

	1	2	3	4	5	6	7	8....y
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	3	7	15	31	63	127
3	0	0	0	1	6	25	90	301
4	0	0	0	0	0	0	1	10.....
:								
x								

In queſta ſerie ciaſcun termine è uguale al termine precedente della medeſima linea moltiplicato per x, più quel termine della linea antecedente, il di cui poſto è diſtante di $x-1$ unità. Per eſempio il termine 90 della terza fila, che corriſponde a $y=7$, è $=3.\ 25+15$, ove il 15 è quel termine che nella fila precedente corriſponde ad $y-x+1=7-2=5$. Supponghiamo che il termine generale di queſta ſerie ſia $Z^{(y,x)}$, ed avremo l' equazione

$$Z^{(y,x)}=x\,Z^{(y-1,x)}+Z^{(y-x+1,x-1)}$$

Facciamo $Z^{(y,x)}=b^y\nabla\alpha_x$, e l' equazione propoſta diventerà

$\alpha_x=xb^{-1}\alpha_x+b^{-x+1}$, cioè $\alpha_x=\dfrac{b^{-x+1}}{1-xb^{-1}}$, e perciò

$\Delta\alpha_x=\dfrac{b^{-x(x-1):2}}{(1-b^{-1})(1-2b^{-1})(1-3b^{-1})\ldots.(1-xb^{-1})}$. Ponghiamo $\dfrac{1}{(1-b^{-1})(1-2b^{-1})\ldots(1-xb^{-1})}=A+A'b^{-1}+A''b^{-2}+A'''b^{-3}+$ ecc. ed è chiaro eſſere $A=1$. Le radici del denominatore ſono $1,\ 2,\ 3,\ldots.\ x$: dunque facendo (2)

$$r=1+2+3+\ldots..+x$$
$$r'=1^2+2^2+3^2+\ldots.+x^2$$
$$\vdots$$
$$r^{(m)}=1^{m+1}+2^{m+1}+3^{m+1}+\ldots+x^{m+1}$$

avremo

$A'=r$

$$A'' = \frac{r'}{2} + r\frac{r}{2}$$

$$A''' = \frac{r''}{3} + r\frac{r'}{3} + \left(\frac{r'}{2} + r\frac{r}{2}\right)\frac{r}{3}$$

ed in generale

$$A^{(m+1)} = \frac{r^{(m)}}{m+1} + r\frac{r^{(m-1)}}{m+1} + \left(\frac{r'}{2} + r\frac{r}{2}\right)\frac{r^{(m-2)}}{m+1} + \text{ecc.}$$

come ſopra (2). Quindi avremo

$$\nabla\alpha_x = b^{-x(x-1):2} + rb^{-x(x-1):2-1} + \left(\frac{r'}{2} + r\frac{r}{2}\right)b^{-x(x-1):2-2} + \text{ecc.}$$

e perciò ſarà (4)

$$Z^{(y,x)} = \phi\left(y - \frac{x(x-1)}{2}\right) + r\phi\left(y - \frac{x(x-1)}{2} - 1\right)$$
$$+ \left(\frac{r'}{2} + r\frac{r}{2}\right)\phi\left(y - \frac{x(x-1)}{2} - 2\right) + \text{ecc.}$$

Facendo $x = 0$, è chiaro che ſarà $r = r' = r'' = \text{ecc.} = 0$; dunque $Z^{(y,0)} = \phi y$. Per trovare il valore di $Z^{(y,0)}$, il quale non è dato dalla ſerie propoſta, facciamo nella equazione del problema $x = 1$, ed avremo $Z^{(y,1)} = Z^{(y-1,1)} + Z^{(y,0)}$. Ora è facile il vedere, come nel Problema I., che ſarà $Z^{(y,1)} = 0$ ſe y è zero o negativa. Quindi ſarà $Z^{(1,0)} = Z^{(1,1)} - Z^{(0,1)} = 1$, $Z^{(2,0)} = Z^{(2,1)} - Z^{(1,1)} = 0$, e così tutti gli altri valori di $Z^{(y,0)} = 0$, fuorchè il ſolo $Z^{(1,0)}$. Dunque la ricercata funzione $Z^{(y,x)} =$ a quel termine che nella ſerie è coefficiente di $\phi 1$. Sia $m + 2$ il poſto che occupa nella ſerie queſto termine, cioè ſia $A^{(m+1)}$ il coefficiente di $\phi . 1$, ed avremo $y - \frac{x(x-1)}{2} - m - 1 = 1$, cioè $m + 1 = y - \frac{x(x-1)}{2} - 1$. Se adeſſo eſprimiamo col ſegno Sx^m la ſomma della ſerie $1 + 2^m + 3^m + \ldots + x^m$, ſarà il termine generale cercato

$$Z^{(y,x)} = \frac{Sx^{y-x(x-1):2-1}}{y - \frac{x(x-1)}{2} - 1} + Sx.\frac{Sx^{y-x(x-1):1-2}}{y - \frac{x(x-1)}{2} - 1} + \left(\frac{Sx^2}{2}\right.$$

$$+ Sx.\frac{Sx}{2}\Big)\frac{Sx^{y-x(x-1):2-3}}{y-\frac{x(x-1)}{2}-1}+\Big(\frac{Sx^3}{3}+Sx.\frac{Sx^2}{3}+\Big(\frac{Sx^2}{2}$$

$$+ Sx.\frac{Sx}{2}\Big)\frac{Sx}{3}\Big)\frac{Sx^{y-x(x-1):2-4}}{y-\frac{x(x-1)}{2}-1}+\text{ecc.}$$

nella quale eſpreſſione il coefficiente del termine $(m+1)^{esimo}$ ſi trova ponendo ne' termini precedenti $y-\frac{x(x-1)}{2}-1=m$.

Supponghiamo per eſempio che ſi voglia ſapere, qual termine corriſponda ad $x=3$, $y=8$, cioè il valore di $Z^{(8,3)}$; avremo

$$Z^{(8,3)}=\frac{Sx^4}{4}+Sx.\frac{Sx^3}{4}+\Big(\frac{Sx^2}{2}+Sx.\frac{Sx}{2}\Big)\frac{Sx^2}{4}+\Big(\frac{Sx^3}{3}$$

$$+Sx.\frac{Sx^2}{3}+\Big(\frac{Sx^2}{2}+Sx.\frac{Sx}{2}\Big)\frac{Sx}{3}\Big)\frac{Sx}{4}=\frac{98}{4}+\frac{6.36}{4}$$

$$+(7+18)\frac{14}{4}+\big(12+2.14+(7+18)2\big)\frac{6}{4}$$

$$=\frac{1204}{4}=301 \text{ come nella figura.}$$

PROBLEMA III.

10. *Trovare il termine generale della ſerie*

	1	2	3	4	5	6	7 . . . . y
1	1	2	4	8	16	32	64
2	1	5	16	44	112	272	640
3	1	9	45	171	558	1656	4610
4	1	14	103	540	2295	8478	29379 . . . .
:							
x							

La legge, che oſſervano tra di loro i termini di queſta ſerie, è eſpreſſa dall' equazione

$$Z^{(y,x)}=2Z^{(y-1,x)}+Z^{(y,x-1)}+(x-1)Z^{(y-1,x-1)}$$

$$+\frac{(x-1)(x-2)}{2}Z^{(y-2,x-1)}+\ldots+Z^{(y-x+1,x)}$$

In

In queſta equazione non ſolo ſono variabili le differenze di y, ma è ancora variabile il numero de' termini. Facciamo $Z^{(y\,,\,x)} = b^y \nabla\alpha_x$, e ſoſtituendo avremo

$$\alpha_x = 2b^{-1}\alpha_x + 1 + (x-1)b^{-1} + \frac{(x-1)(x-2)}{2}b^{-2} + \ldots + b^{-x+1}$$

cioè $\alpha_x = \frac{(1+b^{-1})^{x-1}}{1-2b^{-1}}$, e $\nabla\alpha_x = \frac{(1+b^{-1})^{x(x-1):2}}{(1-2b^{-1})^x}$. Sia

$$\frac{(1+b^{-1})^{x(x-1):2}}{(1-2b^{-1})^x} = 1 + A'b^{-1} + A''b^{-2} + A'''b^{-3} + \text{ecc.}$$

e differenziando logaritmicamente avremo

$$\frac{x(x-1)}{2(1+b^{-1})} + \frac{2x}{1-2b^{-1}} = \frac{A' + 2A''b^{-1} + 3A'''b^{-2} + \text{ecc.}}{1 + A'b^{-1} + A''b^{-2} + A'''b^{-3} + \text{ecc.}}$$

Ma riducendo in ſerie il primo membro abbiamo

$$\frac{x(x-1)}{2(1+b^{-1})} + \frac{2x}{1-2b^{-1}} = \frac{x(x-1)}{2}(1 - b^{-1} + b^{-2} - b^{-3} + \text{ecc.})$$
$$+ 2x(1 + 2b^{-1} + 4b^{-2} + 8b^{-3} + \text{ecc.})$$
$$= \frac{x(x+3)}{2} - \frac{x(x-9)}{2}b^{-1} + \frac{x(x+15)}{2}b^{-2}$$

$- \frac{x(x-33)}{2}b^{-3} + \text{ecc.}$ Dunque (2) $r = \frac{x(x+3)}{2}$,

$r' = -\frac{x(x-9)}{2}$, $r'' = \frac{x(x+15)}{2}$, e generalmente

$r^{(m)} = \pm\frac{x(x \pm 2^{m+2} - 1)}{2}$, ove il ſegno ſuperiore vale nel caſo di m pari, l' inferiore nel caſo di m diſpari. Quindi avremo

$$A' = \frac{x(x+3)}{2}$$

$$A'' = -\frac{x(x-9)}{2} + \frac{x(x+3)}{2} \cdot \frac{x(x+3)}{2.2}$$

e in generale

$$A^{(m-1)} = \pm\frac{x(x \pm 2^m - 1)}{2(m-1)} + \frac{x(x + 2^2 - 1)}{2} \cdot \mp \frac{x(x \mp 2^{m-1} - 1)}{2(m-1)}$$

$$+\left(-\frac{x(x-2^3-1)}{2.2}+\frac{x(x+2^2-1)}{2}.\frac{x(x+2^2-1)}{2.2}\right)$$

$$\pm\frac{x(x\pm 2^{m-2}-1)}{2(m-1)}+\left(\frac{x(x+2^4-1)}{2.3}+\frac{x(x+2^2-1)}{2}\right.$$

$$.-\frac{x(x-2^3-1)}{2.3}+\left(-\frac{x(x-2^3-1)}{2.2}\right.$$

$$\left.\left.+\frac{x(x+2^2-1)}{2}.\frac{x(x+2^2-1)}{2.2}\right)\frac{x(x+2^2-1)}{2.3}\right)$$

$$\mp\frac{x(x\mp 2^{m-3}-1)}{2(m-1)}+\text{ecc.}$$

Determinate in queſta maniera le quantità A', A'', ecc., avremo

$Z^{(y,x)}=\phi y+A'\phi(y-1)+A''\phi(y-2)+A'''\phi(y-3)+$ ecc.

Facendo $x=0$, abbiamo $A'=A''=$ ecc. $=0$; dunque $\phi y=Z^{(y,0)}$. Per trovare il valore di queſta funzione, ponghiamo nella equazione del problema $y=1$, 2, 3, ecc.; $x=2$, 3, ecc.; ed avremo

$$Z^{(1,2)}=2Z^{(0,2)}+Z^{(1,1)}+Z^{(0,2)}$$
$$Z^{(2,3)}=2Z^{(1,3)}+Z^{(2,2)}+2Z^{(1,2)}+Z^{(0,2)}$$
ecc.

Quindi $Z^{(0,1)}=-2Z^{(0,2)}$, e $Z^{(0,2)}=0$, e così in generale $Z^{(0,x)}=0$. Adeſſo facendo $y=0$, 1, ecc.; $x=2$, 3, ecc. ſarà

$$Z^{(0,2)}=2Z^{(-1,2)}+Z^{(0,1)}+Z^{(-1,1)}$$
$$Z^{(1,3)}=2Z^{(0\ 3)}+Z^{(1,2)}+2Z^{(0,2)}+Z^{(-1,2)}$$
ecc.

e perciò $Z^{(-1,1)}=-2Z^{(-1,2)}$, $Z^{(-1,2)}=0$, e generalmente $Z^{(-1,x)}=0$. Nell' iſteſſa maniera ſi vedrà, che $Z^{(y,1)}$ e ſempre $=0$ nel caſo di y negativa. Ponghiamo adeſſo nella equazione propoſta $x=1$, ed avremo $Z^{(y,1)}=2Z^{(y-1,1)}+Z^{(y,0)}$: dunque $Z^{(y,0)}$ è $=1$ nel ſolo caſo di $y=1$; negli altri caſi $Z^{(y,0)}=0$, e perciò $Z^{(y,x)}$ è $=$ al coefficiente di $\phi.1$. Sia $A^{(m-1)}$ queſto coefficiente, avremo $y-m+1=1$, cioè $m=y$. Quindi ſarà

$$Z^{(y,x)}=\pm\frac{x(x\pm 2^y-1)}{2(y-1)}+\frac{x(x+2^2-1)}{2}\mp\frac{x(x\mp 2^{y-1}-1)}{2(y-1)}$$

$$+\left(-\frac{x(x-2^3-1)}{2.2}+\frac{x(x+2^2-1)}{2}.\frac{x(x+2^2-1)}{2.2}\right)$$
$$\pm\frac{x(x\pm 2^{y-2}-1)}{2(y-1)}+\left(\frac{x(x+2^4-1)}{2.3}+\frac{x(x+2^2-1)}{2}\right.$$
$$.-\frac{x(x-2^3-1)}{2.3}+\left(-\frac{x(x-2^3-1)}{2.2}+\frac{x(x+2^2-1)}{2}\right.$$
$$\left.\left..\frac{x(x+2^2-1)}{2.2}\right)\frac{x(x+2^2-1)}{2.3}\right)\mp\frac{x(x\mp 2^{y-3}-1)}{2(y-1)}\quad+\text{ecc.}$$

Di queſta ſerie ſi devono prender $y-1$ termini; la ſerie poi è tale, che ſi ottiene il coefficiente del ſecondo termine facendo nel primo $y=2$, il coefficiente del terzo facendo nel primo e nel ſecondo $y=3$, ecc. Il ſegno ſuperiore ſi prende ſe y è pari, l' inferiore ſe y, è diſpari.

Cerchiamo per eſempio il termine quinto della quarta fila, cioè quello che corriſponde ad $y=5$, $x=4$; avremo

$$z^{(5,4)}=\frac{29}{2}+\frac{14.19}{2}+(5+14.7)\frac{5}{2}+\left(\frac{38}{3}+\frac{14.10}{3}\right.$$
$$\left.+(5+14.7)\frac{14}{3}\right)\frac{7}{2}=2295.$$

ARTICOLO II.

Rifleſſioni intorno ai metodi dei Signori de la Grange *e* de la Place *per integrare l' equazioni a differenze finite e parziali.*

11. In queſto articolo io mi ſon propoſto di moſtrare qual rapporto abbia il mio metodo con quello del Sig. *de la Grange*, il quale me ne ha fatta naſcere l' idea; come ancora di far vedere, che il metodo del Sig. *de la Place* può applicarſi felicemente a quella ſpecie di equazioni, che abbiamo nell' articolo precedente conſiderate. Si abbia adunque l' equazione

$$z^{(y,x)}=Az^{(y-1,x)}+Bz^{(y-2,x)}+Cz^{(y-3,x)}+\ldots+Mz^{(y-n,x)}$$
$$+A'z^{(y,x-1)}+B'z^{(y-1,x-1)}+C'z^{(y-2,x-1)}+\ldots.$$
$$+M'z^{(y-n,x-1)}$$

Supponghiamo $z^{(y,x)}=b^y\phi.x$, ove ϕx eſprime una funzione di x, b è una quantità coſtante. Soſtituito queſto valore avremo dividendo per b^y

$$(1 - Ab^{-1} - Bb^{-2} - Cb^{-3} - \ldots\ldots - Mb^{-n})\,\phi x$$
$$= (A' + B'b^{-1} + C'b^{-2} + \ldots\ldots + M'b^{-n})\,\phi(x-1).$$

Queſta è una equazione a differenze ordinarie, l' integrazione della quale ci darà il valore di ϕx. Ora ſe A, B, ecc. A', B', ecc. ſono quantità coſtanti, ed n ſimilmente è coſtante, ſarà $\phi . x = \alpha^x$, e per determinare la quantità coſtante α avremo l' equazione

$$(1 - Ab^{-1} - Bb^{-2} - \ldots - Mb^{-n})\,\alpha = A' + B'b^{-1} + C'b^{-2} + \ldots + M'b^{-n}.$$

Queſto è il caſo, che conſidera il Sig. *de la Grange*, e da ciò che abbiamo detto appariſce l' origine della ſoſtituzione che egli adopra, cioè $Z^{(y,x)} = m\alpha^x b^y$.

12. Ma ſe n è una funzione di x, come nel noſtro caſo, allora o ſiano o non ſiano coſtanti le quantità A, B, ecc. A', B', ecc. ſiccome i coefficienti della equazione precedente ſono variabili, ſarà com' è noto $\phi x = \nabla \alpha_x$, eſſendo α_x una funzione di x, per determinar la quale avremo l' equazione

$$(1 - Ab^{-1} - Bb^{-2} - \ldots - Mb^{-n})\,\alpha_x = A' + B'b^{-1} + \ldots + M'b^{-n}.$$

Ed ecco l' origine di quella ſoſtituzione, che abbiamo uſata di ſopra, cioè $Z^{(y,x)} = mb^y \nabla \alpha_x$.

13. Se poi ſarà n coſtante, ma le quantità A, B, ecc. ſaranno funzioni di x, avremo di nuovo $\phi . x = \nabla \alpha_x$, e la noſtra ſoſtituzione condurrà felicemente alla integrazione dell' equazioni a differenze finite e parziali e a coefficienti variabili. Convien però intendere dell' equazioni ſimili nella forma a quella del n°. 11, nella quale la variabile x in ciaſcun termine non varia che di una unità. Perchè per l' equazioni de' gradi ſuperiori, $\phi . x$ ſarebbe data da una equazione a differenze ordinarie de' gradi ſuperiori, la quale com' è noto non ſi integrarſi, che in alcuni caſi particolari. Ma con ulteriori artifizj ſi potrà anche ſuperare queſta difficoltà, e partendo dalla ſuppoſizione, $Z^{(y,x)} = b^y \phi x$ giungere

alla integrazione generale di queſt' equazioni. Noi ci riſerbiamo un' altra volta a continuare queſte rifleſſioni, perchè l' integrazione di quell' equazioni, che abbiamo nell' articolo primo conſiderate, ci baſta per l' oggetto principale, il quale ci ſiamo propoſto in queſte ricerche, cioè per riſolvere i problemi relativi alla *partizione de' numeri*. Solo avvertiremo, che queſte poche oſſervazioni ſembra che diano intanto una maggior generalità all' elegantiſſimo metodo del Sig. *de la Grange*.

14. Il metodo del Sig. *de la Place* può applicarſi a quell' equazioni, che abbiamo di ſopra trattate. Si abbia per eſempio l' equazione

$$(a)\quad Z^{(y,x)} = A_x Z^{(y-1,x)} + B_x Z^{(y-x,x-1)}$$

e quello che diremo di queſta equazione potrà a qualunque altra applicarſi. Eliminiamo da queſta equazione il termine $Z^{(y-x,x-1)}$, e ſiccome abbiamo

$$B_x Z^{(y-x,x-1)} = B_x A_{x-1} Z^{(y-x-1,x-1)} + B_x B_{x-1} Z^{(y-2x+1,x-2)}$$

ſoſtituendo avremo

$$(b)\quad \begin{aligned} &Z^{(y,x)} - A_x Z^{(y-1,x)} \\ &- A_{x-1}\left(Z^{(y-1,x)} - A_x Z^{(y-2,x)}\right) \end{aligned} = B_x B_{x-1} Z^{(y-2x+1,x-2)}$$

Si oſſervi, che ſe il ſecondo membro di queſta equazione foſſe $=0$, il primo rappreſenterebbe una equazione a differenze ordinarie; onde ponendo $Z^{(y,x)} = f^y$, e dividendo per f^y ſi avrebbe $1 - \frac{A_x}{f} - \frac{A_{x-1}}{f}\left(1 - \frac{A_x}{f}\right) = \left(1 - \frac{A_x}{f}\right)\left(1 - \frac{A_{x-1}}{f}\right) = 0$, cioè ſarebbe $f = A_x$, $f = A_{x-1}$, e $Z^{(y,x)} = mA_x^y + m'A_{x-1}^y$, ove m ed m' ſono funzioni di x, perchè x ſi è ſuppoſta coſtante.

Eliminiamo adeſſo dalla equazione (b) il termine $Z^{(y-2x+1,x-2)}$, e ſiccome abbiamo dalla equazione (a)

$$B_x . B_{x-1} Z^{(y-2x+1,x-2)} = B_x . B_{x-1} . A_{x-2} Z^{(y-2x,x-2)}$$

$$+B_{x} \cdot B_{x-2} \,.\, B_{x-2}\, Z^{(y-3x+2,\,x-3)}$$

ſoſtituendo avremo

$$(c)\quad Z^{(y,x)} - A_{x}\, Z^{(y-2,x)} = B_{x} \,.\, B_{x-1} \,.\, B_{x-1} \,.\, Z^{(y-3x+2,\,x-3)}$$
$$- A_{x-1}\left(Z^{(y-1,x)} - A_{x}\, Z^{(y-2,x)}\right)$$
$$- A_{x-2}\left(Z^{(y-1,x)} - A_{x}\, Z^{(y-2,x)} - A_{x-1}\left(Z^{(y-2,x)} - A_{x}\, Z^{(y-3,x)}\right)\right)$$

Qui pure, ſe il ſecondo membro foſſe $=0$, avremmo ſoſtituendo nel primo f^{y} in luogo di $Z^{(y,x)}$, avremmo io dico $\left(1-\frac{A_{x}}{f}\right)\left(1-\frac{A_{x-1}}{f}\right)\left(1-\frac{A_{x-2}}{f}\right)=0$; dunque ſarebbe $Z^{(y,x)} = mA^{y}_{x} + m'A^{y}_{x-1} + m''A^{y}_{x-2}$.

Seguitando ad eliminare nella iſteſſa maniera, troveremo finalmente

$$Z^{(y,x)} - A_{x}\, Z^{(y-1,x)} = B_{x} \,.\, B_{x-1} \ldots . B_{2}\, Z^{(y-\text{ecc.},\,1)}$$
$$- A_{x-1}\left(Z^{(y-1,x)} - A_{x}\, Z^{(y-2.x)}\right)$$
$$-\text{ecc.}$$

e ſoſtituendo nel primo membro f^{y} in luogo di $Z^{(y,x)}$, e dividendo per f^{y}, eſſo diventerà $\left(1-\frac{A_{x}}{f}\right)\left(1-\frac{A_{x-1}}{f}\right)\left(1-\frac{A_{x-2}}{f}\right)\ldots\left(1-\frac{A_{2}}{f}\right)$. Ora ſupponghiamo che la funzione $Z^{(y,1)}$ ſia data dalla equazione $Z^{(y,2)} = CZ^{(y-1,1)}$ ed avremo dopo di aver fatto le ſoſtituzioni opportune $\left(1-\frac{A_{x}}{f}\right)\left(1-\frac{A_{x-1}}{f}\right)\left(1-\frac{A_{x-1}}{f}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{A_{2}}{f}\right) = \frac{C}{f}\left(1-\frac{A_{x}}{f}\right)\ldots\left(1-\frac{A_{2}}{f}\right)$, cioè $\left(1-\frac{C}{f}\right)$

$\left(1-\frac{A_2}{f}\right)\left(1-\frac{A_3}{f}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{A_x}{f}\right)=0$. Dunque $f=C$, $=A_2$, $=A_3\ldots=A_x$, e l' integrale della equazione propoſta $Z^{(y,x)}=mC^y+m'A_2^y+\ldots+m^{(x)}A_x^y$. Le quantità m, m' ecc. ſono funzioni di x, per determinar le quali ſi ſoſtituirà nella equazione propoſta il valore trovato di $Z^{(y,x)}$.

15. E' chiaro che l' iſteſſo può dirſi di qualunque equazione: cioè ſarà l' integrale di eſſa $Z^{(y,x)}=mf^y+m'f'^y$ $m''f''^y+$ ecc. Per trovare le quantità f, f', f'', ecc. ſi prendano dall'equazione data quei termini, che ſono funzioni di x, laſciando da parte quei che ſono funzioni di $x-1$. Si ponga in quelli $Z^{(y,x)}=f^y$, e dividendo per f^y ſi faccia x ſucceſſivamente $=1, 2, 3, \ldots x$; dalle quantità che ne naſceranno uguagliate a zero ſi prendano i valori di f, che ſaranno i ricercati valori di f, f', f'', ecc. Le funzioni m, m', m'', ecc. ſi determineranno ſoſtituendo l' integrale trovato nella equazione data. Ho ſuppoſto che nella equazione propoſta non vi ſiano che le funzioni di x, e di $x-1$: ma il metodo è generale per qualunque caſo. Si veda la Memoria del Sig. *de la Place*

16. Per applicare queſto metodo a qualche caſo particolare, prendiamo ad integrare l' equazione del n°. 6, dove abbiamo $Z^{(y,1)}=Z^{(y-1,1)}$, e

$$Z^{(y,x)}=Z^{(y-1,x)}+Z^{(y-x+2,x-1)}$$

Ne' due termini $Z^{(y,x)}-Z^{(y-1,x)}$ facciamo $Z^{(y,x)}=f^{y-1}$, e dividendo per f^{y-1} avremo $1-\frac{1}{f}$; ſoſtituiamo in queſta quantità $1, 2, 3\ldots x$ in luogo di x, ed avremo $\left(1-\frac{1}{f}\right)^x$ per determinare f. Queſta equazione dà x valori di f uguali all' unità; dunque l' integrale ſarà della forma

$$Z^{(y,x)}=A_x\frac{(y-1)(y-2)\ldots(y-x+1)}{1.2\ldots(x-1)}+B_x\frac{(y-1)(y-2)\ldots(y-x+2)}{1.2\ldots(x-2)}$$

$+C_x \frac{(y-1)(y-2)\ldots(y-x+3)}{1.2\ldots(x-3)}+$ ecc. (Si vedano le Memorie de' Signori *de la Place* e *de la Grange*).

Per determinare le funzioni A_x, B_x, ecc. foſtituiamo il valore di $Z^{(y,x)}$ nella equazione data, ed avremo

$$A_x \frac{(y-1)(y-2)\ldots(y-x+1)}{1.2\ldots(x-1)}+B_x \frac{(y-1)(y-2)\ldots(y-x+2)}{1.2\ldots(x-2)}$$

$$+C_x \frac{(y-1)(y-2)\ldots(y-x+3)}{1.2\ldots(x-3)}+\text{ecc.}$$

$$=A_x \frac{(y-2)(y-3)\ldots(y-x)}{1.2\ldots(x-1)}+B_x \frac{(y-2)(y-3)\ldots(y-x+1)}{1.2\ldots(x-2)}$$

$$+C_x \frac{(y-2)(y-3)\ldots(y-x+2)}{1.2\ldots(x-3)}+\text{ecc.}$$

$$+A_{x-1} \frac{(y-x+1)\ldots(y-2x+4)}{1\ldots(x-2)}+B_{x-1} \frac{(y-x+1)\ldots(y-2x+5)}{1\ldots(x-3)}$$

$+C_{x-1} \frac{(y-x+1)\ldots(y-2x+6)}{1\ldots(x-4)}+$ ecc. Ma è evidente che

$$\frac{(y-1)\ldots(y-x+1)}{1\ldots(x-1)}=\frac{(y-2)\ldots(y-x)}{1\ldots(x-1)}+\frac{(y-2)\ldots(y-x+1)}{1\ldots(x-2)},$$

così pure $\frac{(y-1)\ldots(y-x+2)}{1\ldots(x-2)}=\frac{(y-2)\ldots(y-x+1)}{1\ldots(x-2)}$

$+\frac{(y-2)\ldots(y-x+2)}{1\ldots(x-3)}$; ecc. Dunque foſtituendo queſti valori avremo

$$A_x \frac{(y-2)\ldots(y-x+1)}{1\ldots(x-2)}+B_x \frac{(y-2)\ldots(y-x+2)}{1\ldots(x-3)}$$

$$+C_x \frac{(y-2)\ldots(y-x+3)}{1\ldots(x-4)}+\text{ecc.}$$

$$=A_{x-1}$$

$$= A_{x-1} \frac{(y-x+1)\ldots(y-2x+4)}{1\ldots\ldots(x-2)} + B_{x-1} \frac{(y-x+1)\ldots(y-2x+5)}{1\ldots\ldots(x-3)}$$

$$+ C_{x-1} \frac{(y-x+1)\ldots\ldots(y-2x+6)}{1\ldots\ldots(x-4)} + \text{ecc.}$$

Ora è facile il vedere che

$$\frac{(y-2)\ldots\ldots(y-x+1)}{1\ldots\ldots(x-2)} = \frac{(y-x+1)\ldots\ldots(y-2x+4)}{1\ldots\ldots(x-2)}$$

$$+ (x-3)\frac{(y-x+1)\ldots\ldots(y-2x+5)}{1\ldots\ldots(x-3)}$$

$$+ \frac{(x-3)(x-4)}{2} \cdot \frac{(y-x+1)\ldots\ldots(y-2x+6)}{1\ldots\ldots(x-4)}$$

$$+ \frac{(x-3)(x-4)(x-5)}{2.3} \cdot \frac{(y-x+1)\ldots\ldots(y-2x+7)}{1\ldots\ldots(x-5)} + \text{ecc.}$$

Similmente $\frac{(y-2)\ldots\ldots(y-x+2)}{1\ldots\ldots(x-3)} = \frac{(y-x+1)\ldots(y-2x+5)}{1\ldots\ldots(x-3)}$

$$+ (x-3)\frac{(y-x+1)\ldots\ldots(y-2x+6)}{1\ldots\ldots(x-4)}$$

$$+ \frac{(x-3)(x-4)}{2} \cdot \frac{(y-x+1)\ldots\ldots(y-2x+7)}{1\ldots\ldots(x-5)} + \text{ecc.} ;$$

e così in ſeguito. Soſtituendo tutti queſti valori avremo

$$A_x \frac{(y-x+1)\ldots(y-2x+4)}{1\ldots\ldots(x-2)} + (x-3)\,A_x \frac{(y-x+1)\ldots(y-2x+5)}{1\ldots\ldots(x-3)}$$

$$+ \frac{(x-3)(x-4)}{2}\,A_x \frac{(y-x+1)\ldots\ldots(y-2x+6)}{1\ldots\ldots(x-4)} + \text{ecc.}$$

$$+ B_x \frac{(y-x+1)\ldots(y-2x+5)}{1\ldots\ldots(x-3)} + (x-3)B_x \frac{(y-x+1)\ldots(y-2x+6)}{1\ldots\ldots(x-4)} + \text{ecc.}$$

$$+ C_x \frac{(y-x+1)\ldots\ldots(y-2x+6)}{1\ldots\ldots(x-4)} + \text{ecc.}$$

$$= A_{x-1} \frac{(y-x+1)\ldots(y-2x+4)}{1\ldots(x-2)} + B_{x-1} \frac{(y-x+1)\ldots(y-2x+5)}{1\ldots(x-3)}$$

$+C_{x-2}\frac{(y-x+1)\ldots(y-2x+6)}{1\ldots(x-4)}+$ ecc. Quindi ſarà

$$A_x-A_{x-1}=0,\ B_x-B_{x-1}=-(x-3)A_x,$$

$$C_x-C_{x-1}=-\frac{(x-3)(x-4)}{2}A_x-(x-3)B_x,$$

$$D_x-D_{x-1}=-\frac{(x-3)(x-4)(x-5)}{2.3}A_x$$

$$-\frac{(x-3)(x-4)}{2}B_x-(x-3)C_x;$$ ecc. Convien dunque integrare queſt' equazioni; ora ſi oſſervi che la prima non comincia ad aver luogo, che quando x è maggiore di 1; la ſeconda non ha luogo che quando x è maggiore di 2, e così delle altre. Poſto queſto la prima equazione ci dà $A_x=$ Coſt. Per determinar queſta coſtante facciamo $x=1$, ed avremo $Z^{(y,1)}=A_x=$ Coſt; ma ponendo $y=1$ abbiamo $Z^{(1,1)}=1$; dunque $A_x=1$. La ſeconda equazione $B_x-B_{x-1}=-(x-3)$ integrata ci dà $B_x=-\frac{(x-3)(x-2)}{2}+$ Coſt. Per determinar la coſtante facciamo nell' integrale $x=2$, ed avremo $Z^{(y,2)}=y-1+$ Coſt; e ponendo $y=1$, abbiamo $Z^{(1,2)}=1=1-1+$ Coſt; dunque $B_x=1-\frac{(x-3)(x-2)}{2}$. Nell' iſteſſo modo troveremo $C_x=\frac{(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)}{2.4}$, e così delle altre.

Ma ſiccome non ſi vede baſtantemente la legge, che oſſervano tra di loro le funzioni A_x, B_x, C_x, ecc. cerchiamo un' altra maniera di eſprimere l' integrale dell' equazione data. Queſto integrale può eſſere ancora della forma ſeguente

$$Z^{(y,x)} = A_x \frac{(y-X)(y-X-1)\dots(y-X-x+2)}{1\;.\;2\dots\dots(x-1)} + B_x \frac{(y-X)(y-X-1)\dots(y-X-x+3)}{1\;.\;2\dots\dots(x-2)} + \text{ecc.}$$

ove X è una funzione di x, che determineremo in appreſſo. Si ſoſtituiſca nella equazione data queſto valore di $Z^{(y,x)}$, e ſi avrà

$$\begin{aligned} & A_x \frac{(y-X)(y-X-1)\dots(y-X-x+2)}{1\;.\;2\dots\dots(x-1)} \\ & + B_x \frac{(y-X)(y-X-1)\dots(y-X-x+3)}{1\;.\;2\dots\dots(x-2)} + \text{ecc.} \\ & = A_x \frac{(y-X-1)(y-X-2)\dots(y-X-x+1)}{1\;.\;2\dots\dots(x-1)} \\ & + B_x \frac{(y-X-1)(y-X-2)\dots(y-X-x+2)}{1\;.\;2\dots\dots(x-2)} + \text{ecc.} \\ & + A_{x-1} \frac{(y-X'-x+2)\dots(y-X'-2x+5)}{1\dots\dots(x-2)} \\ & + B_{x-1} \frac{(y-X'-x+2)\dots(y-X'-2x+6)}{1\dots\dots(x-3)} + \text{ecc.} \end{aligned}$$

ove X' è ciò che diventa X ponendovi $x-1$ in luogo di x. Ma abbiamo

$$\begin{aligned} & \frac{(y-X)\dots(y-X-x+2)}{1\dots\dots(x-1)} = \frac{(y-X-1)\dots(y-X-x+1)}{1\dots\dots(x-1)} \\ & + \frac{(y-X-1)\dots(y-X-x+2)}{1\dots(x-2)}, \quad \frac{(y-X)\dots(y-X-x+3)}{1\dots(x-2)} \\ & = \frac{(y-X-1)\dots(y-X-x+2)}{1\dots(x-2)} + \frac{(y-X-1)\dots(y-X-x+3)}{1\dots(x-3)}, \\ & \qquad \text{ecc.} \end{aligned}$$

Dunque ſoſtituendo queſti valori ſarà

$$A_x \frac{(y-X-1)\ldots(y-X-x+2)}{1\ldots\ldots(x-2)} + B_x \frac{(y-X-1)\ldots(y-X-x+3)}{1\ldots\ldots(x-3)}$$

$$+ C_x \frac{(y-X-1)\ldots\ldots(y-X-x+4)}{1\ldots\ldots\ldots(x-4)} + \text{ecc.}$$

$$= A_{x-1} \frac{(y-X'-x+2)\ldots\ldots(y-X'-2x+5)}{1\ldots\ldots\ldots(x-2)}$$

$$+ B_{x-1} \frac{(y-X'-x+2)\ldots\ldots(y-X'-2x+6)}{1\ldots\ldots\ldots\ldots(x-3)} + \text{ecc.}$$

Siccome X è una funzione indeterminata, determiniamola in modo, che ſia $y-X-1=y-X'-x+2$, cioè $X-X'=x-3$, e integrando ſarà $X=\frac{(x-2)(x-3)}{2}$. Adeſſo paragonando i termini omologi avremo $A_x=A_{x-1}$, $B_x=B_{x-1}$, $C_x=C_{x-1}$, ecc. dunque tutte le funzioni A_x, B_x, ecc. ſono in queſto caſo quantità coſtanti. Per determinare il valore di queſte coſtanti, le quali chiameremo reſpettivamente A, B, C, ecc. ſupponghiamo in primo luogo $x=1$, ed avremo $Z^{(y,1)}=A$, e nel caſo di $y=1$ eſſendo $Z^{(1,1)}=1$, ſarà $A=1$. Sia adeſſo $x=2$, e ſarà $Z^{(0,2)}=y+B$; ma facendo $y=1$ abbiamo $Z^{(1,2)}=1=1+B$; dunque $B=0$. Sia $x=3$, ſarà $Z^{(y,3)}=\frac{y(y-1)}{2}+C$, e quindi $Z^{(1,3)}=0=C$. Nella medeſima maniera ſi troveranno le altre coſtanti D, E, ecc. uguali a zero. Dunque l' integrale della equazione propoſta ſarà così eſpreſſo:

$$Z^{(y,x)}=\frac{\left(y-\frac{(x-2)(x-3)}{2}\right)\left(y-\frac{(x-2)(x-3)}{2}-1\right)(\ldots)\left(y-\frac{(x-2)(x-3)}{2}-x+2\right)}{1\;.\;2\ldots\ldots\ldots\ldots(x-1)}.$$

la qual formola, quantunque di una forma diverſa, coincide però con le altre trovate di ſopra (6, 7, 8).

17. Cerchiamo adeſſo l' integrazione dell' equazione trattata al n.° 9; cioè la ſeguente

$$Z^{(y,x)} = xZ^{(y-1,x)} + Z^{(y-x+1,x-1)}$$

per la quale si ha $Z^{(y,1)} = Z^{(y-1,1)}$. Ponendo ne' due termini $Z^{(y,x)} - xZ^{(y-1,x)}$ la quantità f^{y-X} in luogo di $Z^{(y,x)}$, e dividendo per f^{y-X} avremo $1 - \frac{x}{f}$, e $\nabla(1 - \frac{x}{f}) = (1 - \frac{1}{f})(1 - \frac{2}{f})(1 - \frac{3}{f}) \ldots (1 - \frac{x}{f})$. Questa quantità posta $= 0$ ci darà per f i valori $1, 2, 3, \ldots x$. Dunque l' integrale cercato sarà della forma

$$Z^{(y,x)} = A_x + B_x 2^{y-X} + C_x 3^{y-X} + D_x 4^{y-X} + \text{ecc.}$$

Sostituendo questo valore nella equazione proposta, essa diventerà

$$A_x + B_x 2^{y-X} + C_x 3^{y-X} + D_x 4^{y-X} + \text{ecc.}$$

$$= xA_x + xB_x 2^{y-X-1} + xC_x 3^{y-X-1} + xD_x 4^{y-X-1} + \text{ecc.}$$

$$+ A_{x-1} + B_{x-1} 2^{y-x-X'+1} + C_{x-1} 3^{y-x-X'+1}$$

$$+ D_{x-1} 4^{y-x-X'+1} + \text{ecc.}$$

cioè

$$(1-x)A_x + (2-x)B_x 2^{y-X-1} + (3-x)C_x 3^{y-X-1} + \text{ecc.}$$

$$= A_{x-1} + B_{x-1} 2^{y-x-X'+1} + C_{x-1} 3^{y-x-X'+1} + \text{ecc.}$$

Per determinare X, facciamo $y - X - 1 = y - x - X' + 1$, cioè $X - X' = x - 2$, e integrando avremo $X = \frac{(x-1)(x-2)}{2}$. Adesso paragonando i termini omologi avremo l' equazioni,

$(1-x)A_x = A_{x-1}$, $(2-x)B_x = B_{x-1}$, $(3-x)C_x = C_{x-1}$, ecc.

Sia A il valore di A_x, quando $x=1$, e dall' equazione $A_x = \frac{-1.A_{x-1}}{x-1}$ avremo $A_2 = \frac{-1.A}{1}$, $A_3 = \frac{-1.A_2}{2} = \frac{(-1)^2 A}{1.2}$; così $A_4 = \frac{(-1)^3 A}{1.2.3}$, e generalmente $A_x = \frac{(-1)^{x-1}.A}{1.2.3...(x-1)}$. Sia B il valore di B_x quando $x=2$, e l' equazione $B_x = \frac{-1.B_{x-1}}{x-2}$ ci darà $B_3 = \frac{-1.B}{1}$, $B_4 = \frac{-1.B_3}{2} = \frac{(-1)^2.B}{1.2}$, $B_5 = \frac{(-1)^3 B}{1.2.3}$, ed in generale $B_x = \frac{(-1)^{x-2}.B}{1.2.3...(x-2)}$. Similmente ſi troverà $C_x = \frac{(-1)^{x-3}.C}{1.2.3...(x-3)}$, $D_x = \frac{(-1)^{x-4}.D}{1.2.3...(x-4)}$, ove $C=C_x$ poſto $x=3$, e $D=D_x$ poſtovi $x=4$. Adeſſo per determinare le coſtanti A, B, C, ecc. facciamo nell' integrale $x=1$, ed avremo $Z^{(y,1)} = A$, e ponendo $y=1$, $A = Z^{(1,1)} = 1$; onde $A_x = \frac{(-1)^{x-1}}{1.2.3...(x-1)}$. Ponghiamo $x=2$, ed avremo $Z^{(y,2)} = -1 + B2^y$, e facendo $y=2$, $Z^{(2,2)} = 1 = -1 + 4B$, cioè $B = \frac{1}{2}$, e $B_x = \frac{(-1)^{x-2}}{2.1.2...(x-2)}$. Poſto $x=3$, ſarà $Z^{(y,3)} = \frac{1}{2} - \frac{1.2^{y-2}}{1} + C3^{y-1}$, e facendo $y=3$,

$Z^{(3,3)} = 0 = \frac{1}{2} - 2 + 9C$, cioè $C = \frac{1}{2.3}$, e

$C_x = \frac{(-1)^{x-3}}{2.3.1.2...(x-3)}$. Così ſi troverà

$D_x = \frac{(-1)^{x-4}}{2.3.4.1.2...(x-4)}$, ecc. Dunque l' integrale cercato ſarà

$$Z^{(y,x)} = \frac{(-1)^{x-1}}{1.2.3...(x-1)} + \frac{(-1)^{x-2}}{2.1.2.3...(x-2)} 2^{y-(x-1)(x-2):2}$$

$$+ \frac{(-1)^{x-3}}{2.3.1.2...(x-3)} 3^{y-(x-1)(x-2):2}$$

$$+ \frac{(-1)^{x-4}}{2.3.4.1.2...(x-4)} 4^{y-(x-1)(x-2):2} + \text{ecc.}$$

Sia per eſempio $x = 3$, $y = 8$, ed avremo $Z^{(8,3)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} 2^7 + \frac{1}{6} 3^7 = \frac{1 - 128 + 729}{2} = \frac{602}{2} = 301$, il qual valore combina con quello che abbiamo trovato di ſopra per mezzo dell' altra formola.

Sia $y = 7$, $x = 4$, cioè ſi cerchi il ſettimo termine nella quarta fila della ſerie del n.° 9. Avremo

$$Z^{(7,4)} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{4} 2^4 - \frac{1}{6} 3^4 + \frac{1}{24} 4^4 = -\frac{1}{6} + 4 - \frac{27}{2} + \frac{64}{6}$$

$$= \frac{-1 + 24 - 81 + 64}{6} = 1,$$ come appunto è nella ſerie.

L' introdurre nell' integrale una funzione X da determinarſi poi a piacere, come abbiamo fatto ne' due paſſati Problemi, può eſſer di molta utilità per determinare in varj caſi più ſemplicemente le funzioni della variabile x, che entrano nell' integrale. La ragione poi della ſoſtituzione $Z^{(y,x)} = af^{y-x}$ invece di $Z^{(y,x)} = f^y$, è la ſeguente. Eſſendo $Z^{(y,x)} = af^y$ un integrale particolare di una equazione a differenze finite, nella quale x è coſtante, ſarà a una funzione di x; onde in luogo di a ſi potrà porre af^{-x}, ed allora ſi avrà $Z^{(y,x)} = af^{-x} f^{y} = af^{y-x}$.

ARTICOLO III.

Della partizione de' numeri.

18. I problemi della partizione de' numeri mi hanno condotto a quella ſpecie di equazioni, delle quali ho cercato l' integrale nell' articolo I. Queſti problemi ſono ſtati trattati per la prima volta dal celebre Sig. *Eulero* nella ſua *Introduzione all' analiſi degl' Infiniti*, e ne' *Comentarj dell' Accademia di Pietroburgo*. Egli ha dedotto un metodo ingegnoſiſſimo dalla evoluzione delle funzioni in ſerie, tanto più a ragione ſtimato dal ſuo Autore, perchè, com' ei dice nella *Prefazione* dell' Opera citata, ſembravangli queſti problemi ſenza il ſuo metodo affatto inacceſſibili alle forze dell' aniliſi. Niuno, che io ſappia, ha in ſeguito fatte ulteriori ricerche in queſta materia. Eſaminando direttamente queſti problemi, ho tentato di ridurli alla integrazione di una equazione a differenze finite e parziali; il qual metodo ſembra la regia ſtrada per riſolvere tutt' i problemi, che in qualche modo dipendono dalla dottrina delle combinazioni. Quindi integrando queſt' equazioni, le quali da principio mi preſentarono non ordinarie difficoltà, ſon giunto in una maniera, che ſembrami non affatto inelegante, ad una formola generale, che mi dà la ſoluzione cercata in tutt' i caſi; la qual formola difficilmente rintracciar ſi potrebbe col metodo del Sig. *Eulero*. Queſto io eſporrò ne' ſeguenti problemi, i quali comprendono i diverſi caſi di partizione di numeri.

PROBLEMA IV.

19. *Trovare il numero delle maniere, nelle quali un numero qualunque* y *può eſſer la ſomma di* x *termini della ſerie naturale* 1, 2, 3, 4, ecc., *o uguali o diſuguali tra loro.*

Diſponendo per ordine tutte le maniere, nelle quali il numero y può dividerſi in x parti o uguali o diſuguali, ne naſceranno le ſeguenti ſerie.

$$
\begin{array}{rl}
y = 1+1+1+\dots+1+1+(y-x+1) & \\
\dots\dots\dots\dots+1+2+(y-x) & \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots+3+(y-x-1) & \\
\text{ecc.} & (a) \\
\dots\dots\dots+1+2+2+(y-x-1) & \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots+3+(y-x-2) & \\
\text{ecc.} & \\
\dots\dots\dots+1+3+3+(y-x-3) & \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots+4+(y-x-4) & \\
\text{ecc.} & \\
y = 2+2+2+\dots+2+2+2+(y-2x+2) & \\
\dots\dots\dots\dots+2+3+(y-2x+1) & \\
\dots\dots\dots\dots+2+4+(y-2x) & \\
\text{ecc.} & (b) \\
\dots\dots\dots+2+3+3+(y-2x) & \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots+4+(y-2x-1) & \\
\text{ecc.} & \\
\dots\dots\dots+2+4+4+(y-2x-2) & \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots+5+(y-2x-3) & \\
\text{ecc.} & \\
y = 3+3+3+\dots+3+3+3+(y-3x+3) & \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots+4+(y-3x+2) & \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots+5+(y-3x+1) & \\
\text{ecc.} & (c) \\
\dots\dots\dots+3+4+4+(y-3x+1) & \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots+5+(y-3x) & \\
\text{ecc.} & \\
\dots\dots\dots+3+5+5+(y-3x-1) & \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots+6+(y-3x-2) & \\
\text{ecc. ecc.} &
\end{array}
$$

In tutte queſte ſerie, che ſono compoſte di x termini, tutt' i numeri ſi devono combinare in tutte le maniere ſoddisfacenti, purchè il primo termine reſti ſempre l'iſteſſo. Le lettere a, b, c, ecc. eſprimono il numero delle ſerie corriſpondenti, e quindi il numero delle maniere, nelle quali il numero y può dividerſi in x parti, è $=a+b+c+$ ecc. Ora è chiaro che a è il numero delle maniere, nelle quali il numero $y-1$ può dividerſi in $x-1$ parti; le altre ſerie (b), (c), ecc. ſono tali, che il valore di b, c, ecc. ſarà l'iſteſſo, ſe ad eſſe ſoſtituiamo le ſeguenti ſerie compoſte di x termini.

$$\begin{array}{rl}
1+1+1+\ldots\ldots+1+1+(y-2x+1) & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots+1+2+(y-2x) & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+3+(y-2x-1) & \\
\text{ecc.} & (b) \\
\ldots\ldots\ldots+1+2+2+(y-2x-1) & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+3+(y-2x-2) & \\
\text{ecc.} & \\
\ldots\ldots\ldots+1+3+3+(y-2x-3) & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+4+(y-2x-4) & \\
\text{ecc.} & \\
2+2+2+\ldots\ldots+2+2+(y-3x+2) & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+3+(y-3x+1) & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+4+(y-3x) & \\
\text{ecc.} & (c) \\
\ldots\ldots\ldots+2+3+3+(y-3x) & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+4+(y-3x-1) & \\
\text{ecc.} & \\
\ldots\ldots\ldots+2+4+4+(y-3x-2) & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+5+(y-3x-3) & \\
\text{ecc. ecc.} &
\end{array}$$

Ora è evidente, che queſte ſeconde ſerie rappreſentano le maniere, nelle quali il numero $y-x$ può dividerſi in x parti; infatti ponendo nelle prime $y-x$ in luogo di y ne naſcono le ſeconde; dunque il numero delle maniere, nelle quali può in x parti dividerſi il numero $y-x$, è $=b+c+d+$ ecc. Poſto queſto, ſe $Z^{(y,x)}$ rappreſenta il numero delle maniere, nelle quali può il numero y dividerſi in x parti, avremo l' equazione

$$Z^{(y,x)} = Z^{(y-x,x)} + Z^{(y-1,x-1)}$$

l' integrazione della quale ci darà la ſoluzione del problema.

Ponghiamo $Z^{(y,x)} = b^y \nabla \underset{x}{\alpha}$, e ſoſtituendo avremo

$\underset{x}{\alpha} = b^{-x} \underset{x}{\alpha} + b^{-1}$, cioè $\underset{x}{\alpha} = \frac{b^{-1}}{1 - b^{-x}}$, e

$\nabla \underset{x}{\alpha} = \frac{b^{-x}}{(1-b^{-1})(1-b^{-2})\ldots(1-b^{-x})}$. Quindi avremo in generale (2) $r^{(m)} =$ alle potenze $(m+1)^{esime}$ delle radici dell' equazioni $b-1=0$, $b^2-1=0$, $b^3-1=0$, ... $b^x-1=0$. Ora le potenze delle radici di queſt' equazioni ſono eſpreſſe dalla Tavola ſeguente.

Potenze	1^e	2^e	3^e	4^e	5^e	6^e	ecc.
equazione 1^a	1	1	1	1	1	1	
2^a	0	2	0	2	0	2	
3^a	0	0	3	0	0	3	
4^a	0	0	0	4	0	0	
ecc.							

E' facile il vedere, che la ſomma delle potenze $m.^{esime}$ delle radici di tutte queſt' equazioni potrà eſprimerſi dalla formola $m + \frac{m}{2} + \frac{m}{3} + \frac{m}{4} + \ldots\ldots + \frac{m}{m}$, purchè da queſta ſi rigettino tutt' i termini fratti, e quei che ſono maggiori di x. Queſta formola così inteſa eſprimiamola col ſegno $\delta . m$, ed avremo, qualunque ſia la quantità m, $r^{(m)} = \delta(m+1)$. Quindi ſarà (2)

$$A' = \delta 1$$

$$A'' = \frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}$$

$$A''' = \frac{\delta 3}{3} + \delta 1 \frac{\delta 2}{3} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right) \frac{\delta 1}{3}$$

e in generale

$$A^{(m)} = \frac{\delta m}{m} + \delta 1 \frac{\delta(m-1)}{m} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right) \frac{\delta(m-2)}{m}$$

$$+\left(\frac{\delta 3}{3}+\delta 1\,\frac{\delta 2}{3}+\left(\frac{\delta 2}{2}+\delta 1\,\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 1}{3}\right)\frac{\delta(m-3)}{m}$$

$$+\left\{\frac{\delta 4}{4}+\delta 1\,\frac{\delta 3}{4}+\left(\frac{\delta 2}{2}+\delta 1\,\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 2}{4}+\left(\frac{\delta 3}{3}+\delta 1\,\frac{\delta 2}{3}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{\delta 2}{2}+\delta 1\,\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 1}{3}\right)\frac{\delta 1}{4}\right\}\frac{\delta(m-4)}{m}+\text{ecc.}$$

Trovati queſti valori ſarà

$$\nabla\alpha_{x}=b^{-x}+A'b^{-x-1}+A''b^{-x-2}+A'''b^{-x-3}+\text{ecc.}$$

e quindi (4)

$$Z^{(y,x)}=\phi(y-x)+A'\phi(y-x-1)+A''\phi(y-x-2)+\text{ecc.}$$

Facendo $x=1$, abbiamo $A'=A''=A'''=\text{ecc.}=1$: dunque

$$Z^{(y,1)}=\phi(y-1)+\phi(y-2)+\phi(y-3)+\phi(y-4)+\text{ecc.}$$

e ponendo $y-1$ in luogo di y

$$Z^{(y-1,1)}=\phi(y-2)+\phi(y-3)+\phi(y-4)+\text{ecc.}$$

Quindi ſarà $Z^{(y,1)}-Z^{(y-1,1)}=\phi(y-1)$. Ora dalla natura del problema ſi deduce $Z^{(y,1)}=1$ ſe y è poſitiva, e $Z^{(y,1)}=0$ ſe y è zero o negativa; dunque $Z^{(1,1)}-Z^{(0,1)}=1=\phi.0$, cioè $\phi.y$ è $=1$ nel ſolo caſo di $y=0$, negli altri caſi è ſempre $=0$. Avremo perciò $Z^{(y,x)}=$ al coefficiente di $\phi.0$, il quale ſe ſi ſuppone eſſere $A^{(m)}$ ſarà $y-x-m=0$, cioè $m=y-x$, e quindi

$$Z^{(y,x)}=\frac{\delta(y-x)}{y-x}+\delta 1\,\frac{\delta(y-x-1)}{y-x}+\left(\frac{\delta 2}{2}+\delta 1\,\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta(y-x-2)}{y-x}$$

$$+\left(\frac{\delta 3}{3}+\delta 1\,\frac{\delta 2}{3}+\left(\frac{\delta 2}{2}+\delta 1\,\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 1}{3}\right)\frac{\delta(y-x-3)}{y-x}$$

$$+\left\{\frac{\delta 4}{4}+\delta 1\,\frac{\delta 3}{4}+\left(\frac{\delta 2}{2}+\delta 1\,\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 2}{4}+\left(\frac{\delta 3}{3}+\delta 1\,\frac{\delta 2}{3}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{\delta 2}{2}+\delta 1\,\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 1}{3}\right)\frac{\delta 1}{4}\right\}\frac{\delta(y-x-4)}{y-x}+\text{ecc.}$$

Si debba per eſempio trovare in quante maniere il numero 18 può dividerſi in ſedici parti; avremo $x=16$, $y=18$, $\delta(y-x)=\delta 2=2+1=3$, $\delta 1=1$: quindi $Z^{(18,16)}=\frac{3}{2}$

$+\frac{1}{2}=2$. Queſte due maniere ſono le ſeguenti

$18=1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+3$
$18=1+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+1+2+2$

Cerchiamo adeſſo in quante maniere ſi può dividere il numero 9 in quattro parti; ſarà $x=4$, $y=9$, $\delta(y-x)=\delta 5=1$, $\delta 4=4+2+1=7$, $\delta 3=3+1=4$, $\delta 2=2+1=3$, $\delta 1=1$. Onde il numero delle maniere cercato

$$Z^{(9,4)}=\frac{1}{5}+\frac{7}{5}+\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\frac{4}{5}+\left(\frac{4}{3}+\frac{3}{3}+\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{3}\right)\frac{3}{5}$$

$$+\left\{\frac{7}{4}+\frac{4}{4}+\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\frac{3}{4}+\left(\frac{4}{3}+\frac{3}{3}+\left(\frac{3}{2}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{3}\right)\frac{1}{4}\right\}\frac{1}{5}=\frac{8}{5}+\frac{8}{5}+\frac{9}{5}+\frac{5}{5}=\frac{30}{5}=6.$$

Queſte maniere ſono le ſeguenti;

$9=1+1+1+6$
$9=1+1+2+5$
$9=1+1+3+4$
$9=1+2+2+4$
$9=1+2+3+3$
$9=2+2+2+3$

PROBLEMA V.

20. *Trovare in quante maniere il numero* y *può eſſer la ſomma di* x *diverſi termini della ſerie naturale.*

Nel Problema precedente abbiamo conſiderato la partizione de' numeri in parti o uguali o diſuguali; in queſto paſſiamo a trattare della partizione de' numeri in parti tra loro diſuguali. Sia dunque $Z^{(y,x)}$ il numero delle maniere, nelle quali il numero y può dividerſi in x parti tutte diſuguali tra loro, e con un diſcorſo ſimile a quello uſato nel Problema precedente giungeremo alla equazione

$$Z^{(y,x)}=Z^{(y-x,x)}+Z^{(y-x,x-1)}$$

Per integrare queſta equazione facciamo $Z^{(y,x)}=b^y\nabla\alpha_x$, e ſoſtituendo avremo $\underset{x}{\alpha} = b^{-x}\underset{x}{\alpha} + b^{-x}$, cioè $\underset{x}{\alpha} = \frac{b^{-x}}{1 - b^{-x}}$, e

$\nabla\underset{x}{\alpha} = \frac{b^{-x(x+1):2}}{(1-b^{-1})(1-b^{-2})\ldots(1-b^{-x})}$. Dunque ſarà come nel Problema precedente $r^{(m)} = \delta(m+1)$, e

$$A^{(m)} = \frac{\delta m}{m} + \delta 1\,\frac{\delta(m-1)}{m} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1\,\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta(m-2)}{m}$$

$$+ \left(\frac{\delta 3}{3} + \delta 1\,\frac{\delta 2}{3} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1\,\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 1}{3}\right)\frac{\delta(m-3)}{m}$$

$$+ \Big\{\frac{\delta 4}{4} + \delta 1\,\frac{\delta 3}{4} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1\,\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 2}{4}$$

$$+ \left(\frac{\delta 3}{3} + \delta 1\,\frac{\delta 2}{3} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1\,\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 1}{3}\right)\frac{\delta 1}{4}\Big\}\frac{\delta(m-4)}{m} + \text{ecc.}$$

ove $\delta m = m + \frac{m}{2} + \frac{m}{3} + \frac{m}{4} + \ldots\ldots + \frac{m}{m}$, laſciati da parte i termini fratti e quei che ſono maggiori di x.

Trovati per la formola precedente i valori di A', A'', ecc. avremo

$$\nabla\underset{x}{\alpha} = b^{-x(x+1):2} + A'b^{-x(x+1):2-1} + A''b^{-x(x+1):1-2} + \text{ecc.}$$

e quindi (4)

$$Z^{(y,x)} = \phi\left(y - \frac{x(x+1)}{2}\right) + A'\phi\left(y - \frac{x(x+1)}{2} - 1\right)$$

$$+ A''\phi\left(y - \frac{x(x+1)}{2} - 2\right) + \text{ecc.}$$

Ponendo $x = 1$ abbiamo

$Z^{(y,1)} = \phi(y-1) + \phi(y-2) + \phi(y-3) + \phi(y-4) + \text{ecc.}$

$Z^{(y-1,1)} = \phi(y-2) + \phi(y-3) + \phi(y-4) + \text{ecc.}$

Dunque $Z^{(y,1)} - Z^{(y-1,1)} = \phi(y-1)$. Ma per la natura del problema $Z^{(y,1)} = 1$ nel caſo di y poſitiva, ed è $= 0$ nel caſo di y zero o negativa; dunque $\phi . y$ ſarà $= 1$ nel ſolo caſo di $y = 0$, negli altri caſi ſarà ſempre $\phi . y = 0$. Sarà dunque $Z^{(y,x)} =$ al coefficiente di $\phi . 0$, il quale ſe ſi pone eſſere $A^{(m)}$, avremo $y - \frac{x(x+1)}{2} - m = 0$, cioè $m = y - \frac{x(x+1)}{2}$, e quindi

$$Z^{(y,x)} = \frac{\delta\left(y - \frac{x(x+1)}{2}\right)}{y - \frac{x(x+1)}{2}} + \delta 1 \frac{\delta\left(y - \frac{x(x+1)}{2} - 1\right)}{y - \frac{x(x+1)}{2}}$$

$$+ \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right) \frac{\delta\left(y - \frac{x(x+1)}{2} - 1\right)}{y - \frac{x(x+1)}{2}}$$

$$+ \left(\frac{\delta 3}{3} + \delta 1 \frac{\delta 2}{3} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right) \frac{\delta 1}{3}\right) \frac{\delta\left(y - \frac{x(x+1)}{2} - 2\right)}{y - \frac{x(x+1)}{2}}$$

$$+ \left\{\frac{\delta 4}{4} + \delta 1 \frac{\delta 3}{4} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right) \frac{\delta 2}{4} + \left(\frac{\delta 3}{3} + \delta 1 \frac{\delta 2}{3}\right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right) \frac{\delta 1}{3}\right) \frac{\delta 1}{4}\right\} \frac{\delta\left(y - \frac{x(x+1)}{2} - 3\right)}{y - \frac{x(x+1)}{2}} + \text{ecc.}$$

Cerchiamo per eſempio in quante maniere il numero 18 può dividerſi in 5 parti diſuguali; avremo $x = 5$, $y = 18$, $\delta\left(y - \frac{x(x+1)}{2}\right) = \delta 3 = 4$, $\delta 2 = 3$, $\delta 1 = 1$; e quindi il numero delle maniere cercato

$$Z^{(18,5)} = \frac{4}{3} + \frac{3}{3} + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{3} = 3.$$

Sia adeſſo $x = 4$, $y = 15$, cioè cerchiamo in quante maniere può il 15 dividerſi in 4 parti diſuguali. Sarà

$\delta\left(y - \frac{x(x+1)}{2}\right) = \delta 5 = 1$, $\delta 4 = 4 + 2 + 1 = 7$, $\delta 3 = 3 + 1 = 4$, $\delta 2 = 2 + 1 = 3$, $\delta 1 = 1$, e quindi

$$Z^{(15,4)} = \frac{1}{5} + \frac{7}{5} + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)\frac{4}{5} + \left(\frac{4}{3} + \frac{3}{3} + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{3}\right)\frac{3}{5}$$

$$+ \left\{\frac{7}{4} + \frac{4}{4} + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)\frac{3}{4} + \left(\frac{4}{3} + \frac{3}{3} + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{3}\right)\frac{1}{4}\right\}\frac{1}{5}$$

$$= \frac{8 + 8 + 9 + 5}{5} = 6.$$

21. Se nella formola del Problema precedente ſi pone $y - \frac{x(x-1)}{2}$ in luogo di y, ne naſcerà l' eſpreſſione di queſto. Dunque il numero y può dividerſi in tante maniere in parti tutte diſuguali, in quante maniere nel medeſimo numero di parti o uguali o diſuguali può dividerſi il numero $y - \frac{x(x-1)}{2}$.

PROBLEMA VI.

22. *Trovare il numero delle maniere, nelle quali il numero* y *può eſſer la ſomma di* x *termini della ſerie de' numeri diſpari* 1, 3, 5, 7, ecc. *uguali tra loro o diſuguali.*

Facendo $Z^{(y,x)} =$ al cercato numero delle maniere, avremo l' equazione

$$Z^{(y,x)} = Z^{(y-2x,x)} + Z^{(y-1,x-1)}.$$

Poſto $Z^{(y,x)} = b^y \nabla \alpha_x$ avremo ſoſtituendo $\alpha_x = \alpha_x b^{-2x} + b^{-1}$,

cioè $\alpha_x = \frac{b^{-1}}{1 - b^{-2x}}$, e $\nabla \alpha_x = \frac{b^{-x}}{(1 - b^{-2})(1 - b^{-4}) \ldots (1 - b^{-2x})}$.

Facciamo $\frac{1}{(1 - b^{-2})(1 - b^{-4}) \ldots (1 - b^{-2x})} = 1 + A' b^{-2} + A'' b^{-4} + A''' b^{-6} +$ ecc. e sarà (2) $r = \delta 1$, $r' = \delta 2$, e generalmente $r^{(m)} = \delta(m+1)$. Onde qualunque ſia il numero m, avremo ſempre

$A^{(m)}$

$$A^{(m)} = \frac{\delta m}{m} + \delta 1 \, \frac{\delta(m-1)}{m} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \, \frac{\delta 1}{2}\right) \frac{\delta(m-2)}{m}$$

$$+ \left(\frac{\delta 3}{3} + \delta 1 \, \frac{\delta 2}{3} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \, \frac{\delta 1}{2}\right) \frac{\delta 1}{3}\right) \frac{\delta(m-3)}{m} + \text{ecc.}$$

Sarà dunque

$$\underset{x}{\nabla\alpha} = b^{-x} + A' b^{-x-2} + A'' b^{-x-4} + A''' b^{-x-6} + \text{ecc.}$$

e perciò (4)

$$Z^{(y,x)} = \phi(y-x) + A'\phi(y-x-2) + A''\phi(y-x-4)$$
$$+ A'''\phi(y-x-6) + \text{ecc.}$$

Facendo $x = 1$ farà $A^{(\mu)} = 1$, qualunque ſia il numero μ; quindi

$$Z^{(y,1)} = \phi(y-1) + \phi(y-3) + \phi(y-5) + \phi(y-7) + \text{ecc.}$$
$$Z^{(y-2,1)} = \phi(y-3) + \phi(y-5) + \phi(y-7) + \text{ecc.}$$

Avremo perciò $Z^{(y,1)} - Z^{(y-2,1)} = \phi(y-1)$; ma $Z^{(y,1)} = 1$ nel caſo di y diſpari e poſitiva, ed è $= 0$ nel caſo di y pari o negativa; dunque farà $\phi.0 = Z^{(1,1)} - Z^{(-1,1)} = 1$; negli altri caſi farà $\phi.y = 0$. Quindi $Z^{(y,x)} =$ al coefficiente di $\phi.0$; ſia queſto coefficiente $A^{(m)}$, avremo $y - x - 2m = 0$, cioè $m = \frac{y-x}{2}$. Siccome il valore di m deve eſſere intero, converrà che il numero $y - x$ ſia diviſibile per due, cioè che i numeri y ed x ſiano o ambedue pari o ambedue diſpari; ciò che deve neceſſariamente ſuccedere, acciò il problema ſia poſſibile. Poſto queſto farà

$$Z^{(y,x)} = \frac{\delta\frac{y-x}{2}}{\frac{y-x}{2}} + \delta 1 \, \frac{\delta\frac{y-x-2}{2}}{\frac{y-x}{2}} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \, \frac{\delta 1}{2}\right) \frac{\delta\frac{y-x-4}{2}}{\frac{y-x}{2}}$$

$$+ \left(\frac{\delta 3}{3} + \delta 1 \, \frac{\delta 2}{3} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \, \frac{\delta 1}{2}\right) \frac{\delta 1}{3}\right) \frac{\delta\frac{y-x-6}{2}}{\frac{y-x}{2}}$$

$$+\left\{\frac{\delta 4}{4}+\delta 1\,\frac{\delta 3}{4}+\left(\frac{\delta 2}{2}+\delta 1\,\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 2}{4}+\left(\frac{\delta 3}{3}+\delta 1\,\frac{\delta 2}{3}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{\delta 2}{2}+\delta 1\,\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 1}{3}\right)\frac{\delta 1}{4}\right\}\frac{\delta\frac{y-x-8}{2}}{\frac{y-x}{2}}+\text{ecc.}$$

Sia per eſempio $y=14$, $x=6$, avremo $\delta\frac{y-x}{2}=\delta 4=7$, $\delta 3=4$, $\delta 2=3$, $\delta 1=1$, e $Z^{(14,6)}=\frac{7}{4}+\frac{4}{4}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\frac{3}{4}$ $+\left(\frac{4}{3}+\frac{3}{3}+\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{3}\right)\frac{1}{4}=\frac{7+4+6+3}{4}=5=$ al numero delle maniere, nelle quali il 14 può eſſer la ſomma di ſei numeri diſpari.

23. Se ſi aggiungerà nel Problema la condizione, che i termini della ſerie de' numeri diſpari, la ſomma de' quali forma il numero y, ſiano tutti diſuguali, avremo allora l'equazione

$$Z^{(y,x)}=Z^{(y-2x,x)}+Z^{(y-2x+1,x-1)}$$

e operando come ſopra troveremo l'integrale di queſta equazione così eſpreſſo:

$$Z^{(y,x)}=\frac{\delta\frac{y-x^2}{2}}{\frac{y-x^2}{2}}+\delta 1\,\frac{\delta\frac{y-x^2-2}{2}}{\frac{y-x^2}{2}}$$

$$+\left(\frac{\delta 2}{2}+\delta 1\,\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta\frac{y-x^2-4}{2}}{\frac{y-x^2}{2}}+\text{ecc.}$$

Supponendo per eſempio $y=24$, $x=4$, avremo $\delta\frac{y-x^2}{2}=\delta 4=7$, $\delta 3=4$, $\delta 2=3$, $\delta 1=1$, e

$$Z^{(24,4)}=\frac{7}{4}+\frac{4}{4}+\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\frac{3}{4}+\left(\frac{4}{3}+\frac{3}{3}+\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{3}\right)\frac{1}{4}=5;$$

cioè cinque ſono le maniere, nelle quali il numero 24 può eſſer la ſomma di quattro numeri diſpari diſuguali.

24. Se nella eſpreſſione del numero 22 ſi pone $y-x(x-1)$ in luogo di y, ne verrà la formola del numero precedente. Di qui naſce il ſeguente Teorema: il numero y in tante maniere può eſſer la ſomma di x termini tutti diſuguali della ſerie de' numeri diſpari, in quante il numero $y-x(x-1)$ può eſſer la ſomma di x termini della medeſima ſerie o uguali o diſuguali.

PROBLEMA VII.

25. *Trovare in quante maniere il numero* y *può naſcere dalla ſomma de' numeri* 1, 2, 3, 4,....x.

Finora abbiamo ſuppoſto, che foſſe aſſegnato il numero delle parti, nelle quali deve dividerſi il numero y; adeſſo paſſiamo ad un' altra ſorte di problemi, ne' quali il numero delle parti può eſſer qualunque, ma ſono ſoltanto determinate le parti; in modo che nella compoſizione del numero y non devono aver luogo che i numeri non maggiori di x, ma queſti poſſono prenderſi in qualunque numero. Sia $Z^{(y,x)}$ il numero delle maniere cercato, e ponendo

$$y=p+2q+3r+4s+\ldots+xt$$

è chiaro che tante ſaranno le maniere cercate, in quante poſſono da queſta equazione determinarſi in numeri interi le lettere p, q, r, s,....t. Ora tutte queſte maniere ſi troveranno facendo ſucceſſivamente $t=0$, 1, 2, 3, ecc. ma le maniere, che corriſpondono a queſti valori di t, è chiaro che ſaranno eſpreſſe reſpettivamente da $Z^{(y,x-1)}$, $Z^{(y-x,x-1)}$, $Z^{(y-2x,x-1)}$, ecc. Dunque avremo

$$Z^{(y,x)}=Z^{(y,x-1)}+Z^{(y-x,x-1)}+Z^{(y-2x,x-1)}+\text{ecc.}$$

e ponendo $y-x$ in luogo di y

$$Z^{(y-x,x)}=Z^{(y-x,x-1)}+Z^{(y-2x,x-1)}+\text{ecc.}$$

donde naſce l' equazione

$$Z^{(y,x)}=Z^{(y-x,x)}+Z^{(y,x-1)}.$$

Facciamo $Z^{(y,x)}=b^y\nabla\underset{x}{\alpha}$, e ſarà $\underset{x}{\alpha}=\dfrac{1}{1-b^{-x}}$, e quindi

$\nabla\alpha_{x} = \frac{1}{(1-b^{-1})(1-b^{-2})\ldots(1-b^{-x})}$, cioè (2) ponendo

$$A^{(m)} = \frac{\delta m}{m} + \delta 1 \frac{\delta(m-1)}{m} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right) \frac{\delta(m-2)}{m} + \text{ecc.}$$

come ſopra (22), ſarà (4)

$Z^{(y,x)} = \phi y + A'\phi(y-1) + A''\phi(y-2) + A'''\phi(y-3) + \text{ecc.}$

Poſto $x = 1$, avremo $A^{(\mu)} = 1$ qualunque ſia μ; dunque

$$Z^{(y,1)} = \phi y + \phi(y-1) + \phi(y-2) + \phi(y-3) + \text{ecc.}$$
$$Z^{(y-1,1)} = \phi(y-1) + \phi(y-2) + \phi(y-3) + \text{ecc.}$$

e quindi $\phi y = Z^{(y,1)} - Z^{(y-1,1)}$. Ora ſi oſſervi che $Z^{(y,1)}$ è $= 0$, quando y è negativa, perchè i numeri negativi non poſſono mai naſcere dalla ſomma di unità; ed è $= 1$ quando y è zero, perchè il zero naſce dalla ſomma di 0 unità. Dunque $Z^{(0,1)} - Z^{(-1,1)} = \phi 0 = 1$. Sia $A^{(m)}$ il coefficiente di $\phi 0$, ed avremo $y - m = 0$, cioè $m = y$, e quindi

$$Z^{(y,x)} = \frac{\delta y}{y} + \delta 1 \frac{\delta(y-1)}{y} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right) \frac{\delta(y-2)}{y}$$
$$+ \left(\frac{\delta 3}{3} + \delta 1 \frac{\delta 2}{3} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 1}{3}\right) \frac{\delta(y-3)}{y}$$
$$+ \left\{\frac{\delta 4}{4} + \delta 1 \frac{\delta 3}{4} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 2}{4}\right.$$
$$\left. + \left(\frac{\delta 3}{3} + \delta 1 \frac{\delta 2}{3} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 1}{3}\right)\frac{\delta 1}{4}\right\} \frac{\delta(y-4)}{y} + \text{ecc.}$$

Sia per eſempio $y = 5$, $x = 4$, avremo $\delta 5 = 1$, $\delta 4 = 7$, $\delta 3 = 4$, $\delta 2 = 3$, $\delta 1 = 1$, e quindi $Z^{(5,4)} = \frac{1}{5} + \frac{7}{5} + \frac{8}{5} + \frac{9}{5} + \frac{5}{5} = 6$. Dunque in ſei maniere il numero 5 può naſcere dalla ſomma de' numeri 1, 2, 3, 4.

26. Se in queſta formola ponghiamo $y - x$ in luogo di y, ne verrà quella del Problema quarto. Dunque il numero y in tante maniere può eſſer la ſomma di x numeri, in quante il numero $y - x$ può naſcere dalla ſomma de' numeri 1,

$1, 2, 3, \ldots x$. Paragonando con queſta le formole degli altri Problemi, ne naſceranno altri Teoremi.

PROBLEMA VIII.

27. *Data una ſerie qualunque aritmetica* (A) m, m + n, m + 2n, ecc. *trovare in quante maniere da* x *termini di queſta ſerie ſi può formare il numero y.*

Sia $Z^{(y,x)}$ il numero delle maniere cercato, e facendo primieramente $x = 2$, ſia $y = m + (m + nz) = 2m + nz$, alla qual forma può ſempre ridurſi il numero y, ſe pure può eſſer la ſomma di due termini della ſerie (A). Ma per la natura delle progreſſioni aritmetiche tra i termini m ed $m + nz$ ve ne ſono altri di numero $z - 1$, il primo de' quali e l'ultimo, il ſecondo e il penultimo, e gli altri nel medeſimo ordine danno inſieme l' iſteſſo numero y; ove ſi oſſervi che ſe $z - 1$ è diſpari, il doppio del termine medio è uguale al medeſimo numero y. Dunque avremo $Z^{(y,2)} = \frac{2+2}{2}$, o $= \frac{z+1}{2}$, ſecondochè z è pari o diſpari; quindi nell'uno e nell' altro caſo avremo $Z^{(y-2n,2)} = Z^{(y,2)} - 1$, $Z^{(y-3n,2)} = Z^{(y-n,2)} - 1$, e generalmente $Z^{(y-\mu n,2)} = Z^{(y-(\mu-2)n,2)} - 1$.

Sia adeſſo $x = 3$, ed $y = m + m + (m + nz) = 3m + nz$; le lettere poi c, d, e ſiano i termini della ſerie (A), dalla ſomma de' quali naſce y, cioè ſia $y = c + d + e$. Se facciamo $c = m$, avremo $d + e = 2m + nz$, lo che può ſuccedere in $Z^{(y-m,2)}$ maniere; ſe $c = m + n$, ſarà $d + e = 2m + n(z - 1)$, il che ſuccede in $Z^{(y-m-n,2)}$ maniere. Similmente ſe $c = m + 2n$, $m + 3n$, $m + 4n$, ecc. ſaranno i numeri delle maniere riſpettivi $Z^{(y-m-2n,2)}$, $Z^{(y-m-3n,2)}$, $Z^{(y-m-4n,2)}$, ecc. Ma ſi oſſervi, che delle maniere rappreſentate da $Z^{(y-m-n,2)}$ una dà $d = a$, la qual maniera è contenuta in quelle eſpreſſe da $Z^{(y-m,2)}$. Così $Z^{(y-m-2n,2)}$, $Z^{(y-m-3n,2)}$, $Z^{(y-m-4n,2)}$, ecc. contengono due, tre, quattro, ecc. maniere, che ſono già ſtate contate.

Ora per trovare il valore di $Z^{(y,3)}$ convien ſommare tutte queſte particolari maniere, e ſarà perciò

$$Z^{(y\,,\,3)} = Z^{(y-m\,,\,2)} + Z^{(y-m-n\,,\,2)} - 1 + Z^{(y-m-2n\,,\,2)} - 2$$
$$+ Z^{(y-m-3n\,,\,2)} - 3 + \text{ecc.}$$
$$= Z^{(y-m\,,\,2)} + Z^{(y-m-3n\,,\,2)} + Z^{(y-m-6n\,,\,2)} + Z^{(y-m-9n\,,\,2)} + \text{ecc.}$$

Ponendo $y - 3n$ in luogo di y, ſarà ſimilmente

$$Z^{(y-3n\,,\,3)} = Z^{(y-m-3n\,,\,2)} + Z^{(y-m-6n\,,\,2)} + Z^{(y-m-9n\,,\,2)} + \text{ecc.}$$

cioè $Z^{(y\,,\,3)} = Z^{(y-3n\,,\,3)} + Z^{(y-m\,,\,2)}$.

Con un diſcorſo ſimile troveremo

$$Z^{(y\,,\,4)} = Z^{(y-4n\,,\,4)} + Z^{(y-m\,,\,3)}$$
$$Z^{(y\,,\,5)} = Z^{(y-5n\,,\,5)} + Z^{(y-m\,,\,4)}$$

e generalmente

$$Z^{(y\,,\,x)} = Z^{(y-nx\,,\,x)} + Z^{(y-m\,;\,x-1)}$$

Per integrare queſta equazione facciamo $Z^{(y\,,\,x)} = b^y \nabla\alpha_x$, e ſoſtituendo avremo $\alpha_x = \dfrac{b^{-m}}{1 - b^{-nx}}$, e quindi

$$\nabla\alpha_x = \frac{b^{-mx}}{(1-b^{-n})(1-b^{-2n})\ldots\ldots(1-b^{-nx})}.$$

Adeſſo ponendo

$$A^{(\mu)} = \frac{\delta\mu}{\mu} + \delta 1\,\frac{\delta(\mu-1)}{\mu} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1\,\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta(\mu-2)}{\mu} + \text{ecc.}$$

come ſopra, avremo

$$\nabla\alpha_x = b^{-mx} + A'b^{-mx-n} + A''b^{-mx-2n} + A'''b^{-mx-3n} + \text{ecc.}$$

e quindi (4)

$$Z^{(y\,,\,x)} = \phi(y-mx) + A'\phi(y-mx-n) + A''\phi(y-mx-2n) + \text{ecc.}$$

Facendo $x = 1$, ſarà

$$Z^{(y\,,\,1)} = \phi(y-m) + \phi(y-m-n) + \phi(y-m-2n) + \text{ecc.}$$

e quindi $Z^{(y\,,\,1)} - Z^{(y-n\,,\,1)} = \phi(y-m)$. Di qui è facile il vedere, che $\phi\,.\,y = 1$ nel ſolo caſo di $y = 0$: dunque ſe $A^{(\mu)}$ è nel valore di $Z^{(y\,,\,x)}$ il coefficiente di $\phi\,.\,0$, cioè ſe $y - mx - n\mu = 0$, e perciò $\mu = \dfrac{y-mx}{n}$, ſarà

$$Z^{(y\,,\,x)} = \frac{\delta\dfrac{y-mx}{n}}{\dfrac{y-mx}{n}} + \delta 1\,\frac{\delta\dfrac{y-mx-n}{n}}{\dfrac{y-mx}{n}}$$

$$+\left(\frac{\delta 2}{2}+\delta 1\,\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta^{\frac{y-mx-2n}{n}}}{\frac{y-mx}{n}}+\left(\frac{\delta 3}{3}+\delta 1\,\frac{\delta 2}{3}+\left(\frac{\delta 2}{2}+\delta 1\,\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 1}{3}\right)\frac{\delta^{\frac{y-mx-3n}{n}}}{\frac{y-mx}{n}}+\text{ecc.},$$

28. Se in queſta formola ponghiamo $m=n=1$, ne naſcerà quella del n°. 19. Se facciamo $m=1$, $n=2$, avremo il caſo de' numeri diſpari ſopra (22) conſiderato. Se ſi pone $n=m$, ed $y=my$, ne verrà di nuovo la formola del n°. 19. Dunque il numero my in tante maniere ſi può dividere in x parti della ſorma mz, in quante maniere il numero y può dividerſi in x parti di qualunque forma. Sia adeſſo $m=1$, $n=3$, ed avremo la ſerie (B) 1, 4, 7, 10, 13, ecc.; e ſarà in queſto caſo

$$Z^{(y,x)}=\frac{\delta^{\frac{y-x}{3}}}{\frac{y-x}{3}}+\delta 1\,\frac{\delta^{\frac{y-x-3}{3}}}{\frac{y-x}{3}}$$

$$+\left(\frac{\delta 2}{2}+\delta 1\,\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta^{\frac{y-x-6}{3}}}{\frac{y-x}{3}}+\text{ecc.}$$

Quindi, acciò un numero y poſſa eſſer la ſomma di x termini della ſerie (B), conviene che $y-x$ ſia diviſibile per 3. Sia per eſempio $y=16$, $x=4$, avremo $\delta^{\frac{y-x}{3}}=\delta 4$ $=7$, $\delta 3=4$, $\delta 2=3$, $\delta 1=1$, e $Z^{(16,4)}=\frac{7}{4}+\frac{4}{4}+\frac{6}{4}$ $+\frac{3}{4}=5=$ al numero delle maniere, nelle quali il numero

16 può eſſer la ſomma di quattro termini della ſerie (B). Queſte maniere ſono le ſeguenti; $16=1+1+1+13$, $16=1+1+4+10$, $16=1+1+7+7$, $16=1+4+4+7$, $16=4+4+4+4$.

PROBLEMA IX.

29. Trovare in quante maniere da x diverſi termini della ſerie (A) poſſa formarſi il numero y.

Con un diſcorſo ſimile a quello del Problema precedente giungeremo alla equazione

$$Z^{(y\,,\,x)}=Z^{(y-nx\,,\,x)}+Z^{(y-n(x-1)-m\,,\,x-1)}$$

Ponendo al ſolito $Z^{(y\,,\,x)}=b^y\nabla\alpha_x$ avremo $\alpha_x=\dfrac{b^{-n(x-1)-m}}{1-b^{-nx}}$, e

$$\nabla\alpha_x=\frac{b^{-mx-n\cdot x(x-1):2}}{(1-b^{-n})(1-b^{-2n})\,.....\,(1-b^{-nx})}\text{; cioè ſarà (2)}$$

$$\nabla\alpha_x=b^{-mx-n\cdot x(x-1):2}+A'b^{-mx-n\cdot x(x-1):2-n}$$

$$+A''b^{-mx-n\cdot x(x-1):2-2n}+\text{ecc.}$$

facendo come ſopra

$$A^{(\mu)}=\frac{\delta\mu}{\mu}+\delta 1\,\frac{\delta(\mu-1)}{\mu}+\left(\frac{\delta 2}{2}+\delta 1\,\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta(\mu-2)}{\mu}+\text{ecc.}$$

Quindi avremo (4)

$$Z^{(y\,,\,x)}=\phi\left(y-mx-n\,\frac{x(x-1)}{2}\right)+A'\phi\left(y-mx-n\,\frac{x(x-1)}{2}-n\right)$$

$$+A''\phi\left(y-mx-n\,\frac{x(x-1)}{2}-2n\right)+\text{ecc.}$$

Ponendo $x=1$, abbiamo $A'=A''=\text{ecc.}=1$; onde

$$Z^{(y\,,\,1)}=\phi(y-m)+\phi(y-m-n)+\phi(y-m-2n)+\text{ecc.}$$

$$Z^{(y-n\,,\,1)}=\phi(y-m-n)+\phi(y-m-2n)+\text{ecc}$$

cioè $\phi(y-m)=Z^{(y\,,\,1)}-Z^{(y-n\,,\,1)}$. Di qui appariſce, che ſarà $\phi(y-m)=1$ nel ſolo caſo di $y=m$; dunque $Z^{(y\,,\,x)}=$ al coefficiente di $\phi\,.\,0$; il quale ſe ſi pone eſſere $A^{(\mu)}$ avremo

$$y-mx-n\,\frac{x(x-1)}{2}-n\mu=0\text{, cioè}$$

$\mu=$

$$\mu = \frac{y - mx - n\frac{x(x-1)}{2}}{n}\text{, e}$$

$$Z^{(y,n)} = \frac{\delta\,\frac{y-mx-n\frac{x(x-1)}{2}}{n}}{\frac{y-mx-n\frac{x(x-1)}{2}}{n}} + \delta 1\,\frac{\delta\,\frac{y-mx-n\frac{x(x-1)}{2}-n}{n}}{\frac{y-mx-n\frac{x(x-1)}{2}}{n}}$$

$$+\left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1\,\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta\,\frac{y-mx-n\frac{x(x-1)}{2}-2n}{n}}{\frac{y-mx-n\frac{x(x-1)}{2}}{n}} + \text{ecc.}$$

30. I Problemi de' numeri 20 e 23 ſono caſi particolari del precedente. Se vogliamo ſapere ciò che ſucceda per riguardo alla ſerie (B), facciamo $m = 1$, $n = 3$, ed avremo

$$Z^{(y,n)} = \frac{\delta\,\frac{y-x\frac{3x-1}{2}}{3}}{\left(y-x\frac{3x-1}{2}\right):3} + \delta 1\,\frac{\delta\,\frac{y-x\frac{3x-1}{2}-3}{3}}{\left(y-x\frac{3x-1}{2}\right):3}$$

$$+\left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1\,\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta\,\frac{y-x\frac{3x-1}{2}-3}{3}}{\left(y-x\frac{3x-1}{2}\right):3} + \text{ecc.}$$

Cerchiamo per eſempio in quante maniere il numero 31 può eſſer la ſomma di 4 termini diverſi della ſerie (B); avremo $x=4$, $y=31$, $\frac{\delta^{y-x\frac{3x-1}{2}}}{3}=\delta 3=4$, $\delta 2=3$, $\delta 1=1$, e $Z^{(31,4)}=\frac{4}{3}+\frac{3}{3}+\frac{2}{3}=3$, le quali maniere ſono: $31=1+4+7+19$, $31=1+4+10+16$, $31=1+7+10+13$.

31 Se nella formola del numero 27 ponghiamo $y-n\frac{x(x-1)}{2}$ in luogo di y, ne naſcerà quella del numero 29. Di qui naſce il Teorema: in quante maniere il numero y può dividerſi in x termini tutti diſuguali della ſerie (A), in altrettante il numero $y-n\frac{x(x-1)}{2}$ può dividerſi in x termini della medeſima ſerie o uguali o diſuguali.

PROBLEMA X.

32. *Data una ſerie di numeri qualunque, della quale il termine generale ſia* Z_x, *trovare in quante maniere il numero* y *può eſſer la ſomma de' termini di queſta ſerie* z_1, z_2, z_3 .... z_x.

Sia $Z^{(y,x)}$ il numero delle maniere cercato, e facciamo

$$y=pz_1+qz_2+rz_3+sz_4+\ldots\ldots+tz_x$$

E' evidente che il numero cercato ſarà uguale al numero delle diverſe maniere, nelle quali poſſono determinarſi le lettere p, q, r, ecc. in modo che ſoddisfacciano alla equazione precedente. Ora tutte queſte maniere ſaranno in numero uguali alla ſomma di tutte quelle, che ſi hanno ponendo ſucceſſivamente $t=0$, 1, 2, ecc. Ma il numero delle maniere corriſpondenti a $t=0$ è eſpreſſo da $Z^{(y,x-1)}$; e ſimilmente il numero delle altre che convengono ai valori di $t=1$, 2, 3, ecc. è rappreſentato reſpettivamente da $Z^{(y-z_x,\,x-1)}$,

$z^{(y-2z_x,\,x-1)}$, $Z^{(y-3z_x,\,x-1)}$ ecc. Dunque ſarà

$$Z^{(y,x)} = z^{(y,x-1)} + Z^{(y-z_x,\,x-1)} + Z^{(y-2z_x,\,x-1)} + Z^{(y-3z_x,\,x-1)} + \text{ecc.}$$

ma ponendo $y - z_x$ in luogo di y ſi ha

$$z^{(y-z_x,\,x)} = z^{(y-z_x,\,x-1)} + Z^{(y-2z_x,\,x-1)} + Z^{(y-3z_x,\,x-1)} + \text{ecc.}$$

Dunque ſi avrà l' equazione

$$Z^{(y,x)} = Z^{(y-z_x,\,x)} + Z^{(y,x-1)}.$$

Facciamo $Z^{(y,x)} = b^y \nabla\alpha_x$, ed avremo $\alpha_x = \frac{1}{1-b^{-z_x}}$, e quindi $\nabla\alpha_x = \frac{1}{(1-b^{-z_1})(1-b^{-z_2})\ldots(1-b^{-z_x})}$. Ponendo adeſſo $\nabla\alpha_x = 1 + A'b^{-1} + A''b^{-2} + A'''b^{-3} + \text{ecc.}$

è facile il vedere che ſarà ſempre

$$A^{(m)} = \frac{\delta m}{m} + \delta 1 \frac{\delta(m-1)}{m} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta(m-2)}{m}$$
$$+ \left(\frac{\delta 3}{3} + \delta 1 \frac{\delta 2}{3} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 1}{3}\right)\frac{\delta(m-3)}{m} + \text{ecc.}$$

ove $\delta m = m + \frac{m}{2} + \frac{m}{3} + \ldots + \frac{m}{m}$; ma di queſto valore non devono prenderſi che i termini interi non maggiori di z_x, e della forma z_x. Dunque ſarà ſempre $A' = A'' = A''' = \text{ecc.} = 0$, fino ad $A^{(z_1)} = z_1$. Poſto queſto avremo (4)

$Z^{(y,x)} = \phi y + A'\phi(y-1) + A''\phi(y-2) + A'''\phi(y-3) + \text{ecc.}$
Ma ponendo $x = 1$ abbiamo, com' è facile il vedere

$$Z^{(y,1)} = \phi.y + \phi(y - x_1) + \phi(y - 2x_1) + \phi(y - 3x_1) + \text{ecc.}$$

$$Z^{(y-x_1,1)} = \phi(y - x_1) + \phi(y - 2x_1) + \phi(y - 3x_1) + \text{ecc.}$$

Dunque $\phi y = Z^{(y,1)} - Z^{(y-x_1,1)}$, e $\phi.y = 1$ nel ſolo caſo di $y = 0$. Sarà perciò $Z^{(y,x)} =$ al coefficiente di $\phi.0$, cioè ſarà

$$Z^{(y,x)} = \frac{\delta y}{y} + \delta 1 \frac{\delta(y-1)}{y} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta(y-2)}{y}$$

$$+ \left(\frac{\delta 3}{3} + \delta 1 \frac{\delta 2}{3} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 1}{3}\right)\frac{\delta(y-3)}{y} + \text{ecc.}$$

33. Per darne un eſempio, ſi abbia l'equazione a due indeterminate r, t di primo grado, $a = br + ct$, ove a, b, c ſono quantità cognite e poſitive, e $c > b$. E' noto che queſta equazione ammette in numeri interi un numero finito di ſoluzioni. Per trovar queſto numero ſi faccia $z_1 = b$, $z_2 = c$, e il valore di $Z^{(a,2)}$ preſo dal n.° precedente darà il numero cercato. Si abbia per eſempio l' equazione $6 = 2r + 3t$, ſarà $z_1 = 2$, $z_2 = 3$, $\delta 1 = 0$, $\delta 2 = 2$, $\delta 3 = 3$, $\delta 4 = 2$, $\delta 5 = 0$, $\delta 6 = 5$, e il numero delle ſoluzioni, che ammette in numeri interi queſta equazione, ſarà $Z^{(6,2)} = \frac{5}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = 2$. Queſte due ſoluzioni ſono le ſeguenti; $r = 0$, $t = 2$; $r = 3$, $t = 0$, e oltre queſte due non ve ne ſono altre. L' iſteſſo ſi dica dell' equazioni a più indeterminate.

34. Supponghiamo $z_n = nx$, cioè la ſerie propoſta ſia n, $2n$, $3n$, ... xn. E' chiaro che in queſto caſo il valore di $\nabla\alpha_x$ ſarà della forma

$$\nabla\alpha_{x} = 1 + A'b^{-n} + A''b^{-2n} + A'''b^{-3n} + \text{ecc.}$$

ove al ſolito

$$A^{(\mu)} = \frac{\delta\mu}{\mu} + \delta 1 \frac{\delta(\mu-1)}{\mu} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta(\mu-2)}{\mu} + \text{ecc.}$$

ma nel valore di $\delta\mu$ devono prenderſi tutt' i numeri interi. Avremo dunque

$$Z^{(y,x)} = \phi y + A'\phi(y-n) + A''\phi(y-2n) + A'''\phi(y-3n) + \text{ecc.}$$

e $\phi.y$ eſſendo $= 1$ nel ſolo caſo di $y = 0$ (32), ſarà $Z^{(y,x)} =$ al coefficiente di $\phi 0$, il quale ſe ſi ſuppone eſſere $A^{(\mu)}$, avremo $y - \mu n = 0$, cioè $\mu = \frac{y}{n}$; e quindi

$$Z^{(y,x)} = \frac{\delta\frac{y}{n}}{y:n} + \delta 1 \frac{\delta\frac{y-n}{n}}{y:n} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta\frac{y-2n}{n}}{y:n}$$
$$+ \left(\frac{\delta 3}{3} + \delta 1 \frac{\delta 2}{3} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 1}{3}\right)\frac{\delta\frac{y-3n}{n}}{y:n} + \text{ecc.}$$

35. Se nella formola del numero 27. ponghiamo $y + mx$ in luogo di y, ne naſcerà queſta. Dunque il numero y in tante maniere può naſcere dalla ſomma di x termini della ſerie m, $m+n$, $m+2n$, ecc; in quante il numero $y - mx$ può naſcere dalla ſomma de' numeri n, $2n$, $3n$, ... xn.

36. Sia $z_{x} = (2x-1)n$, cioè la ſerie propoſta ſia la ſeguente, n, $3n$, $5n$, ... $(2x-1)n$. Avremo

$$Z^{(y,x)} = \phi y + A'\phi(y-n) + A''\phi(y-2n) + A'''\phi(y-3n) + \text{ecc.}$$

e qui pure ſarà

$$A^{(\mu)} = \frac{\delta\mu}{\mu} + \delta 1 \frac{\delta(\mu-1)}{\mu} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta(\mu-2)}{\mu} + \text{ecc.}$$

ove $\delta\mu = \mu + \frac{\mu}{2} + \frac{\mu}{3} + \ldots\ldots + \frac{\mu}{\mu}$, ma di queſta ſerie non devono prenderſi che i termini interi, diſpari, e non maggiori di $2x - 1$. E ſiccome $\phi y = 1$ nel ſolo caſo di $y = 0$, ſarà

$$Z^{(y,x)}=\frac{\delta\frac{y}{n}}{y:n}+\delta 1\,\frac{\delta\frac{y-n}{n}}{y:n}+\left(\frac{\delta 2}{2}+\delta 1\,\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta\frac{y-2n}{n}}{y:n}+\text{ecc.}$$

Facendo $n=1$, ſarà il numero delle maniere, nelle quali y può eſſer la ſomma de' numeri diſpari $1, 3, 5, \ldots 2x-1$ eſpreſſo da

$$Z^{(y,x)}=\frac{\delta y}{y}+\delta 1\,\frac{\delta(y-1)}{y}+\left(\frac{\delta 2}{2}+\delta 1\,\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta(y-2)}{y}+\text{ecc.}$$

Sia per eſempio $y=5$, $x=3$, cioè ſi cerchi in quante maniere il numero 5 può naſcere dalla ſomma de' numeri 1, 3, 5. Avremo $\delta y=\delta 5=5+1=6$, $\delta 4=1$, $\delta 3=3+1=4$, $\delta 2=1$, $\delta 1=1$, e il numero delle maniere cercato $=Z^{(5,3)}=\frac{6}{5}+\frac{1}{5}+\frac{4}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}=3$, le quali ſono, $5=1+1+1+1+1$, $5=1+1+3$, $5=5$.

37. Così ſe ſarà più generalmente $z_x=\big((a-1)x-(a-2)n\big)$, avremo

$$Z^{(y,x)}=\frac{\delta\frac{y}{n}}{y:n}+\delta 1\,\frac{\delta\frac{y-n}{n}}{y:n}+\left(\frac{\delta 2}{2}+\delta 1\,\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta\frac{y-2n}{n}}{y:n}+\text{ecc.}$$

e nel valore di $\delta\mu=\mu+\frac{\mu}{2}+\frac{\mu}{3}+\ldots+\frac{\mu}{\mu}$ non dovranno prenderſi che i numeri interi della forma $(a-1)p-(a-2)$ non maggiori di $(a-1)x-(a-2)$.

38. Sia $z_x=c^{x-1}$; cioè ſi abbia la progreſſione geometrica $1, c, c^2, \ldots c^{x-1}$; il valore di $Z^{(y,x)}$ ſarà quel medeſimo del n°. 32, e δy ſarà $=y+\frac{y}{2}+\frac{y}{3}+\ldots+\frac{y}{y}$ prendendo ſolamente da queſto valore i termini interi non maggiori di c^{x-1} e di queſta forma. Si cerchi per eſempio in quante maniere il numero 5 può naſcere dalla ſomma de' termini 1, 2, 4. Sarà $c=2$, $y=5$, $x=3$, $c^{x-1}=4$, e $\delta y=\delta 5=1$, $\delta 4=4+2+1=\delta 7$, $3=1$, $\delta 2=2+1=3$,

$\delta 1 = 1$, e quindi il numero cercato $Z^{(5,3)} = \frac{1}{5} + \frac{7}{5} + \frac{2}{5} + \frac{6}{5} + \frac{4}{5} = 4$, le quali maniere ſono $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$, $5 = 1 + 1 + 1 + 2$, $5 = 1 + 2 + 2$, $5 = 1 + 4$.

39. Sia finalmente z_x il termine generale de' numeri primi della forma $4m + 1$; in queſto caſo nel valore di δy dovranno prenderſi i ſoli termini, che ſono numeri primi della forma $4m + 1$ non maggiori di z_x. Se per eſempio ſi cerca in quante maniere il numero 7 può eſſer la ſomma de' numeri primi della forma $4m + 1$, ſarà $\delta y = \delta 7 = 1$, $\delta 6 = 1$, $\delta 5 = 5 + 1 = 6$, $\delta 4 = 1$, $\delta 3 = 1$, $\delta 1 = 1$, e il numero delle maniere cercato $= \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{6}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = 2$, le quali maniere ſono $7 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$, $7 = 1 + 1 + 5$.

PROBLEMA XI.

40. *Data una ſerie di numeri qualunque, della quale il termine generale ſia* z_x, *trovare in quante maniere il numero* y *può naſcere dalla ſomma di termini diverſi di queſta ſerie, continuata fino al termine* z_x.

Sia $Z^{(y,x)}$ il numero delle maniere cercato, e ſupponghiamo $y = pz_1 + qz_2 + rz_3 + \ldots + tz_x$. Per la natura del Problema ciaſcuna delle quantità p, q, ecc. non può eſſere che $= 0$, oppure $= 1$; quindi il numero delle maniere cercato ſarà uguale alla ſomma de' numeri delle maniere, che naſcono dal fare $t = 0$, e $t = 1$. Ma facendo $t = 0$, e $t = 1$, $Z^{(y,x)}$ diventa $Z^{(y,x-1)}$, e $Z^{(y-z_x,x-1)}$; dunque l'equazione del Problema ſarà

$$Z^{(y,x)} = Z^{(y,x-1)} + Z^{(y-z_x,x-1)}$$

Per integrar queſta equazione facciamo $Z^{(y,x)} = b^y \nabla\alpha_x$, ed avremo $\alpha_x = 1 + b^{-z_x}$, e $\nabla\alpha_x = (1 + b^{-z_1})(1 + b^{-z_2})(1 + b^{-z_3})\ldots(1 + b^{-z_x})$. Ponghiamo

$$\nabla\alpha_x = 1 + A'b^{-1} + A''b^{-2} + A'''b^{-3} + \text{ecc.}$$

e ſupponendo $\gamma m = m - \frac{m}{2} + \frac{m}{3} - \frac{m}{4} \ldots \pm \frac{m}{m}$, ma prendendo di queſta ſerie ſolo i termini interi non maggiori di z_x, e della forma z_x, è facile il vedere che avremo (2)

$$A^{(m)} = \frac{\gamma m}{m} + \gamma 1 \frac{\gamma(m-1)}{m} + \left(\frac{\gamma 2}{2} + \gamma 1 \frac{\gamma 1}{2}\right)\frac{\gamma(m-2)}{m}$$

$$+ \left(\frac{\gamma 3}{3} + \gamma 1 \frac{\gamma 2}{3} + \left(\frac{\gamma 2}{2} + \gamma 1 \frac{\gamma 1}{2}\right)\frac{\gamma 1}{3}\right)\frac{\gamma(m-3)}{m} + \text{ecc.}$$

Poſto queſto valore di $A^{(m)}$, avremo
$Z^{(y,x)} = \phi y + A'\phi(y-1) + A''\phi(y-2) + A'''\phi(y-3) + \text{ecc.}$
ove $\phi y = Z^{(y,0)}$. Ma $Z^{(y,0)} = 1$ nel ſolo caſo di $y = 0$, negli altri caſi $Z^{(y,0)} = 0$; dunque $Z^{(y,x)} = A^{(y)}$.

41. Sia $z_x = x$, cioè la ſerie propoſta ſia quella de' numeri naturali; in queſto caſo prendendo nel valore di $\gamma.m$ tutt' i termini interi minori di x, avremo

$$Z^{(y,x)} = \frac{\gamma y}{y} + \gamma 1 \frac{\gamma(y-1)}{y} + \left(\frac{\gamma 2}{2} + \gamma 1 \frac{\gamma 1}{2}\right)\frac{\gamma(y-2)}{y} + \text{ecc.}$$

Sia per eſempio $y = 5$, $x = 4$, avremo $\gamma y = \gamma 5 = 1$, $\gamma 4 = 4 - 2 - 1 = 1$, $\gamma 3 = 3 + 1 = 4$, $\gamma 2 = 1$, $\gamma 1 = 1$, e il numero delle maniere cercato $Z^{(5,4)} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{4}{5} + \frac{2}{5}$

+

$+\frac{2}{5}=2$, le quali maniere ſono $5=1+4$, $5=2+3$.

42. Ripigliamo l' equazione appartenente a queſto caſo

$$Z^{(y,x)}=Z^{(y,x-1)}+Z^{(y-x,x-1)}$$

e ponendovi $y-x$ in luogo di y

$$Z^{(y-x,x)}=Z^{(y-x,x-1)}+Z^{(y-2x,x-1)}$$

e ſoſtituendo nella prima il valore di $Z^{(y-x,x-1)}$ preſo da queſta

$$Z^{(y,x)}=Z^{(y-x,x)}+Z^{(y,x-1)}-Z^{(y-2x,x-1)}$$

Facciamo $Z^{(y,x)}=b^y\,\underset{x}{\nabla\alpha}$, ed avremo $\underset{x}{\alpha}=\frac{1-b^{-2x}}{1-b^{-x}}$, e

$\underset{x}{\nabla\alpha}=\frac{(1-b^{-2})(1-b^{-4})\ldots\ldots(1-b^{-2x})}{(1-b^{-1})(1-b^{-2})\ldots\ldots(1-b^{-x})}$; e ponendo x infinito

$\underset{x}{\nabla\alpha}=\frac{1}{(1-b^{-1})(1-b^{-3})(1-b^{-5})\ldots\ldots}$, ove gli eſponenti di b ſono i numeri diſpari. Quindi $Z^{(y,x)}$ avrà in queſto caſo il medeſimo valore, che ha al n°. 36. (formola ſeconda); onde naſce il Teorema. In tante maniere il numero y può formarſi dalla ſomma di numeri diſuguali, in quante il medeſimo numero y può eſſere la ſomma di numeri diſpari o uguali tra loro o diſuguali. Similmente paragonando la formola del n°. 36. con quella del n°. precedente troveremo queſt' altro curioſo Teorema; cioè $\delta.y=\gamma.y$, o ſia

$$y+\frac{y}{2}+\frac{y}{3}+\ldots\ldots+\frac{y}{y}=y-\frac{y}{2}+\frac{y}{3}-\frac{y}{4}+\ldots\ldots\pm\frac{y}{y}$$

prendendo nel primo membro ſolo i termini interi, e diſpari; nel ſecondo i termini interi. Il Teorema è evidente ſe y è diſpari, ma è ugualmente vero ſe y è pari.

43. Sia $\underset{x}{z}=c^{x-1}$, cioè ſi abbia la ſerie geometrica

$1, c, c^2, \ldots\ldots c^{x-1}$, e prendendo nel valore di

$\gamma m=m-\frac{m}{2}+\frac{m}{3}-\frac{m}{4}+\ldots\ldots\pm\frac{m}{m}$ ſolo i termini interi non maggiori di c^{x-1} e di queſta forma, avremo

$$Z^{(y,x)} = \frac{\gamma y}{y} + \gamma 1 \frac{\gamma(y-1)}{y} + \left(\frac{\gamma^2}{2} + \gamma 1 \frac{\gamma 1}{2}\right)\frac{\gamma(y-2)}{y} + \text{ecc.}$$

Cerchiamo per eſempio in quante maniere il numero 5 può eſſer la ſomma di numeri diverſi preſi tra i termini della progreſſione 1, 2, 4. Sarà $x = 3$, $c = 2$, $y = 5$, $\gamma y = \gamma 5 = 1$, $\gamma 4 = 4 - 2 - 1 = 1$, $\gamma 3 = 1$, $\gamma 2 = 2 - 1 = 1$, $\gamma 1 = 1$, e $Z^{(5,4)} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 1$.

Generalmente ſe ſupporremo x comunque grande, cioè ſe non ſarà più limitato il numero de' termini della progreſſione geometrica 1, 2, 4, 8, 16, ecc. ſi toglierà la condizione di prendere dal valore di $\gamma.m$ i numeri non maggiori di 2^{x-1}. Sarà dunque $\gamma.m$ della forma $2^m - 2^{m-1} - 2^{m-2} - \ldots - 2 - 1$, cioè ſarà ſempre $= 1$. Quindi $Z^{(y,x)}$ ſarà ſempre $= 1$ qualunque ſia il numero y. Abbiamo adunque queſto Teorema: che qualunque numero può naſcere dalla ſomma di termini diverſi della progreſſione geometrica 1, 4, 8, ecc. in una ſola maniera.

44. Quei teoremi, che abbiamo in qua e in là oſſervati, ſono già ſtati per la maggior parte ritrovati dal Sig. Eulero. Noi gli abbiamo dedotti dalla ſoluzione de' diverſi problemi; ma dall' equazione de' medeſimi potevano ſubito ſenza alcuna integrazione ritrovarſi, come inſegnano i ſeguenti Problemi, i quali inſieme ci aprono la ſtrada a ritrovare molti altri ſimili teoremi.

PROBLEMA XII.

45. *Date le due ſeguenti equazioni*

$$Z^{(y,x)} = \underset{x}{A}\, Z^{(y-\varphi.x,\, x)} + \underset{x}{B}\, Z^{(y-f.x,\, x-1)}$$

$$\Pi^{(y,x)} = \underset{x}{A}\, Z^{(y-\varphi.x,\, x)} + \underset{x}{B}\, Z^{(y-f'.x,\, x-1)}$$

compoſte di tre termini, nelle quali i coefficienti reſpettivi ſiano uguali, e i primi due termini ſiano della medeſima forma, ridurre l' integrazione della ſeconda equazione alla integrazione della prima.

Facciamo $\Pi^{(y\,,\,x)} = Z^{(y - F.x\,,\,x)}$, e ſoſtituendo queſto valore nella ſeconda equazione eſſa diventerà

$$Z^{(y - F.x\,,\,x)} = A_x Z^{(y - \phi.x - F.x\,,\,x)}$$

$$+ B_x Z^{(y - f'.x - F(x - 1)\,,\,x - 1)}.$$

Ma dalla prima equazione abbiamo

$$Z^{(y - F.x\,,\,x)} = A_x Z^{(y - \phi.x - F.x\,,\,x)}$$

$$+ B_x Z^{(y - f.x - F.x\,,\,x - 1)},$$

Dunque $y - f'.x - F(x - 1) = y - f.x - F.x$, cioè $F.x - F(x - 1) = f'.x - f.x$, e $F.x = \Sigma\big(f'(x+1) - f(x+1)\big) + \text{Coſt.}$ La coſtante ſi determinerà così. Sia $\Sigma f'(x+1) - \Sigma f(x+1) = a$ nel caſo di $x = 1$, e ſi abbia $\Pi^{(y\,,\,1)} = Z^{(y-b\,,\,1)}$, avremo $\boldsymbol{F}.1 = b$, e $\text{Coſt.} = b - a$.

46. Si abbiano per eſempio le due equazioni

$$Z^{(y\,,\,x)} = Z^{(y-x\,,\,x)} + Z^{(y\,,\,x-1)}$$

$$\Pi^{(y\,,\,x)} = \Pi^{(y-x\,,\,x)} + \Pi^{(y-x\,,\,x-1)}$$

la prima delle quali appartiene al n°. 25, la ſeconda al n°. 20. Avremo $F.x = \Sigma(x+1) = \dfrac{x(x+1)}{2} + \text{Coſt.}$ Ora ſi oſſervi che

$$Z^{(0\,,\,1)} = 1\,,\ Z^{(1\,,\,1)} = 1\,,\ Z^{(2\,,\,1)} = 1\,,\ \text{ecc.}$$

$$\Pi^{(0\,,\,1)} = 0\,,\ \Pi^{(1\,,\,1)} = 1\,,\ \Pi^{(2\,,\,1)} = 1\,,\ \text{ecc.}$$

dunque $\Pi^{(y\,,\,1)} = Z^{(y-1\,,\,1)}$, cioè $b = 1$, $a = 1$, e la coſtante $= 0$: quindi $F.x = \dfrac{x(x+1)}{2}$, e $\Pi^{(y\,,\,x)} = Z^{(y - x(x+1):2\,,\,x)}$.

Di qui naſce il Teorema: In quante maniere il numero y può dividerſi in x parti diſuguali, in altrettante il numero $y - \dfrac{x(x+1)}{2}$ può naſcere dalla ſomma de' numeri 1, 2, 3,... x.

47. Più generalmente ſi abbiano l' equazioni

$$Z^{(y\,,\,x)} = Z^{(y-nx\,,\,x)} + Z^{(y\,,\,x-1)}$$

$$\Pi^{(y\,,\,x)} = \Pi^{(y-nx\,,\,x)} + \Pi^{(y-n(x-1)-m\,,\,x-1)}\,,$$

che ſono quelle de' numeri 34, e 29. Sarà $F.x = \Sigma(nx+m)$ $= n\dfrac{x(x-1)}{2} + mx +$ Coſt. Ma ſappiamo eſſere

$$Z^{(0\,,\,1)} = 1\,,\ Z^{(n\,,\,1)} = 1\,,\ Z^{(2n\,,\,1)} = 1\,,\ \text{ecc.}$$

$\Pi^{(0\,,\,1)} = 0$, $\Pi^{(m\,,\,1)} = 1$, $\Pi^{(m+n\,,\,1)} = 1$, $\Pi^{(m+2n\,,\,1)} = 1$, ecc. e quindi $\Pi^{(y\,,\,1)} = Z^{(y-m\,,\,1)}$. Dunque $b = m$, $a = m$, e Coſt. $= m - m = 0$, cioè $\Pi^{(y\,,\,x)} = Z^{(y-mx-nx(x-1):2\,,\,x)}$: onde in tante maniere il numero y può eſſer la ſomma di x termini della ſerie m, $m+n$, $m+2n$, ecc. diſuguali tra loro, in quante il numero $y - mx - n\dfrac{x(x-1)}{2}$ può naſcere dalla ſomma de' numeri n, $2n$, $3n$, ... xn.

PROBLEMA XIII.

48. *Più generalmente date l' equazioni*

$$Z^{(y\,,\,x)} = \underset{x}{A}\, Z^{(y-\varphi.x\,,\,x)} + \underset{x}{B}\, Z^{(y-f.x\,,\,x-1)}$$

$$\Pi^{(y\,,\,x)} = \underset{x}{A}\, \Pi^{(y-m\varphi.x\,,\,x)} + \underset{x}{B}\, \Pi^{(y-f'.x\,,\,x-1)}$$

ove m *è coſtante, ridurre l' integrazione della ſeconda equazione a quella della prima.*

Facciamo $\Pi^{(y\,,\,x)} = Z^{((y-F.x):m\,,\,x)}$, e la ſeconda equazione diventerà

$$Z^{((y-F.x):m\,,\,x)} = \underset{x}{A}\, Z^{((y-m\varphi.x-F.x):m\,,\,x)}$$

$$+ \underset{x}{B}\, Z^{\left((y-f'.x-F(x-1))\right):m\,,\,x-1)}$$

Ma ponendo nella prima equazione $y - \dfrac{(m-1)y + F.x}{m}$ in luogo di y avremo

$$Z^{((y - F.x):m\,,\,x)} = A_x\, Z^{((y - m\phi.x - F.x):m\,,\,x)}$$
$$+ B_x\, Z^{((y - mf.x - F.x):m\,,\,x - 1)}$$

Dunque $y - mf.x - F.x = y - f'.x - F(x - 1)$, cioè $F.x - F(x - 1) = f'.x - mf.x$, e integrando $F.x = \Sigma f'(x + 1) - m\Sigma f(x + 1) +$ Coſt. e la coſtante ſi determinerà come ſopra.

49. Si abbiano per eſempio l' equazioni de' numeri 19, e 22,

$$Z^{(y\,,\,x)} = Z^{(y-x\,,\,x)} + Z^{(y-1\,,\,x-1)}$$
$$\Pi^{(y\,,\,x)} = \Pi^{(y-2x\,,\,x)} + \Pi^{(y-1\,,\,x-1)}.$$

Sarà $F.x = \Sigma(1 - 2) = -x +$ Coſt. per determinare queſta coſtante ſi oſſervi che

$$Z^{(1\,,\,1)} = 1\,,\ Z^{(2\,,\,1)} = 1\,,\ Z^{(3\,,\,1)} = 1\,,\ \text{ecc.}$$
$$\Pi^{(1\,,\,1)} = 1\,,\ \Pi^{(2\,,\,1)} = 0\,,\ \Pi^{(3\,,\,1)} = 1\,,\ \text{ecc.}$$

dunque $\Pi^{(y\,,\,1)} = Z^{((y+1):2\,,\,1)}$, e la Coſt. $= 0$; avremo perciò $\Pi^{(y\,,\,x)} = Z^{((y+x):2\,,\,x)}$, e quindi il Teorema: In quante maniere il numero y può dividerſi in x parti diſpari, in altrettanti il numero $\frac{y + x}{2}$ può dividerſi in x parti o pari o diſpari.

50. Siano propoſte l' equazioni de' numeri 19, e 27,

$$Z^{(y\,,\,x)} = Z^{(y-x\,,\,x)} + Z^{(y-1\,,\,x-1)}$$
$$\Pi^{(y\,,\,x)} = \Pi^{(y-nx\,,\,x)} + {}^{(y-m\,,\,x-1)}$$

Avremo $F.x = \Sigma(m - n) = (m - n)x +$ Coſt. Ora ſi rifletta che i valori di $\Pi^{(y\,,\,x)}$ vanno con queſt' ordine;

$$\Pi^{(m\,,\,1)} = 1\,,\ \Pi^{(m+n\,,\,1)} = 1\,,\ \Pi^{(m+2n\,,\,1)} = 1\,,\ \text{ecc.}$$

dunque $\Pi^{(y\,,\,1)} = Z^{((y-m+n):n\,,\,1)}$, quindi la Coſt. $= 0$, e $\Pi^{(y\,,\,x)} = Z^{((y-(m-n)x):n\,,\,x)}$. Onde in tante maniere il numero y è la ſomma di x termini della ſerie m, $m + n$, $m + 2n$, ecc; in quante il numero $\frac{y - (m - n)x}{n}$ è la ſomma di x termini della ſerie naturale. Col metodo medeſimo paragonando tra loro le altre equazioni di ſopra ritrovate, ſe ne dedurranno altri Teoremi.

OSSERVAZIONE ANATOMICA

SOPRA UN VITELLO-VACCA DETTO DAGL' INGLESI FREEMARTIN.

Del Sig. ANTONIO SCARPA Pubblico Profeſſore di Notomia, ed Operazioni chirurgiche nella R. Univerſità di Pavia.

E' Stato mai ſempre un oggetto di curioſità, e di ricerche, ſe fra gli animali che noi chiamiamo perfetti ſi generino alcune volte degl' individui che dotati ſiano del doppio ordine d' organi maſchile, e femmineo. Preſſo gli antichi Scrittori ſi trovano regiſtrate molte oſſervazioni relative a queſt' argomento; ma, per dir vero, sì poco dettagliate, che ſottopoſte ad un rigoroſo eſame hanno dato luogo a dubitare grandemente della verità di tali fatti, o perchè fondati unicamente ſopra eſterne fallaci apparenze, o perchè non abbaſtanza confermati da una minuta, e perita ſezione delle parti deſtinate all' uſo della generazione. Sembra dalle imperfette loro relazioni che la ſola apparenza d' una feſſura nel perineo, l' incompleta diſceſa dei teſticoli, la brevità, o deviazione dell' uretra nei maſchi, e lo ſproporzionato allungamento della clitoride nelle femmine ſiano ſtati riguardati da loro come motivi baſtanti per decidere della preſenza dei due ſeſſi combinati in un medeſimo individuo. Quindi è che il celebre *Hallero* (1) dopo un critico eſame di tali fatti confrontati con altri ſimili ha creduto di dare a ciaſcheduna oſſervazione di queſto genere il ſuo giuſto valore riducendo tutte le ſtorie dei preteſi Ermafroditi a due claſſi principali di deformità; una cioè che riſulta dalla non naturale forma, ſede, ſviluppo delle parti maſchili; l' altra dal non ordinario ingrandimento della clitoride nelle femmine. Non ha laſciato però queſto grand' uomo d' avvertire, che trattandoſi d' una opinione ricevuta per tanti ſecoli, ed accreditata dall' aſſerzione di molti Scrittori, ed in tempi diverſi, vi poteva eſſere non oſtante qualche coſa di vero (2). Avvi per appunto qualche coſa di vero nell' antica opinione degli Ermafroditi fra gli animali detti perfetti, e ſembra che aveſſe dovuto meritare molto prima l' attenzione dei curioſi della natura un fatto relativo a queſto argomento, il quale oltre d' eſſer ſommamente rimarcabile per la ſua frequenza e coſtanza, qual principio immutabile nella propagazione d' alcune ſpecie d' animali perfetti, lo è poi grandemente per ſomminiſtrare una prova convincente, che anco fra gli animali perfetti ſi generano alcune volte degl' individui, i quali benchè a tutto rigore di vocabolo dir non ſi poſſano veri, e completi Ermafroditi, però forniti ſono or più or meno d' ambedue i ſeſſi miſti, e combinati in un medeſimo ſoggetto.

---

(1) *Num dentur* Hermaphroditi *Comment.*

Egli è un fatto avverato, e coſtante, noto ſin al volgo degli agricoltori, che ogni qualvolta una vacca depone due gemelli, e che uno di queſti ſia deciſamente maſchio, l' altro ſembri femmina, queſto ſecondo non è preciſamente bene nè l' uno nè l' altra, ma ſi trova fornito degli organi d' ambedue i ſeſſi con più, o meno di perfezione. Il primo diviene un toro nella via ordinaria. Il ſecondo arrivato alla maturità non moſtra la più picciola inclinazione per il toro, nè il toro per lui. Non così ſuccede ſe ambedue i gemelli ſono femmine, o maſchi (3).

---

(2) *Ibidem. Quæ omnia*, dice egli, *ut non ſatis anatomica, aut ad perſuadendum firma ſunt; ita certe ſuſpicionem tamen non abſurdam movent veri quid in opinione eſſe, in qua adeo multi homines tam diverſis temporibus conſenſerint. Raro enim fit, ut his late patentibus opinionibus nihil veri ſubſit. Id poliporum exemplo apparet, quorum renaſcentia brachia recentior induſtria confirmavit, & innumeris aliis argumentis, quæ deprecari culpam quotidie nos cogunt, & antiquorum hominum curioſitatem venerari, quam tamquam fabuloſam ſpreveramus.*

(3) Quantunque non appariſca chiaramente che i Romani conoſciuto abbiano tutte queſte circoſtanze, però egli è certo che nei loro ſcritti d' agricoltura hanno fatto menzione di queſt' animale, e che l' hanno diſtinto dalla vacca col nome di *Taura*. Columella *de Re Ruſt.* lib. VI. Cap. XXII. *ſed & curandum eſt*, dice egli, *omnibus annis in hoc æque, atque in reliquis gregibus pecoris, ut delectus habeatur; nam, & enixæ, & vetuſtæ quæ gignere deſierunt ſummovendæ ſunt, & utique* Tauræ, *quæ locum fœcundarum occupant ablegandæ, vel aratro*

Il Sig. Giovanni *Hunter* uomo d' acuto ingegno, ed uno dei più felici indagatori della natura, ha ſottopoſto tre di queſti animali a una diligente notomia, e nell' anno 1779 ha comunicato ſopra queſto propoſito le ſue oſſervazioni alla R. Società di Londra. Riferirò qui brevemente il reſultato delle oſſervazioni del Sig. *Hunter* onde render più chiaro quanto ſono per ſoggiungere ſopra queſto ſteſſo argomento.

Nel primo di queſti animali eſaminati dal Sig. *Hunter* di ſett' anni circa le parti eſterne della generazione erano più piccole che nella vacca. La vagina al di là dell' orifizio dell' uretra riſtrettaſi maggiormente ſi ſtendeva ſin all' utero, a cui era aperto l' adito alla diviſione di eſſo nelle due corna. Le corna dell' utero ſi allungavano in ciaſchedun lato ſecondando il margine del legamento largo. Ove finivano le corna dell' utero, riſiedevano le ovaja, ed accanto a queſte i teſticoli. Mancavano le trombe falloppiane. I vaſi deferenti erano imperfetti; il deſtro ſolamente continuava ſin vicino al teſticolo. Pervj però ambedue queſti canali inferiormente ſi aprivano nella vagina in vicinanza dell' orifizio dell' uretra. Dietro la veſcica, cioè fra queſta e l' utero, ſi trovavano le veſcichette ſeminali. Queſte parimente ſi aprivano nella vagina inſieme coi condotti deferenti.

Nel ſecondo di queſti animali di cinque anni la vagina poco al di là dell' orifizio dell' uretra finiva in un ſacco cieco. L' utero, benchè impervio, ſi divideva ſecondo il ſolito nelle due corna, all' eſtremità delle quali in luogo delle ovaja erano collocati i teſticoli. Che poi foſſero i teſticoli ſi conoſceva 1°. Dall' eſſer' venti volte più grandi dell' ovaja nella vacca, e quaſi della grandezza dei teſticoli del toro prima che diſcendano dal ventre. 2°. Dalle arterie del cordone ſpermatico ſimili a quelle del toro. 3°. Dal muſcolo cremaſtere, che dall' anello dei muſcoli del baſſo ventre ſi cur-

vava

---

domandæ, quoniam laboris, & operis non minus quam juvenci, propter uteri ſterilitatem, patientes ſunt.

M. Varrone parimente *de Re Ruſt.* lib. II. Cap. V. fa menzione di queſt' animale. *Diſcernuntur*, dice egli, *in prima vitulus, & vitula: in ſecunda juvencus, & juvenca: in tertia, & quarta taurus, & vacca. Quæ ſterilis eſt vacca* Taura *appellata*. Sotto le medeſime circoſtanze accade di vedere la produzione d'un eſſer ſimile anco nei cavalli, aſini, e pecore.

vava all' insù per involgere il teſticolo. Mancavano i condotti deferenti. Fra l'utero poi e la veſcica urinaria v'erano le veſcichette ſeminali, i condotti delle quali ſi aprivano nella vagina.

Il terzo di queſti animali era fra i tre, e quattr' anni. La vagina eſternamente, come nella vacca, finiva internamente, ed un po' al di là dell' oriſizio dell' uretra in un ſacco cieco. L' utero chiuſo, diviſo nelle due corna all' eſtremità delle quali riſiedevano le ovaja. Mancavano i teſticoli. Solo accanto dell' utero ſi vedeva un vaſo deferente con molte interruzioni. Fra l' utero e la veſcica comparivano le veſcichette ſeminali, ed in vicinanza di queſte le eſtremità dei condotti deferenti, coi quali comunicando le veſcichette ſi aprivano inſieme nella vagina, come nelle oſſervazioni precedenti.

Deſideroſo io pure di replicare queſte oſſervazioni mi ſono diretto a S. E. Marcheſe Gherardo *Rangone* Miniſtro, e Segretario di Stato di S. A. S. Duca di Modena, Cavaliere d' elevati talenti, e noto già per lo zelo efficace in promovere le ſcienze, affinchè ottener poteſſi l' opportunità di riſcontrare queſti fatti. Alla prima ricerca nei vicini poderi dell' E. S. ſi è trovato che una vacca aveva depoſto pochi giorni prima due gemelli uno maſchio, l' altro apparentemente femmina. Senza cercare più oltre ha ordinato l' E. S. che foſſe cuſtodita, e nudrita la femmina. In capo a tredici meſi circa ne ho fatto la ſezione in preſenza dell' E. S., del Cav. *Roſa*, e Profeſſore *Savani*, ambedue allora miei Colleghi. L' eſterna configurazione di tutto il corpo di queſt' animale aveva molto del toro. Sotto il ventre comparivano i capezzoli, ed i corpi glandulari delle poppe. L' eſterne parti genitali erano più piccole che nella vitella d' un anno. Dall' angolo ſuperiore delle labbra ſortiva un corpicciolo (4) che alzandoſi verſo l' ano curvava la punta all' indietro a guiſa d' uncino. Dietro l' apice di queſto corpicciolo ſtava naſcoſto l' oriſizio dell' uretra (5). La vagina incurvata ſotto l' ure-

---

(4) *BBBB*
(5) *C.*

tra ſi ſtendeva internamente per lo ſpazio di tre dita traſverſe (6), poi finiva in un ſacco cieco. L' interna ſuperſicie della vagina era tutta ſparſa di rughe molli, e polpoſe. Il fondo cieco di queſto canale era poſteriormente unito per mezzo d' una cellulare compatta ad un corpo cavernoſo (7) che nato dall' iſchio deſtro, e ripiegato alquanto in ſe ſteſſo ſi allungava poſteriormente, e ſuperiormente ſin' a formare quel corpicciolo, che ſi vedea ſpuntare dall' angolo ſuperiore delle labbra. Paragonato queſto corpo colla clitoride della vacca ho trovato che ne aveva una grande ſomiglianza, sì perchè la clitoride ſteſſa vicino alla ſua origine ſi ripiega, ed attortiglia alquanto in ſe ſteſſa; come perchè il ſuo corpo cavernoſo non moſtra internamente alcun tramezzo, e finiſce eſſa pure in un apice acuto, ed un po' ricurvo. La principale, e forſe ſola differenza conſiſteva nella ſede; poichè la clitoride nella vacca ſcorre ſotto la vagina, e ſpunta all' angolo inferiore delle labbra; mentre nell' animale di cui ſi parla era collocata la clitoride ſopra la vagina, ed eſciva ſotto l' angolo ſuperiore delle labbra.

Aperto il ventre onde eſaminare gl' interni organi genitali, ſi è oſſervato che i teſticoli (8) erano rimaſti molto alti nel ventre; un po' più piccoli che nel toro d' un anno; ma però ben conſormati, e ſviluppati, tanto eſternamente, che nell' interna teſſitura. Detratto il muſcolo cremaſtere, da cui ciaſchedun era cinto, ſi vedea partire dall' epididimo il vaſo deferente, che dirigeva il ſuo corſo diſcendendo verſo la faccia poſteriore della veſcica. Ivi collocate erano le veſcichette ſeminali (9) colle quali comunicavano i vaſi deferenti, e ſi allungavano inſieme inferiormente in un condotto comune. Tanto le veſcichette, che i vaſi deferenti erano pieni d' un umor giallognolo. Cingeva il collo della veſcica urinaria un groſſo corpo glandolare (10) ſimile alla proſtata, il quale abbracciava inſieme l' uretra quaſi per tutta la ſua eſtenſione. Aperta la veſcica, e l' uretra ſecondo la loro lunghezza, ed introdotto uno ſpecillo per entro ciaſcheduno dei vaſi deferenti, ſono comparſi queſti nell' uretra (11) ai lati d' una prominenza che tenea luogo di capo gallinaceo. Immediatamente ſotto gli orifizj comuni ai vaſi deferenti, e veſcichette ſeminali l' uretra ſi proſondava a guiſa d' una foſſa ellittica ſcavata nel groſſo, e polpoſo corpo della proſtata (12) con qualche apparenza di ciò che chiamiamo bulbo dell' uretra; indi l' uretra nuovamente riſtretta, e ſempre cinta dalla proſtata ſcorrendo un po' obliquamente all' insù ſi apriva eſternamente, come è ſtato accennato, all' angolo ſuperiore delle labbra.

---

(6) *AAA.*
(7) *BBB.*
(8) *KK.*
(9) *GG.*
(10) *DDDD.*

Per poco che ſi rifletta ſopra la coſtruzione degli organi genitali di queſto animale appariſce chiaramente che gl' interni dagli orifizj dei vaſi ſeminali all' insù erano perfettamente maſchili, e gli eſterni femminei, ſe non del tutto almeno in gran parte, sì per la preſenza della vagina, e brevità dell' uretra, che per il corpo cavernoſo, il quale non differiva dalla clitoride, che nell' eſſer collocato nella parte ſuperiore della vagina.

Confrontando queſta oſſervazione con quelle del Sig. *Hunter*, parmi di potere inferire, che sì in quelle, che in queſta vi era un miſto d' organi maſchili, e femminei, colla differenza, che negli animali eſaminati dal Sig. *Hunter* gli organi genitali interni erano un compoſto d' ambedue i seſſi con più, o meno di perfezione; in queſto di cui ho riportata la ſtoria gl' interni erano unicamente e perfettamente maſchili, gli eſterni femminei

Son ben lontano dall' aſſerire che tanto quegli animali, che queſto meritaſſero il nome di veri, e completi Ermafroditi, a rigore di vocabolo. Solo mi riſtringo ad oſſervare, e provare ulteriormente, che anco negli animali perfetti, ſotto certe determinate circoſtanze, ſi generano degl' individui, che forniti ſono in un degli organi proprj di ciaſchedun ſeſ-

---

(11) *F*.
(12) *E*.

ſo, e che la natura ha, per così dire, fatto un paſſo anco negli animali detti perſetti verſo la coſtruzione d' un eſſere androgeno.

Vi ſono, come abbiamo indicato, delle varietà nella preponderanza degli organi dell' uno, o dell' altro ſeſſo combinati, e miſti in un medeſimo ſoggetto nei diverſi individui. Quindi è che io mi propongo d'eſaminare molti altri di queſti animali, e nelle varie claſſi in cui ſi generano, onde regiſtrarne le diverſe combinazioni.

Spiegazione della Tavola.

Il collo della veſcica, la proſtata, e l' uretra aperte inferiormente, cioè dalla parte del ventre dell' animale, poi rivolte all' insù, onde vedere più diſtintamente gli orifizj dei vaſi ſeminali nell' uretra. Le parti eſterne genitali ſono nella ſituazione loro naturale.

AAA. La vagina aperta.
BBB. Corpo cavernoſo ſimile alla clitoride.
C. L' orifizio dell' uretra.
DDDD. La proſtata.
E. Foſſa ellittica dell' uretra.
F. Gli orifizj dei vaſi ſeminali entro l' uretra.
GG. Le veſcichette ſeminali.
HH. L' eſtremità dei vaſi deferenti.
KK. I teſticoli.

OPPOSIZIONE

DEL NUOVO PIANETA

Oſſervata nel 1781

Dal Sig. GIUSEPPE SLOP DE CADENBERG Profeſſore d' Aſtronomia nell' Univerſità di Piſa.

FU oſſervato il pianeta il dì 22 e 23 Decembre al Quadrante *Murale* inſieme con le ſtelle η e μ dei Gemini e con una piccola ſtella, che nel Catalogo di Tobia Mayer è notata al n.° 245. La troppa vicinanza ſra i paſſaggi del pianeta e delle ſtelle η e 245 dei Gemini per il meridiano non ha permeſſo di oſſervare alle diviſioni del Quadrante la diſtanza delle due ſtelle dal vertice, onde non ſi è potuta notare la differenza fra la loro declinazione e quella del pianeta. Nella riduzione delle oſſervazioni ſi è fatto uſo per le ſtelle η e 245 dei luoghi preſi dal Catalogo di *Mayer*, e per la ſtella μ di quelli del Catalogo di *Bradlej*, e ſi è tenuto conto dei piccoli moti apparenti delle ſtelle dal dì 22 al dì 23 Decembre. I luoghi delle predette ſtelle ſono tutti calcolati per il dì 22 Decembre.

Dal Catalogo di Bradlej.

η dei Gemini	Aſcenſione retta	$3^{s}.\ 0^{g}.\ 26'.\ 2'',\ 6$
	Declinazione boreale	0. 22. 33. 15, 1
μ dei Gemini	Aſcenſione retta	3. 2. 26. 44, 4
	Declinazione boreale	0. 22. 36. 37, 4

Dal Catlogo di ſtelle Zodiacali dell' Ab. de la Caille.

η dei Gemini	Aſcenſione retta	3. 0. 26. 52, 4
	Declinazione boreale	0. 22. 33. 20, 9

μ dei Gemini Aſcenſione retta	3^{s}. 2^{g}. 26'. 35", 9
Declinazione boreale	0. 22. 36. 42, 2

Dal Catalogo delle ſtelle Zodiacali di Tobia Mayer.

η dei Gemini Aſcenſione retta	3. 0. 25. 59, 3
Declinazione boreale	0. 22. 33. 18, 7
Stella 245.^{ma} Aſcenſione retta	3. 1. 24. 33, 4
Declinazione boreale	0. 23. 40. 21, 5
μ dei Gemini Aſcenſione retta	3. 2. 26. 37, 9
Declinazione boreale	0. 22. 36. 41, 1

Il dì 22 *Decembre tempo medio* 11.^{ore} 55'. 58".

Differenza oſſervata fra il pianeta ed η dei Gemini

In Aſcenſione retta	+ 0. 0. 28. 56, 4
Aſcenſione retta del pianeta	3. 0. 54. 55, 7

22 *Decembre t. m.* 11.^{ore} 55'. 58"

Differenza oſſervata fra il pianeta e la ſtella 245.^{ma}

In Aſcenſione retta	— 0. 0. 29. 31, 4
Aſcenſione retta del pianeta	3. 0. 55. 2, 0

22 *Decembre t. m.* 11.^{ore} 55'. 58"

Differenza oſſervata fra il pianeta e μ dei Gemini

In Aſcenſione retta	— 0. 1. 31. 46, 5
In Declinazione	+ 0. 1. 6. 36, 5
Differenza in Declinazione corretta dalla refrazione	+ 0. 1. 6. 37, 7
Aſcenſione retta del pianeta	3. 0. 54. 57, 9
Declinazione boreale	0. 23. 43. 15, 1

Fatta una giuſta eſtimazione delle oſſervazioni (1) ſi hanno per l' iſteſſo tempo

---

(1) Vedi *Novi planetæ obſervationes & theoria* pag. 26.

I luoghi apparenti del pianeta.

Aſcenſione retta	3^s. 0^g. 54′. 57″, 5
Declinazione boreale	0. 23. 43. 15, 1
Longitudine	3. 0. 50. 18, 94
Latitudine boreale	0. 0. 15. 11, 8

Il 23 *Decembre tempo medio* 11.^{ore} 51′. 55″

Differenza oſſervata fra il pianeta ed η dei Gemini

In Aſcenſione retta	+ 0. 0. 26. 7, 6
Aſcenſione retta del pianeta	3. 0. 52. 7, 2

23 *Decembre t. m.* 11.^{ore} 51′. 55″

Differenza oſſervata fra il pianeta e la ſtella 245.^{ma}

In Aſcenſione retta	— 0. 0. 32. 20, 7
Aſcenſione retta dal pianeta	3. 0. 52. 12, 9

23 *Decembre t. m.* 11.^{ore} 51′. 55″

Differenza oſſervata fra il pianeta e μ dei Gemini

In Aſcenſione retta	— 0. 1. 34. 36, 2
In Declinazione	+ 0. 1. 6. 36, 7
L' iſteſſa corretta dalla refrazione	+ 0. 1. 6. 37, 9
Aſcenſione retta del pianeta	3. 0. 52. 8, 4
Declinazione boreale	0. 23. 43. 15, 3

Onde fatta l' eſtimazione delle oſſervazioni ſi avranno per l' iſteſſo tempo

I luoghi apparenti del pianeta.

Aſcenſione retta	3. 0. 52. 8, 5
Declinazione boreale	0. 23. 43. 15, 3
Longitudine	3. 0. 47. 44, 18
Latitudine boreale	0. 0. 15. 11, 0

La longitudine del Sole per il tempo dell' oſſervazione del dì 22 Decembre ſi ha ſecondo le tavole del *Mayer* 9^s. 1^g.

36′. 13″, 5, onde in quel tempo era già ſeguita l'oppoſizione, e col moto relativo del pianeta dal Sole era ſtato percorſo un arco di 0^{g}. 45′. 54″, 6.

Il moto del pianeta in longitudine dal dì 22 al 23 Decembre fu di 0^{g}. 2′. 34″, 76, onde il ſuo moto diurno ſi ha di 0^{g}. 2′. 35″, 19, col qual moto e col moto diurno del Sole 1°. 1′. 9″, 5, il ſurriferito arco fu percorſo in 17.^{ore} 17′. 9″, quali ſottratte dal tempo dell' oſſervazione del 22 Decembre danno l' apparente oppoſizione per il dì 21 dell' iſteſſo meſe a 18.^{ore} 38′. 49″ di tempo medio. La longitudine del Sole era in quel tempo 9^{s}. 0^{g}. 52′. 10″, 7, e perciò la longitudine apparente geocentrica del pianeta nel momento dell' oppoſizione 3^{s}. 0^{g}. 52′. 10″, 7.

Per avere la longitudine eliocentrica biſogna correggere la longitudine geocentrica con due equazioni, la prima di − 8″, 0 per l' aberrazione e nutazione del pianeta (2), la ſeconda di + 1, 0 per l' aberrazione del Sole (3), onde la longitudine vera eliocentrica era 3^{s}. 0^{g}. 52′. 3″, 7, alla quale aggiungendo 6″, 1 ſi avrà la longitudine nell' orbita per il momento dell' oppoſizione 3^{s}. 0^{g}. 52′. 9″, 8.

Oppoſizione del nuovo pianeta oſſervata l' anno 1782.

Le oſſervazioni furono fatte come le precedenti al Quadrante *Murale*. Il pianeta fu paragonato alle ſtelle *H*, η, e μ della coſtellazione dei Gemini nelle notti dei 22 e 25 Decembre. Nel dedurne i luoghi del pianeta ci ſiamo ſerviti del Catalogo di *Mayer* per la ſtella η, e del Catalogo di *Bradlej* per le ſtelle *H* e μ avendo riguardo ai loro piccoli moti apparenti dal 22 al 25 Decembre. I luoghi delle fiſſe ſono deſcritti per il dì 15 dell' iſteſſo meſe.

Dal

---

(2) Vedi *Obſervationes ſiderum habitæ Piſis ab anno* 1774 *ad annum* 1778 pag. 122.

(3) Vedi *Novi Planetæ obſervationes & theoria* pag. 16 e 17.

Dal Catalogo di Bradlej.

H dei Gemini Aſcenſione retta	2^s.	27^g.	$44'$.	$16''$, 8
Declinazione boreale	0.	23.	15.	36, 5
η dei Gemini Aſcenſione retta	3.	0.	27.	3, 9
Declinazione boreale	0.	22.	33.	15, 5
μ dei Gemini Aſcenſione retta	3.	2.	27.	45, 5
Declinazione boreale	0.	22.	36.	37, 1

Dal Catalogo di ſtelle Zodiacali dell' Ab. de la Caille.

H dei Gemini Aſcenſione retta	2.	27.	44.	10, 4
Declinazione boreale	0.	23.	15.	38, 6
η dei Gemini Aſcenſione retta	3.	0.	27.	53, 7
Declinazione boreale	0.	22.	33.	21, 3
μ dei Gemini Aſcenſione retta	3.	2.	27.	36, 1
Declinazione boreale	0.	22.	36.	41, 9

Dal Catalogo di Mayer.

H dei Gemini Aſcenſione retta	2.	27.	44.	19, 4
Declinazione boreale	0.	23.	15.	39, 1
η dei Gemini Aſcenſione retta	3.	0.	27.	0, 6
Declinazione boreale	0.	22.	33.	19, 1
μ dei Gemini Aſcenſione retta	3.	2.	27.	39, 0
Declinazione boreale	0.	22.	36.	40, 8

Il 22 Decembre a $12.^{ore}$ $17'$. $17''$. *di tempo medio.*

Differenza oſſervata fra il pianeta ed *H* dei Gemini

Nell' Aſcenſione retta	+	0.	8.	16.	50, 8
Nella Declinazione	+	0.	0.	24.	29, 0
Nell' iſteſſa corretta dalla refrazione	+	0.	0.	24.	29, 4
Aſcenſione retta del pianeta		3.	6.	1.	6, 7
Declinazione boreale		0.	23.	40.	5, 9

22 *Decembre* 12.^{ore} 17'. 17''. *t. m.*

Differenza oſſervata fra il pianeta ed η dei Gemini

Nella retta Aſcenſione	+	0^s.	5^g.	34'.	0'', 6
Nella Declinazione	+	0.	1.	6.	47, 2
Differenza nella Declinazione corretta dalla refrazione	+	0.	1.	6.	48, 4
Aſcenſione retta del pianeta		3.	6.	1.	0, 7
Declinazione boreale		0.	23.	40.	7, 5

22 *Decembre* 12.^{ore} 17'. 17''. *t. m.*

Differenza oſſervata fra il pianeta e μ dei Gemini

In Aſcenſione retta	+	0.	3.	33.	19, 3
In Declinazione	+	0.	1.	3.	30, 9
L' iſteſſa corretta dalla refrazione	+	0.	1.	3.	32, 0
Aſcenſione retta del pianeta		3.	6.	1.	4, 3
Declinazione boreale		0.	23.	40.	9, 1

Fatta come nell' altra oppoſizione l' eſtimazione delle oſſervazioni ſi avranno per l' iſteſſo tempo

I luoghi apparenti del pianeta.

Aſcenſione retta	3.	6.	1.	3, 9
Declinazione boreale	0.	23.	40.	7, 5
Longitudine	3.	5.	30.	36, 0
Latitudine boreale	0.	0.	18.	48, 9

25 *Decembre* 12.^{ore} 4'. 57''. *t. m.*

Differenza oſſervata fra il pianeta ed *H* dei Gemini

In Aſcenſione retta	+	0.	8.	8.	23, 7
In Declinazione	+	0.	0.	24.	44, 5
Queſta corretta dalla refrazione	+	0.	0.	24.	44, 9
Aſcenſione retta del pianeta		3.	5.	52.	40, 5
Declinazione boreale		0.	23.	40.	21, 4

25 *Decembre* 12.^{ore} 4′. 57″. *t. m.*

Differenza oſſervata fra il pianeta ed η dei Gemini

Nell' Aſcenſione retta	+	0^{s}.	5^{g}.	25′.	32″, 1
Nella Declinazione	+	0.	1.	7.	3, 9
Queſta corretta dalla refrazione	+	0.	1.	7.	5, 1
Aſcenſione retta del pianeta		3.	5.	52.	32, 7
Declinazione boreale		0.	23.	40.	24, 2

25 *Decembre* 12.^{ore} 4′. 57″. *t. m.*

Differenza oſſervata fra il pianeta e μ dei Gemini

Nell' Aſcenſione retta	+	0.	3.	24.	50, 7
Nella Declinazione	+	0.	1.	3.	45, 1
Queſta corretta dalla refrazione	+	0.	1.	3.	46, 2
Aſcenſione retta del pianeta		3.	5.	52.	36, 2
Declinazione boreale		0.	23.	40.	23, 3

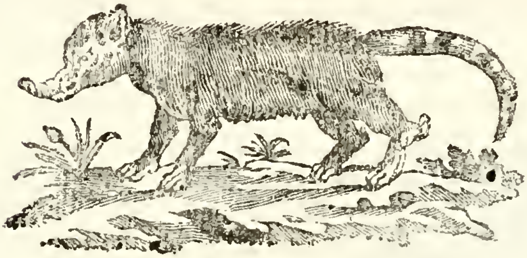
Secondo la ſolita eſtimazione ſi dedurranno per l' iſteſſo tempo

I luoghi del pianeta.

Aſcenſione retta	3.	5.	52.	36, 5
Declinazione boreale	0.	23.	40.	23, 0
Longitudine	3.	5.	22.	50, 6
Latitudine boreale	0.	0.	18.	45, 2

Il dì 25 per il tempo dell' oſſervazione ſi trova dalle tavole del *Mayer* la longitudine del Sole 9^{s}. 4^{g}. 24′. 59″, 42. Prima dunque che ſeguiſſe l' oppoſizione doveva col moto relativo del pianeta dal Sole deſcriverſi un arco di 57′. 51″, 18, il quale ſecondo il moto diurno del Sole 1^{g}. 1′. 10″, 9 ed il moto diurno del pianeta 2′. 35″, 63 ſi percorre in 21.^{ore} 46′. 16″, onde l' oppoſizione apparente del pianeta ſeguì il dì 26 Decembre a 9.^{ore} 51′. 13″ di tempo medio.

La longitudine del Sole ſi ha per quel tempo dalle tavole 9^{s}. 5^{g}. 20′. 28″, 22, e perciò la longitudine apparente del pianeta 3^{s}. 5^{g}. 20′. 28″, 22. Per avere la longitudine corretta eliocentrica ſi farà uſo, come ſopra, delle due equazioni, la prima di $-14''$, 27 per l' aberrazione del pianeta, la ſeconda di $+1''$, 04 per l' aberrazione del Sole, dalle quali ſi deduce la ſuddetta longitudine $3^s.\ 5^g.\ 20'.\ 14''$, 99, a cui aggiungendo $7''$, 47, ſi ha la longitudine nell' orbita $3^s.\ 5^g.\ 20'.\ 22''$, 46 nel momento dell' oppoſizione, nel qual tempo la latitudine geocentrica era $0.^g\ 18'.\ 45''$, 7 boreale.



LETTERA SECONDA

RELATIVA A DIVERSI OGGETTI FOSSILI E MONTANI.

Del Sig. Ab. LAZARO SPALLANZANI Regio Profeſſore
di Storia Naturale nell' Univerſità di Pavia.

Al Sig. CARLO BONNET, Membro delle più illuſtri
Accademie di Europa.

Scritta il giorno 12 Febbrajo 1784.

§. I.

Soſtanze foſſili oſſervate a Portovenere, e ne' ſuoi contorni. Fenomeno ſorprendente oſſervato nella Riviera di Ponente.

QUanto l' interiore del picciol Borgo di Portovenere, e le rupi attornianti il contiguo golfo dentro alle bocche, ſono immuni dalle tempeſte, altrettanto ne vanno ſoggette le parti giacenti al di fuora, battute furioſamente da' colpi di mare, quando imperverſano i due formidabili venti, ſcilocco, e libeccio. Queſt' ultimo ſegnatamente caccia i ſollevati maroſi con tanto impeto, e a tale altezza contro gli ſcogli che ſervono di parapetto e difeſa a quell' antica terricciuola, che ſembra allora che il mare minacci d' interamente inghiottirla. Dirovvi, Amico illuſtre e cariſſimo, d' eſſermi trovato preſente ad una delle più terribili libecciate; e quantunque io mi vedeſſi in ſicuro, pure non ſaprei rappreſentarvi l' orrore, e il ribrezzo, che cagionò nell' agitato mio animo quel non più viſto ſpettacolo. Ho voluto con eſatte miſure prendere la maggiore altezza, a che ſollevanſi i fiotti nelle più fiere burraſche, e quando io ve ne parlerò, argomentar voi potrete quanto fuori delle bocche del golſo ſi renda formidabile il mare. In grazia dunque della prepotente ſua forza le alte rupi ſaſſoſe ſovraſtanti a Portovenere dalla parte del mezzodì vengono lentamente corroſe e diſtrutte, e a un ſimil guaſto ſoggiaccion pur le tre iſole proſſime, *Tiro*, *picciol Tiro*, e *Palmaria*, ma diſtintamente queſt' ultima, la quale quanto è agiata e ſoave a ſalire dalla parte del golſo, ed è tutta coronata di alberi, e piante fruttiſere, altrettanto dall' altra che guarda il mare è deſerta, e inacceſſibile, e per ogni dove ripiena di precipizj, di ruine, di orrori. E a ſomiglianti diſaſtri ho pur veduto andar ſoggette tutte quelle pendici, che nel reſtante della Riviera di Ponente, e nell' altra pur di Levante ſerrano il mare, come buona parte altresì di quell' altre, che inoltranſi alle coſte della Provenza. E a mio avviſo non ha dubbio alcuno, che da queſte continue corroſioni guadagnato ſu la terra in tutti queſti luoghi non abbia il mare; e parlando della Palmaria che è la più grande e la più eminente di queſte tre iſole, mi lunſingherei di aver dati baſtanti, per ragionevolmente inferire che quel lungo e facile pendío, che preſentemente ha dentro del golſo, lo aveſſe anche una volta al di ſuora, ma che col lento volger dei ſecoli ſia ſtato ruinato e diſtrutto dai violenti colpi di mare. Medeſimamente dai rifleſſivi eſami da me fatti ſu la ſtruttura di queſte tre iſole crederei di poter far vedere che a' tempi antichiſſimi non eran già tre iſole diſtinte, ſiccome ſono preſentemente, ma sì bene una ſola, o a dir meglio una peniſola continovata con Portovenere.

Ella è coſa preſſo i Naturaliſti notiſſima che per ammottamènti di terre, per tremuoti, o per la foga di precipitoſi torrenti ſcoſcendono talvolta fino alle fondamenta certi fianchi di monti, per cui ſvelate rimangono le occulte lor viſcere, venendo in tal guiſa ad averſi quella ſpecie di notomia dentro alla terra, che indarno ſi ſarebbe ſperata dagli uomini. Tanto il continuo battere dell' onde marine ha prodotto negli altiſſimi ſcogli delle due Riviere di Genova, ma ſopra tutto nell' iſola Palmaria ai due fianchi, che guardano Mezzogiorno, e Levante. Quivi è dove un Fiſico indagatore adagiatoſi in qualche navicello ſul mare quando non è agitato da' venti, e tenendo gli occhi ſiſamente rivolti a queſti due lati, può ſoddisfar con piacere gli avidi ſuoi deſiderj. Io al certo ne' diverſi miei viaggi terreſtri non ſaprei dire in genere di *ſtratificazioni* di avere mai veduto oggetto più variato, nè più iſtruttivo di queſto. L' andamento adunque degli ſtrati componenti le grandiſſime rupi che terminano i ſuddetti due lati della Palmaria, in ogni parte preſſochè verticali, la diverſa groſſezza di queſti ſtrati, la loro figura, la ſuperficie, il mutuo intreccio, la varia direzione con l' orizzonte, ſon tutte coſe ch' io mi riſerbo a deſcrivere nella mia Opera. Quivi farò anche parola di varie buche, ed ample caverne, nel vivo ſaſſo prodotte dall' empito dei maroſi, atte eſſe pure a fornirci utili cognizioni, mirandole ben bene con l' occhio, e ponderandole con la mente. Preſentemente parlerovvi ſoltanto della natura di queſti ſtrati, e dirovvi non averne trovato pur uno che calcare non ſia. Che anzi tutta l' iſola ſuddetta, che ha il giro di tre miglia all' incirca, non è che un maſſo di ſomigliante materia, veſtito ſoltanto dalla parte che mira il golfo di una croſta terroſa, della groſſezza di pochi piedi, ed eſſa pure in buona parte calcare, dentro cui vivono, e moltiplicano molti vegetabili di varia ſpecie, e grandezza. Solamente queſto gran maſſo non può dirſi formato d' un pezzo ſolo, ma d' un incredibile numero di ſuoli lapidei, o tavolati o ſtrati che dir li vogliamo, combaciantiſi ſtrettamente inſieme, ſenza che mai o quaſi mai intramettano ſtrato alcuno di rena o o di terra. E ciò ch' io dico della calce, e della ſtratificazione, onde riſulta la Palmaria, ha luogo nè più nè meno per l' altre due iſole, anzi per gli ſcogli che circondano il golfo, e per la più parte di quelli che ſono littorali alle due Riviere. Soltanto a poca diſtanza da queſto verſo Ponente ſollevaſi un' alta rupe alle ſponde del mare, compoſta di ſciſſile pietra margacea, nella quale domina l' argilla, e che è commendabile per due ſingolarità, l' una di avere alla ſuperficie belliſſime macchie dendritiche, l' altra di rinchiudere delle marcaſite teſſulari.

Il marmo di Portovenere è uno di quelli che è nominato con lode in Italia, ed anche fuori. E ciò meritamente non tanto pel nobile luſtro che dal pulimento riceve, quanto per le vaghe dorate macchie, che ſpiccano mirabilmente ſu d' un ſondo morato. Cotal marmo ſi cava preſentemente in due luoghi, all' eſterno canto della Palmaria a Levante, e in terra ſerma poco lungi dal golfo, e da un Muniſtero detto le *Grazie*. Ommettere non doveva d' inſtituire i dovuti eſami intorno a queſte due cave, nè laſcierò a ſuo tempo di porli ſotto l' occhio del pubblico. Del rimanente non ſono queſti i due ſiti unici, dove ſi può eſtrarre un tal marmo. Moltiſſimi altri luoghi di queſt' iſola ne abbondano. Lo ſteſſo è pure di più parti del vicino continente, e il medeſimo Borgo di Portovenere, piantato tutto ſul nudo ſcoglio, può dire di averlo dentro al ſuo ſeno. Di fatti molti ſtrati dello ſcoglio non ſono che di un tal marmo, con queſto ſolo divario che è privo di quelle macchie giallo-dorate, o che non è tanto ricco di eſſe. Generalmente poi il marmo denominato di Portovenere non è come tanti altri marmi che formano monti interi o pezzi di monte, ſenza che meſcolati vadano a materie ſtraniere. Quello, di cui parlo, trovaſi per lo più in compagnia d' una rozza pietra calcare, più dura di lui, e d' un cenerognolo ſcuro, per liberarlo dalla quale, e così poterlo aver puro, fa ſovente d' uopo di molta ſpeſa.

Alcuni ſcrepoli, e ſpaccature degli ſcogli calcari fin qui menzionati, gli ho trovati riempiuti d' uno ſpato ſtalattitico, parte amorſo, e parte criſtallizzato, ignoto affatto a que' popolani, e che per la lucentezza che nel pulirlo riceve, per la nobiltà dei colori, e per la ſolidità e union delle parti, ſi rende prezioſo per varj lavori, come per mezzo d' un valente Artefice l' ho io potuto chiaramente vedere. E queſta qualità di pietra paraſſitica ſuole produrſi in que' luoghi, dove ſi depoſitano o ſcorrono l' acque piovane, pregne di particelle calcari corroſe da' mentovati ſcogli, le quali particelle ſciolte quivi appunto dalle ſuddette acque, danno origine a quello ſpato, alla generazione del quale è facile che concorra eziandio un principio acido vitriolico,

Era coſa da non traſcurarſi il cercare ſe quella parte di ſcogli che ſta ſotto al mare è di natura diverſa dall' altre che gli ſopraſtanno, ed ho trovato che no, altro mai non eſſendo le parti inferiori all' acqua marina che una continuazione delle ſuperiori. E queſto pur ſi verifica nel caſo che lo lo ſcoglio di verticale che era ſopra del mare, piega al di ſotto di eſſo e viene a farſi preſſochè orizzontale.

Tutte le diligenze da me uſate per vedere ſe quella catena di ſcogli, che circonda il golfo e che forma le tre iſole, imprigiona qualche teſtaceo o croſtaceo foſſile, ovveramente qualche impronto di eſſi, riuſcite ſono infruttuoſe. Il rimanente altresì degli ſcogli littorali della medeſima Riviera di Levante, che ho potuto viſitare, mi ha offerta la medeſima ſterilità. Ma ſu di un tal genere di corpi foſſili quanto mai da queſta Riviera differiſce l'altra di Ponente! Viſitata avendola l'autunno del 1781, ho veduto non ſenza ammirazione, che cominciando alcune miglia al di ſopra del Finale di Genova, camminando verſo Ponente il reſtante di quella Riviera, anzi andando ſino al Forte di Monaco, che è quanto dire ſcorrendo un tratto di paeſe di 70 e più miglia, tutte quelle montagne finitime al mare, anzi quelle medeſime che alquanto s' inoltrano nel continente, contengono teſtacei. Sebbene che diſſi contengono? Oltre ai teſtacei che quivi ſi conſervano interi, ſe con lente ſi eſamini la pietra componente que' monti, trovaſi in tutto o quaſi in tutto riſultare da un minutiſſimo tritume o disfacimento di eſſi. E queſta pietra *lumachella* per eſſere compatta anzi che no, ſerve in que' paeſi per le fabbriche private e pubbliche, e ſi eſtrae da una montagna vicina al Finale, nella quale ſono le cave. Ho eſaminato queſte cave che ſono antichiſſime, e che ſi profondano nel ſeno del monte, e le riputerò meritevoli d' eſſere con qualche dettaglio deſcritte. Credereſte? Tutto il Finale, formato di due lunghe borgate, tutti i villaggi circonvicini, una porzione della città di Genova per le oſſervazioni da me fatte, non ſono in maſſima parte fabbricati che di queſta pietra, che è quanto dire di teſtacei. E riflettete che ad onta dei tolti tanta è la immenſità dei teſtacei che rimangono, che ſembra eſſere ſtato levato da un gran monte un granello di arena. Ma voi facilmente farete curioſo di ſapere da me quali ſono le ſpecie di queſti teſtacei foſſili, e ſicuramente la mia riſpoſta vi ſorprenderà, quando io vi dico, ridurſi tutti a una ſpecie ſola. Egli è adunque un pettine di mediocre grandezza, e queſto d' una qualità ſola, che parte intiero, parte ridotto in minuzzoli compone tutta quell' eſtenſion di montagne, ſenza che trovato io v' abbia mai frammiſchiato verun teſtaceo o croſtaceo, malgrado le più minute mie diligenze nell' eſaminar queſta pietra. Di queſta ſola ſpecie di pettine ſono adunque formate in maſſima parte le fabbriche del Finale, quelle de' paeſi circonvicini, e non poche di quelle di Genova. Ma come mai una ſpecie ſola di conchiglia, che è di origine marina, ſi è potuta unire in numero sì prodigioſo, sì immenſo, che appena ce lo poſſiamo figurar col penſiero? E più ancora creſcerà in voi lo ſtupore s' io vi dirò eſſere queſta ſatta di conchiglia viva del tutto ſconoſciuta a' peſcatori del mare Liguſtico, e di quel di Provenza. Laſcio alla voſtra gran mente il meditare ſu queſto aſtruſiſſimo fenomeno, che finora mi ſembra unico fra i tanti riferiti dai Naturaliſti intorno ai corpi *marino-montani*.

§. II.

Maraviglioſa Fontana d' acqua dolce che gorgoglia in mezzo all' acqua ſalſa del golfo. Ricerche intorno alla ſua origine.

Queſta fontana che è diſtante da terra 65 piedi, e dalla Spezia un miglio all' incirca, ſi ſolleva di alcuni pollici dal livello del mare, formando una ſpecie di colmo circolare del diametro di 20 piedi, il qual colmo è per ogni dove ripieno di gorgogli, eziandio quando il mare è quietiſſimo, e la ſua acqua ſi oſſerva ſempre torbidiccia, ma più ancora ne' tempi piovoſi, a differenza della circoſtante che è ſempre chiara. In grazia di queſti gorgogli non è poſſibile che una ſemplice barca o un navicello poſſa arreſtarſi nel centro del colmo, venendo ſubito cacciato alla circonferenza. Sentirete però l' artificio da me immaginato, e per cui mi è riuſcito di ſtar fermo a mio talento nel bel mezzo della fontana, giacchè troppo mi premeva di eſaminarla a dovere, così alla ſuperficie, che nel ſuo fondo. Adunque guſtata detta fonte alla ſuperficie non è niente dolce, ma ſolamente meno ſalſa che la circoſtante acqua marina. Scandagliata la ſua profondità, ella è di piedi 38 $\frac{1}{2}$, e il piombino giunto che ſia in vicinanza del fondo, ſi ſente tremare inſieme alla cordicella, a cui reſta appiccato, il qual tremore ſiccome non ſi manifeſta in altri luoghi, così è chiaro che viene prodotto dall' acqua della fontana, che ſcaturendo dal ſoggetto ſuolo, lanciaſi con impeto all' insù. Ma ſe l' acqua della fontana alla ſuperficie era meno ſalſa, dove cioè non poteva non eſſere grandemente miſchiata alla marina, queſta era una preſunzion troppo forte per credere che nel fondo eſſer doveſſe interamente dolce. Ad accertarſi però di queſto facea di meſtiere trarre da quel fondo qualche porzione di acqua, e recarla fuori del mare, ſenza che ſi meſcolaſſe punto all' acqua marina. Ma come giungere a conſeguir ciò? Parlerovvi a ſuo tempo della macchinetta felicemente inventata, mercè cui ho potuto aver l' acqua fontana nello ſtato medeſimo in cui è quando ſgorga da quel fondo, e dirovvi adeſſo di averla trovata torbidiſſima, anzi ſangoſa, ma dolce. Vi aggiugnerò due altre circoſtanze, l' una ſi è che queſt' acqua dolce in agguaglio a quella del mare è freddiſſima, il che naſce per venir di ſotterra; l' altra che la macchinetta che era di latta, reſtò una volta, quando toccava il fondo, ſchiacciata in un lato, la qual coſa a mio avviſo non potè accadere, che dal violento urto dell' acqua dolce sboccante dal fondo, che cacciò la macchinetta contro qualche pietra o pezzo di ſcoglio.

L' illuſtre mio Concittadino, Antonio *Vallisneri* nel venire da Genova nell' anno cinque di queſto ſecolo viſitò queſto mirabil fonte, ma eſſendo egli di paſſaggio null' altro oſſervò ſe non ſe que' ſuperficiali gorgogli, la cui acqua al ſuo guſto gli parve dolce; ma il vero è, come già diſſi, e come ognuno che paſſa per quel luogo ſe ne può accertare, che per la ſalſezza ſua non ſi allontana di molto da quella del mare. Fu anche condotto quel celebre Naturaliſta alla viſita d' una caverna ſotto d' un monte fra Reco, e la Spezia, dentro la quale que' coloni gli fecero credere che venivano ingojate tutte l' acque de' luoghi circonvicini, che a loro detta erano le generatrici della più volte mentovata fontana. Ma recatoſi egli ſul luogo, ben toſto ſi accorſe dell' inganno, giacchè in quella caverna non mettea foce che un rigagnolo poveriſſimo d' acque (*a*). Non ſo ſe l' amor proprio m' inganna, dicendovi ch' io crederei d' eſſere ſtato lo ſcopritore benavventuroſo di un sì ammirando fenomeno. Certamente due groſſi torrenti, ſituati a' fianchi d' un monte non più di tre miglia diſtante dalla Spezia, e per oppoſte direzioni unentiſi in uno, e precipitanti le loro acque in un amplo baratro inacceſſibile, riboccante mai ſempre delle medeſime, nelle vampe eziandio più cocenti del ſollione, ſembrano eſſi (per le ragioni che allegherò altrove) ſomminiſtrane l' inceſſante alimento a quella rigoglioſa capaciſſima polla, che attraverſo del mare s' inalza.

Poche miglia diſtanti da queſto baratro nel territorio di Caſale ſi trovano alcune miniere di magneſia, che per lo ſpaccio che ſe ne fa a Livorno, e a Venezia, ſono di qualche utilità a' proprietarj, ma che loro eſſer potrebbero incomparabilmente più proficue ſe aveſſero un po' più d'arte nel ſaperle cavare. E queſta pietra che ſi trae pure da altri luoghi adjacenti, da me eſaminata ne' ſiti nativi, e di cui non laſcierò di ragionare, ſi può dire che ſia l' unico minerale finora conoſciuto in que' paeſi.

§. III.

Grotta ſopra Carrara; altra in vicinanza di Equi, oſſervate.

Uſcendo dalla bocca più grande del golfo, poſta tra la Palmaria, e le radici delle Panie, ed andando terra terra ſi preſenta a ſiniſtra dopo il cammino di 12 miglia un inclinato ſpazioſo piano terminante col mare, ricco in ogni parte di piante fruttifere, e dove una volta ſi ergeva la celebre Luni, della quale antichiſſima città ſi può dire come di tante altre diſtrutte che *ſeges eſt*, *ubi Troja fuit*, non reſtando di lei che i ruinoſi avanzi d' un ignobile Anfiteatro. A riſerva di queſto monumento d' antichità, che con piacere è ſtato da me diligentemente eſaminato, e di cui non crederò

(*a*) *Vallisner*. Oper. in fog. T. III.

affatto alieno al mio inſtituto il dar qualche conto, per tutto quel piano, andando anche ſino a Carrara, non ho trovato coſa che allettar poteſſe l' Oſſervatore. Solamente mezzo miglio al diſopra di queſta fiorente città prima di arrivare alle cave de' marmi verſo la metà d' una pendice ſaſſoſa ſi preſenta l' anguſto foro d' una nera caverna, che dopo l' averla io viſitata da cima a fondo con uomini avanti che portavano fiaccole acceſe, la trovai sì ricca di bizzarrie, di maraviglie, di fenomeni iſtruttivi, ch' io dir non ſaprei ſe vi ſia altro luogo ſotterraneo tanto ferace per l' Orittologo d' intereſſanti notizie. Voi ſapete quanto è ſalita in fama la Grotta di Antiparo, deſcritta prima d' ogni altro dal Sig. di *Noïntel*, ed in ſeguito più filoſoficamente dal celebratiſſimo *Tournefort*, reſa anche da lui più famoſa per le credute vegetazioni di marmi colà dentro ſcoperte. Ma o io m' inganno a partito, o alla grotta di Levante è di molto preferibile la Carrareſe, che ha di lunghezza un miglio e un quarto ſotterra, che ſi dirama in più altre grotte ſubalterne, che ora ſi reſtrigne in anguſti viottoli, ora ſi allarga in più ſtanze, e grandioſe ſale, che preſenta un' immenſità di belliſſime pietre acquee d' ogni grandezza, d' ogni forma, d' ogni maniera, che nel vivo ſaſſo a un' enorme profondità del monte manifeſta il corſo, la varietà, la natura degli ſtrati componenti, dentro cui ſcorrono romoreggiando due torrenti, e che termina in un picciol lago d' acqua limpidiſſima. Credo al certo ch' io non farovvi coſa diſcara quando vi metterò ſott' occhio particolarizzati tutti queſti fenomeni. Nè io allora vo' tacervi i pericoli che incontrai nel viſitare queſta memorabil caverna, per ſuperare i quali dovetti più d' una volta appendermi a funi, e così appeſo paſſar ſopra profondi abiſſi, ed orribili precipizj; e per queſto appunto io non trovai che pochi uomini arditi, ed aſſuefatti ad affrontare i pericoli dentro le cave de' marmi, che voleſſero eſſermi a compagni in queſto mio ſotterraneo viaggio.

Il prelodato *Vallisneri* nell' elaboratiſſimo ſuo Trattato *delle fontane* parla di due ammirabili caverne, che per eſſere non molto diſtanti dal Carrareſe m' invogliai di oſſervare, anche per vedere ſe da quel tempo a queſta parte, che è quanto dire dopo 78 anni, ſoggiaciute erano a qualche conſiderabile cangiamento. La prima vien detta la *Buca d' Equi*, ſituata nel territorio di Fivizzano lontana 9 miglia circa da Carrara. La ſeconda ſi appella la *Grotta che urla*, poco ſopra Forno Volaſtro. Della prima cade ora il deſtro di ragionare, della ſeconda parlerò più opportunamente in altro luogo di queſta lettera. Dopo adunque l' aver fatte le neceſſarie oſſervazioni dentro alla mentovata grotta di Carrara, mi portai a viſitare quella d' Equi, che è un piccioliſſimo villaggio ſepolto come in un baratro fra orride montagne, e ſalutato appena per due ore nell' invernale ſtagione dal ſole. Sebbene recatomi ſul fatto, ed eſaminatolo con attenzione, toſto m' avvidi che tanto eſſo diſcorda da quello che ce ne dice il Naturaliſta di Reggio, ch' io crederei di far torto ad un uomo sì diligente, sì oculato, sì ſagace, s' io ſupponeſſi che quella grotta oſſervata egli l' aveſſe co' proprj occhi; che piuttoſto mi farò a penſare che attenuto ſiaſi alle relazioni di qualche ineſperto. Laſciata però al preſente la deſcrizione della medeſima io qui altro non farò che toccare le irrifleſſioni, e gli sbagli che ſi leggono nel libro del *Vallisneri*. Egli ci dice in primo luogo che detta grotta è diſtante da Equi mezzo miglio, quando ne è lontana al più cento piedi. Nè vi è pericolo di equivoco, in quanto che vi ſia forſe colà più d' una grotta, mentre oltre al non eſſervene che una ſola, e al portare anche adeſſo il medeſimo nome, con cui fu chiamata dal *Vallisneri*, queſto Fiſico nel fiſſar la montagna dentro cui s' interna, e nel deſcriverne la bocca o l' ingreſſo, viene con troppa evidenza ad individuarla per quella ſteſſa che miraſi anche al dì d' oggi. In ſecondo luogo l' interna forma, e configurazione io l' ho trovata in buona parte diverſa da quella che viene da lui rappreſentata. Terzo ei ci dice che da una crepatura interna di quello ſpeco eſce un fonte d'acqua perenne, da cui riceve il primo alimento il fiume Lucido; quando tal crepatura, che ci eſiſte anche adeſſo, non manda fuori acqua che dopo parecchi giorni di pioggia, e quella mattina ch' io la viſitai, era aſciuttiſſima, non oſtante che piovuto foſſe tutta la notte. Detto fiume poi ho io veduto che tragge la ſua origine da tutt' altro luogo. Finalmente egli è falſo che in certi tempi nuvoloſi, e ſiroccali eſca dalla bocca della caverna un profluvio d' acque, come ci fa ſapere il chiariſſimo Autore. Di queſt' ultimo fatto, come altresì che l' acqua non eſca da quella capace crepatura ſe non ſe dopo lunghe non interrotte pioggie, ſono ſtato aſſicurato da più perſone di Equi, da me interrogate, e degniſſime di fede, alcune delle quali decrepite d' età, ma di mente freſca, mi hanno atteſtato che a loro memoria, e a quella ancora de' loro avoli l' interior forma della grotta è ſempre reſtata la ſteſſa; e però non ſi può ſoſpettare che dopo la relazione di quel Fiſico ſia nato da queſta parte cangiamento eſſenziale.

§. IV.

Oſſervazioni inſtituite alle cave dei marmi di Carrara, e ſu le Panie.

Non avrò difficoltà alcuna di farmi a parlare di queſte rinomatiſſime cave, non oſtante che ne' ſuoi *viaggi della Toſcana* v' abbia impiegato un intero capo il chiariſſimo Sig. *Targioni*. Se queſto Naturaliſta le aveſſe eſaminate egli ſteſſo, avrei forſe creduto opera perduta l' entrare io in queſta indagine. Ma chiunque leggerà quel capo ſi avvedrà che non s' avvolge che d' erudizione, e di quanto ſu queſti marmi era ſtato detto da *Strabone*, da *Livio*, da *Dante*, e da altri antichi Scrittori. Oltracciò non mi è noto che neppure altri Fiſici ſi ſieno eſpreſſamente portati ſul luogo per eſaminare le ſuddette cave. Ho adunque creduto eſſere opportuno l' entrare io in queſta diſamina; e però ſu quelle aſpriſſime montagne vi ho impiegato due ſettimane, non d' altro quaſi mai occupato che nell' oſſervare non tanto que' luoghi dove attualmente ſi cavano marmi, quanto quegli altri moltiſſimi, in cui ſi cavavano una volta, e che ora ſono ſtati abbandonati; e ciò per avere io più termini di confronto, onde giungere a conoſcer meglio l' impaſto, diciam così, e la ſtruttura di quella grand' Alpe. Mi riſerbo pertanto nella mia Opera a ragionarvi di ciò che di più importante è ſtato da me notato nelle ſuddette cave; e qui non farò che accennarvi alcuni fatti, e ſingolarità, non immeritevoli, per quanto io giudico, de' ſaviſſimi voſtri rifleſſi.

Se ſi conſidera quell' amplo tratto di Panie, che comincia poco ſopra Carrara, e che in dirittura ſi eſtende fino all' altiſſima loro ſommità (che è appunto quel gran ſeno, di dove ſi traggono i marmi) ſi trova tutto calcare, e tutto d' un maſſo ſolo, non avendo ſtrati terroſi frappoſti, ed eſſendo anche quaſi per tutto ignuda la ſua ſuperficie. Solamente la pietra calcare formante quell' immenſo ſcoglio è d' indole apparentemente diverſa, in quanto che in molta parte è di grana groſſolana, e d' un colore ſudicio che nel cenerino roſſeggia; e queſta parte è poco atta agli uſi della Società, quando l' altra per l' oppoſito è di grana più o meno fina, riceve pulimento, e lucentezza, ed è anche commendabile pel colore: e di queſta ultima pietra riſultano i diverſi marmi Carrareſi, i cui principali ſono lo *ſtatuario*, il *bianco ordinario*, e il *bardiglio*, che ha colore più o meno turchino, quantunque poi ciaſcheduno di queſti tre marmi comprenda ſotto sè moltiſſime varietà. Queſti marmi diverſi ſono tante volte con diſtinzione ſeparati l' uno dall' altro, quantunque fra loro contigui, così che lo ſtatuario, per ſomiglianza d' eſempio, non va a confonderſi col bianco ordinario, non oſtante che lo ſtrato che compone il primo ſia in immediato contatto con lo ſtrato che forma il ſecondo. Ma altre volte, e queſte non rare, lo ſtatuario, e il bianco ordinario compongono uno ſtrato unico, e ſolamente il primo a poco a poco e per gradi inſenſibili degenera nel ſecondo. Così voi dite del bardiglio comparato a queſti due marmi; e per addurvi un eſempio notiſſimo, ſi oſſervano bene ſpeſſo ne' marmi Carrareſi preſſo a poco quelle meſcolanze fra loro, che noi veggiamo ne' colori del priſma. Per queſta ragione, e per altre che allegherò altrove, io ſono d' avviſo che i nominati tre marmi non formino realmente che una qualità ſola di marmo, dividenteſi poi in più varietà. La pietra di grana groſſolana ſoprammentovata (che chiamerò *gregaria*) inceppa ſempre, e ſoventemente anche avvolge, e ſeppelliſce i marmi. Quindi è che per giungere alla verace vena del marmo fa di meſtiere il più delle volte con mine far balzare in aria uno ſtrato di molti piedi di pietra gregaria. Per altro dalle oſſervazioni da me fatte crederei d' eſſere fondato a credere che il nocciolo di quel gran tratto di Panie ſia tutto o quaſi tutto marmoreo.

Opinano diverſi Autori che i marmi ſi riproducono, e che alcune cave di Carrara, eſauſte a'tempi antichiſſimi, ſi ſono in ſeguito di nuovi marmi riempiute. Appoggiano ſingolarmente queſta loro opinione all'eſſerſi trovati come imprigionati in alcuni marmi Carrareſi degli ſcarpelli, de' picconi, de' martelli, ed altrettali iſtrumenti, onde ſi ſervivano i Romani per queſte cave (*a*).

Non contento di avere interrogato que' cavatori, e più perſone di Carrara verſate in queſte materie, che concordemente atteſtato mi hanno di non avere mai ſentito parlare della ſcoperta di tali iſtrumenti, nè di avere mai veduto marmi colà riprodotti, ho voluto recarmi in perſona alla viſita di tutte quelle cave, che da un tempo più o men lungo ſono ſtate abbandonate. Si trovano queſte abbondantemente in diverſi luoghi della montagna, ſegnatamente ſotto alcuni prominenti ciglioni, ed è facile il diſtinguere quelle che ſono antichiſſime, e che ſi lavoravano al tempo de' Romani, dall' altre di minore età, e da quelle eziandio che ſono ſtate laſciate da pochi ſecoli in qua. Ma a dir vero que' ſeni, quelle cavità, quei guaſti che ſi fecero allora nell' interno del monte, e che ci nacquero in grazia de' cavati marmi, vi ſi trovano anche al preſente, ſenza che ivi appaja pure indizio, pur ſegno di marmo riprodotto. In alcuni di queſti ſeni, di queſti vuoti eſiſtono antichi rimaſugli di ſtatuario, di bardiglio, di bianco ordinario, inſieme ammonticellati e confuſi; ho fatto ſmuovere diverſi di tai rimaſugli, e preſi tra mano, e attentamente conſiderati, non gli ho veduti punto avvolti da materia marmorea rigenerata, ma quelle rotture, que' piani, quegli angoli che ricevettero una volta da' martelli de' cavatori vi ſi trovano pure gli ſteſſi preſentemente. E però in forza di queſte mie oſſervazioni io non poſſo accordare la riproduzione de' marmi Carrareſi. Diſſi *Carrareſi*, non negando io che ſi poſſano formare altrove,

---

(*a*) *Bagliv. Valliſn. Waller.*

e che di fatti ſi formino nuovi marmi, a quel modo che ſi forman di nuovo altre pietre. In più d' una cava abbandonata mi ſi è offerto un fenomeno, che potrebbe forſe ſpiegare come dentro alla pietra ſi ſono trovati degli ſtrumenti deſtinati ai lavori de' marmi, in ſuppoſizione che il fatto ſuſſiſteſſe. Diverſe adunque di queſte cave in que' ſiti dove entrano l' acque piovane, ſono intonacate da una dura croſta lapidea, più o meno groſſa, rotta la quale, ſi trova che tante volte rinchiude corpi foreſtieri, come ſchegge di marmo, o pietre d' altra qualità. Quando adunque cominciò a formarſi quella croſta petroſa, ſe in luogo di tai corpi vi ſi foſſero abbattuti i mentovati ſtrumenti, non v' ha dubbio che queſti nel modo ſteſſo ſtati ſarebbero quivi entro imprigionati. Ma baſta l' avere occhi per accorgerſi ſubito, che quella prodotta ſoſtanza croſtoſa è tutt' altro che marmo, eſſendo eſſa interamente ſtalattitica.

Malgrado le molte e diligenti indagazioni da me inſtituite, non ho mai potuto ſcorgere verun ſegnale di corpi marini, tanto ne' marmi Carrareſi, quanto nella pietra gregaria involgente. Ne' primi però vi ho trovati due altri corpi ſtranieri, che debbono intereſſare di molto il naturaliſta *Litologo*. Il primo ſi è una pirite criſtallizzata, o ſia marcaſita, che rompendo il marmo ſtatuario vi ſi trova dentro. Non alligna però in tutte le cave d' un tal marmo. Che anzi ſi può dire non eſſervene che una ſola che ne contenga, diſtante tre miglia da Carrara in luogo chiamato la *Rugeta*. Queſta marcaſita, che è un ſolfo mineralizzato col ferro, che è d' un giallo aperto, e che percoſſa con l' acciajo, manda copioſe e ſtrepitanti ſcintille, rade volte è teſſulare, o ſia a ſei faccie, ma d' ordinario ha dodici o quattordici faccie, ed anche di più. I pezzetti più grandi ſono di linee $3\frac{1}{4}$, e i più piccioli addimandano la lente per eſſer veduti. Tra i più grandi poi, e più piccioli v' ha una ſerie preſſochè infinita di grandezze diverſe. Ed ogni pezzetto, picciolo o grande ch' e' ſia, ſi ſcorge ſempre più o meno incaſtrato nel marmo, e talmente da eſſo ſtretto e ſerrato, che volendolo trar fuora, tante volte ſi rompe. Queſta marcaſita non eſiſte mai nelle parti ſolide del marmo, ma bensì dov' egli ha qualche pelo. Se adunque ſcoperto uno di queſti peli o capillari aperture, ſi pianterà in eſſo lo ſcarpello, e ſi farà forza, il marmo ſi dividerà in due, e le due faccie che appariſcono ſi veggono più o meno ricche di queſti lucenti criſtalletti piritoſi. Oſſervate poi con qualche attenzione le faccie, vi ſi ſcoprono in più luoghi delle picciole foſſette, o a dir meglio delle impronte angolari, che erano come le cuſtodie dei criſtalletti, i quali ſi ſono ſtaccati da una faccia, e rimaſti ſono attaccati all' altra, per eſſere in queſta più profondamente impiantati. E che veramente le ſuddette impronte deſſero ricovero a que' criſtalletti piritoſi, appariſce ad evidenza unendo inſieme le ſeparate faccie, giacchè eſſi allora vi ſi vanno di bel nuovo a piantar dentro. La conſeguenza di queſti fatti voi vedete ch' ella è manifeſtiſſima, cioè a dire che la pirite criſtallizzata preeſiſteva al marmo formato, e che queſto marmo dapprincipio era fluido, o almeno una teneriſſima paſta.

Per quanto ſono ſtato aſſicurato da' Poſſeditori di quella cava, non ſono più di 20 anni, che ivi ſi è cominciato a ſcoprire queſta pirite. E ſiccome è belliſſima, ed è pur tale il marmo a cui va unita, così con tal marmo ho fatto lavorare alcune ſcatole che non poſſono eſſer più nobili,

Oltre all' indicata cava dello ſtatuario, anche il bardiglio contiene un ſimile minerale, ma eſtremamente rari ſono i pezzi di queſto marmo, in cui ſi ritrova.

L' altro genere di corpi foreſtieri, che ſi oſſerva dentro a' marmi Carrareſi, ſono i criſtalli di rocca. Voi ſapete che quando ſono aderenti alla loro matrice, queſta ordinariamente è ſilicea, oppure quarzoſa; e però ſi chiamano anche criſtalli quarzoſi, e rariſſime volte ſi trovano radicati ſu baſe calcare. Per eſſer dunque di queſta ultima natura la baſe de' criſtalli, di cui entro adeſſo a parlare, ſi rendono eſſi preſſo i Naturaliſti molto ſtimabili. Ma hanno altre qualità che grandemente ne accreſcono il valore. Di una immenſità di criſtalli di rocca di fatte diverſe, che ſi trovano in queſto pubblico Ceſareo Muſeo, venuti di Germania, dall' Ungheria, dalla Svizzera, e da altre parti, quantunque in sè pregevoli, perchè la più parte traſcelti, tuttavia non ve n' è uno che a queſti criſtalli di Carrara comparare ſi poſſa. Crederò adunque prezzo dell' opera il farne nel mio Libro una dettagliata deſcrizione. Ma accade a queſti criſtalli quel che ſi è veduto accadere alla pirite, voglio dire che il ſolo marmo ordinario bianco li rinchiude, anzi una ſola cava di queſto, chiamata la *Foſſa dell' Angelo*, diſtante due miglia e mezzo da Carrara. Ed è puro accidente il trovarne qualcuno in altre cave. Queſti criſtalli non ſi veggono mai alla ſuperſicie del marmo, ma ſempre nel ſuo interno, coſtantemente però in certi determinati ſiti, e non in altri. Adunque le parti interiori che ſono ſolide non ricettano mai i criſtalli di rocca, ma quelle sì bene che ſono vuote. Dove adunque eſiſtono delle cavità, quivi è che ſi ſcoprono gl' ingemmamenti criſtallini, con queſta impreteribil legge, che ogni pezzo o guglia di criſtallo è ſempre piantata con una eſtremità ſu la ſuperſicie della cavità, nè ſe ne trova mai una che ſtaccata e libera ſia. Di queſti fatti non ſolamente ſono ſtato aſſicurato da quelli che lavorano in queſta cava, ma dagli occhi miei ſteſſi, quando eſpreſſamente ho fatto ſpezzare molti e molti groſſi pezzi di queſto marmo. Ho ben veduto eſſer vana la credenza di que' cavatori che vogliono che queſti criſtalli di rocca ſieno teneri finchè ſtanno ſepolti nel marmo, e che allora indurano, quando rotto il marmo reſtano eſpoſti alle impreſſioni dell' aria. Imperocchè quella durezza che hanno dopo, l' avevano egualmente nel momento che ſono rimaſti ſchiuſi, e queſto è troppo confórme alle leggi della criſtallizzazione.

§. V.

Carrione, e Frigido eſaminati.

Sono queſti due groſſi torrenti che ſcorrono il primo dentro Carrara, il ſecondo raſente Maſſa. Vien formato il Carrione da due torrenti ſubalterni, l' uno detto il canale di Torano, l'altro il canale di Bedizano. Siccome il canale di Torano ſerpeggia nel fondo di alcune gole, i cui lati abbondano di marmi Carrareſi, così nel viſitar queſti mi ſi è aperta l' opportunità di oſſervar gli effetti che produce il ſottocorrente canale, uno de' quali non voglio qui laſciare di riferirvi. Riguarda eſſo la rotondità che acquiſtano dalle ſue acque quelle ſchegge, e que' tritoli di marmo che dentro vi caggiono. Il chiariſſimo voſtro Sig. Nipote, quegli che pe' nobili ſuoi ritrovamenti è sì benemerito della Fiſica, e e della Storia Naturale, il Sig. di *Sauſſure*, nell' eccellente ſua opera de' *viaggi Alpini* fa vedere che la rotondità d' una moltitudine di pietre non è naturale ad eſſe, ma nata in grazia d' eſſere ſtate rotolate dall' acque dentro al letto de' torrenti, e de' fiumi; concioſſiachè dove queſti hanno l' origine prima, quivi le pietre ſono angoloſe, ma rotolate dall' impeto dell' acqua ne' luoghi più baſſi, cominciano a perder gli angoli, ed in progreſſo ſi fanno rotonde. Oltre l' avere io veduta tal verità in moltiſſimi luoghi delle ſpiagge del Mediterraneo, l' ho toccata con mano in que' pezzi di marmo, che o per la picciolezza, o per la cattiva qualità rigettati da' cavatori a cader vanno nel canal di Torano. Molti di queſti pezzi ſono dapprima di figura piatta, hanno i lembi angoloſi, e quivi ſono pieni di punte. Ma dopo l' avere viaggiato alquanto lungheſſo il letto del canale, quelle punte, e que' lembi cominciano a ſmuſſarſi, e perduto nel tempo ſteſſo a poco a poco quel piatto che avevano, acquiſtano i pezzi forma rotonda, così che non prima di venir traſportati dal torrente dentro la città, ſono già quaſi tutti divenuti globoſi.

Queſta oſſervazione mi ha ſervito di lume per un' altra. Dall' inceſſante cavar de' marmi per tanti ſecoli nel Carrareſe, ne è venuto che alcuni fianchi di monti per eſſer loro mancate le fondamenta ſono rovinoſamente precipitati, e quindi nate ne ſono delle altiſſime verticali rupi, come ſi oſſerva nel *Polvaccio*, che è una delle più grandioſe cave di belliſſimo marmo ſtatuario che vanti il paeſe. Ora è ſtato da me trovato, che dentro ad alcune di queſte sdrucite rupi, non d' altro compoſte che di marmi, e di pietra gregaria, vi ſono incaſtrate più file o ſerie di ciottoli, diverſi de' quali avendo io potuto eſtrarre di là, e conſeguentemente eſaminare, ho conoſciuto che ſono di natura marmorea, e ſomigliantiſſimi ai fluitati nel Carrione. Vi ſono adunque tutte le apparenze che in que' luoghi, che ſoſtentano adeſſo ſopra di sè intere montagne, ſcorreſſe una volta qualche fiume o torrente.

Il fenomeno delle pietre ritondate, che preſenta il Carrione prima d' entrare in Carrara, viene offerto dal Frigido al di ſotto di Maſſa. Quivi è adunque dove il ſuo letto è ripieno di ciottoli ritondi, altri gregarj, altri marmorei, entrati dentro di eſſo al di ſopra della città, e aventi allora diverſe irregolari figure non ſenza più angoli, e punte. Ma queſto torrente in vicinanza del luogo delle pietre ritondate preſenta una ſingolarità, che è quella di ſeppellirſi, e perderſi tutto dentro alla ghiaja, rimanendo al di ſotto il ſuo letto interamente aſciutto, e tornando poi a farſi vedere con le ſue acque, quando è preſſo a metter foce nel mare. *Tinelli* ſi appella quel ſito dove il Frigido ſi naſconde ſotterra, o almeno dove ſi naſcondeva, quando la prima volta lo viſitai in ottobre, giacchè eſſendo ſtato da me viſitato dappoi, ſi naſcondeva allora più baſſo; e ciò naſceva dalla maggior copia di acque che conduceva per pioggie cadute. Che anzi ſe queſte ſono diuturne, e veementi, il ſuo corſo continua ſcoperto fino al mare.

Ma ſe il Frigido in certi tempi ſi occulta, e ſi perde ſotterra, in qualunque ſtagione dell' anno sbuca di ſotterra. Adunque cinque miglia circa ſopra Maſſa da una gola di monte ſcappa rigoglioſo e ſpumante un groſſiſſimo fonte perenne, che dà la prima origine al Frigido. A ragione chiamato viene con tal nome, poichè in eſtate meſſe la mani dentro all' acqua del fonte nel ſito dove sgorga dalla terra, ſi ſente freddiſſima. Immerſo avendo io in eſſa il termometro reaumuriano, diſceſe fino a' gradi 6 $\frac{1}{4}$ ſopra la congelazione, quando nell' atmosfera all' ombra era a gradi 20.

§. VI.

Oſſervazioni intorno all' origine delle fontane.

Pare che più non poſſa metterſi in dubbio che i fonti, e i fiumi derivano immediatamente dall' acque piovane, e dalle nevi ſquagliate. Alcuni dotti Franceſi, ma in iſpezieltà il celebratiſſimo mio concittadino *Valliſneri* ha dato tutto il peſo a queſta ſentenza per le oſſervazioni da lui fatte ſu le montagne più alte degli Appennini di Reggio. Più anni addietro in un mio viaggio montano intrapreſo in altra parte degli ſteſſi Appennini ebbi la compiacenza di confermare la ſteſſa verità, come appariſce da due mie Lettere relative a queſto argomento impreſſe nella Raccolta Calogeriana. Dirovvi di più che per Superior commiſſione eſſendomi io recato nel 1772 ſu le montagne di Como per far ricerche di naturali prodotti ad uſo di queſto pubblico Reale Muſeo, non ceſſai di far novelle oſſervazioni intorno all'origine di quelle moltiſſime fontane, che uniteſi in rivi e in torrenti vanno a ſcaricarſi in quel lago. Sopra tutto ſaper volli dove eſſe ricevevano il primiero alimento, e trovai che queſto veniva loro per lo più ſomminiſtrato, o da acque impaludate dentro ad affoſſamenti, a vaſche, ed a buche, o da vive nevi, e da ghiacci, che ne' profondi burroni, e in più ſommità di quelle alpeſtri montagne ſi conſervano in parte, nei calori eziandio della più inſocata ſtagione. Analoghe oſſervazioni nel 1781 ſono ſtate da me inſtituite ſu diverſe montagne del Piemonte, della Savoja, e della Svizzera. E tanto le prime che le ſeconde crederò bene di far pubbliche a maggiore confermazione del vero. La mia imparzialità m' obbliga però a confeſſare di aver trovato più ſonti in que' ſiti dove non ſono ricettacoli, e vivaj di nevi o di acque, e di averle vedute fluire ne' tempi eziandio, che in que' luoghi, e negli altri circonvicini regnava la maggior ſiccità. Tale ſi è una fonte perenne all' iſola Palmaria, molte ſonti al di ſotto della Bocchetta per venir da Genova a Pavia, una groſſa polla pochi paſſi diſtante da Equi, e due altre pure larghiſſime, l'una che in parte forma il canal di Torano, l'altra che dà origine al Frigido. A ſpiegare che queſte ſorgenti tutte ricevono la materia dal cielo, non vi ſono a mio avviſo, che due maniere, o ſupporre che da paeſi rimoti ſieno generate, dove frequenti cadon le pioggie, e che l'acqua per ſotterranei canali ſia tramandata a queſti ſiti, di dove sbucan le ſonti; oppure che in vicinanza di queſte ſonti vi ſieno voragini ſotterranee, baratri, e abiſſi, che inghiottiſcan l' acque piovane, e le nevi quivi cadute, e liqueſatte, e le conſervino poi per alimentare tai ſonti a qualunque ſtagione. Benchè la prima ſuppoſizione a me non ſembri del tutto ſpregevole, pure io pendo aſſai più per la ſeconda, per ciò almeno che riſguarda le Panie, luſingandomi di avere molti fatti diretti per comprovarla.

§. VII.

Oſſervazioni fatte in quella parte di Panie, che ſovraſtà a Maſſa. Marmi di Serravezza.

Qui il piede della montagna non è calcare come preſſo Carrara. Uſciti che ſiamo appena di Maſſa per avviarci alle Panie, ci ſi preſenta una pietra quarzoſo-micacea di color bruno, denominata *piaſtriccio*, perchè alla maniera degli ſchiſti è diviſibile tanto che baſta in groſſe piaſtre, di cui fanno qualche uſo que' popolani, e tra gli altri ſervendoſene a veſtire le interne pareti delle fornaci a calcina, per eſſere tollerabilmente refrattaria al fuoco. E di queſta pietra ho trovato coſtrutto l' antichiſſimo Anfiteatro di Luni (*a*). Ella dunque poco ſopra Maſſa forma la baſe delle Panie, e s' inoltra all' insù diſegualmente, poichè dalla parte del Forno non eſtendeſi che a tre miglia, ma dalla parte della valle di Renara inoltraſi fino a cinque. In tutto queſto tratto adunque non trovaſi che queſta pietra quarzoſo-micacea interrotta in alcuni luoghi da ſtriſce di bianco quarzo amorfo, la quale produce un' infinità di dirupi, di roccie, di precipizj, ſenza però laſciare in più ſiti di avere de' piani, e quivi d' eſſer veſtita alla ſuperficie d' uno ſtrato più o meno groſſo di terra; nel quale allignano varie piante, e ſegnatamente dei caſtagni, e dei noci. Dove termina queſta pietra comincia la calcare gregaria, e ſi vede che la prima ſerve come di fondamento, e di baſe per la ſeconda. La calcare poi ſubito che ha cominciato a manifeſtarſi tale, ſeguita ad eſſerlo nel reſtante delle Panie, ſe non che di mezzo ad eſſa ſi ſcoprono in molti luoghi diverſi filoni di marmo. Imperocchè quantunque Carrara venga tanto celebrata, e a tutta ragione, pe' vaghiſſimi ſuoi marmi, e diſtintamente pel bianchiſſimo

---

(*a*) §. III. di queſta ſeconda Lettera.

bianchiſſimo e lucidiſſimo ſtatuario, che ha arricchita Roma, o piuttoſto il mondo intero di ſtatue, e di trofei, non dee tuttavia eſſere per queſta parte defraudata Maſſa delle ſue lodi, vantando ella pure dopo lo ſtatuario diverſe qualità di bardiglio, e di bianco ordinario, ed oltracciò un genere nobiliſſimo di marmi chiamati *miſti*, per eſſer dipinti a varj e leggiadri colori, del qual genere quaſi del tutto è priva Carrara. Solamente hanno lo ſvantaggio coteſti marmi di non eſſere a lunghi e groſſi filoni, e di trovarſi in ſiti ripidi a ſegno da non potere con quella facilità eſſer tradotti al mare, con cui ſi traducono i Carrareſi. L'attenta conſiderazione dei diverſi marmi di Maſſa mi ha fatta vedere quella ſteſſa fiſica verità che moſtrata mi avevano que' di Carrara, e voglio dire che queſta diverſità non è che apparente, in quanto che conſiſte nella diverſità del colore, della durezza, e di altre eſtrinſeche circoſtanze, ma che intrinſecamente non ſono marmi diverſi, ma bensì il medeſimo, o ſia la ſteſſa pietra calcare.

Nel Maſſeſe, e nel Carrareſe non s'incontrano mai o quaſi mai breccie marmoree. Si trovano però a poche miglia ſopra Carrara, cioè a dire nelle cave di Serravezza. Una ſingolarmente belliſſima ne ho io veduta colà vicina un miglio a Stazema, incavata nello ſcoglio d' un monte, i colori della quale ſono il giallo, il bianco, ed il roſſo. Ad ogni colore corriſponde una pietruzza diverſa, e queſte diverſe pietruzze ſono inſieme attaccate per via d' una terra calcare. Per eſſere da molti anni, che ſi eſtrae quel marmo brecciato, ſi è fatto un profondo incavo nel monte, per cui chiaramente ſi vede che anche qui la pietra gregaria ravvolge, e ſerra la marmorea. Tutto il monte altresì, come gli altri vicini vengon compoſti di quella pietra, a riſerva di qualche luogo umile, dove s' incontra la quarzoſo-micacea.

§. VIII.

Oſſervazioni inſtituite ſu le cime delle Panie, e nell' Appennino fino alle ſue radici dalla parte di Modena.

Eſaminato il piede delle Panie, e le pendici di mezzana altezza, dove eſiſtono i marmi, ragion voleva che saliſſi più oltre, e che ſuperata la grand' erta mi recaſſi fino alle più eminenti cime per avere una compiuta idea di quella immenſa montagna. Tanto io eſeguii, e a meglio ſoddisfare me ſteſſo volli ſuperare in più luoghi quell' alpeſtre giogo; e in queſto lungo diſaſtroſiſſimo viaggio io poſſo dirvi che non baſtando i piedi dovetti più volte raccomandarmi alle mani. Ma quanto le mie fatiche mi vennero vantaggioſamente ricompenſate! Parlerovvi altrove dei lumi novelli che in un punto intereſſantiſſimo, quale ſi è la ſtratificazione delle montagne, mi fornirono quegli orrori, quelle ſolitudini, dove regna un eterno ſilenzio, interrotto ſoltanto dallo ſtridente grido dell' aquile, che nel principio della ſtate nidificano ſu quelle orribili balze (*a*). Allora altresì ragionerovvi alquanto più a lungo di una doppia giocondiſſima ſcena, che inaſpettatamente mi ſi offerſe al metter piede ſu quelle cime, che fu quella di contemplare ad un tempo due ſtagioni diverſe. La parte inferiore delle Panie, eſpoſta a mezzodì, e che guarda il mare (era verſo il terminare di Ottobre) ſi vedeva ancora adorna d' erbe vivaci, e gli alberi perduto ancor non avevano il loro verdore: per contrario ne erano quaſi ſenza tutte le piante, che ſituate alla parte oppoſta mirano il nord. Dalla prima ſentiva alitare un venticello dolce e ſoave, che mi ricreava; ſpirava dalla ſeconda un' aria fredda, che ſtringevami il cuore. A dir tutto in breve, là rimaneva un avanzo di eſtate, qua s' inoltrava un principio d' inverno. Conoſco di non avere per gli oggetti che mi circondano la ſenſibilità di quel celebre voſtro Compatriota, che ci ha dato un Libro *ſu le Montagne*, ſette ottavi del

---

(*a*) E' la ſpecie chiamata dal Linneo *Melanætus*.

quale ſono per lo meno impiegati in maraviglie, in traſporti, in eſtaſi, in giaculatorie, in rapimenti (*a*). Crederei tuttavia di avere un' anima che ſente, la quale non poſſo eſprimervi quanto reſtaſſe commoſſa all' improvviſo ſpettacolo di queſte due contrarianti ſcene. Qui però io non voglio trattenervi, che intorno ad alcune poche oſſervazioni generali. L'una ſi è che in quel gran corpo di montagne io non ho mai trovato *pori ignei*, come ceneri di vulcani, pomici, lave, vetro foſſile; neppure baſalti o graniti, ma tutto è un immenſo ammaſſo di pietra calcare, la quale eſtende le ſue radici dal mare fino alla parte oppoſta in vicinanza di Caſtelnovo di Garfagnana. Solamente miraſi in alcuni rari luoghi interrotta da picciole vene di ardeſia argillacea, o da qualche ſtrato breviſſimo di pietra arenaria. Queſto braccio adunque dell' Appennino è una montagna ſecondaria, ma la cui ſtratificazione poco ſi accorda, come vedrete, con quella che ſi ſuole oſſervare nelle montagne di queſto genere. Di più dalla ſua ſommità fino alle due oppoſte radici ella è priva di ſpoglie marine, le quali ſpoglie ſe non conſtituiſcono il carattere, formano però l' ordinario accompagnamento delle ſecondarie montagne.

Il chiariſſimo mio Amico Sig. Giovanni *Arduino*, in due ſue lettere odeporiche, impreſſe negli Opuſcoli Calogeriani, piene di nuove oſſervazioni, e di giudizioſi rifleſſi, parlando incidentemente delle Panie, oſſerva che queſte hanno la loro baſe in quella pietra ſciſſile, che è ſtata da me chiamata *quarzoſo-micacea* (§. VII.), e ch' egli appella *talco-quarzoſa*, e che anzi ne ſono in più luoghi compoſte fino alla metà circa della loro altezza.

Quanto al primo, già veduto avete eſſere ſtata da me notata la ſteſſa coſa riſpetto a Maſſa (*ivi*): ma biſogna dire che quel prode Naturaliſta non abbia fatta oſſervazione che a queſto luogo, giacchè in altri, come ho avvertito, non appariſce ſegnale di una tal pietra. Riguardo poi al ſecondo, certamente la medeſima ſi ſolleva ſopra Maſſa a conſiderabile altezza;

(*a*) Lettres Phyſiques & Morales ſur les Montagnes ecc.

queſta però è picciolissima, volendo ragguagliarla alla ſommità delle Panie. Siccome queſta pietra viene a ragione da lui conſiderata come una delle primigenie, una di quelle che formano le montagne primarie, o primitive, come le chiamano, e ſu la quale poſano tante volte le ſecondarie, così ſono ſtato attento ſe mai ne' ſiti più baſſi delle Panie, dove ſi preſentano sfendimenti o rotture, veniſſe a farſi paleſe; ma ogni mia attenzione è riuſcita infruttuoſa.

Perduta la viſta del mare, e delle ſue vicinanze, e preſo il cammino alla volta di Caſtelnovo di Garfagnana, drizzai i miei paſſi a Forno Volaſtro, terra per ogni dove circondata da montagne altiſſime, e che a guiſa di quella d'Equi gode nel verno non più di due ore delle influenze immediate del ſole. Le miniere del ferro che una volta quivi ſi cavavano, e la famoſa ſua grotta, viſitata 78 anni fa, ſiccome vi diſſi, dal *Vallisneri* (§. III.), procacciano un nome a queſto miſerabil villaggio. Delle prime reſta ſoltanto qualche veſtigio, eſſendo ſtate da gran tempo abbandonate, o per la troppa ſcarſità del metallo, o per la difficoltà di eſtrarlo, o per la negligenza, ed anche poca perizia de' cavatori. La ſeconda conſervaſi anche adeſſo, quale in parte deſcritta ci viene dall'elegantiſſima penna del Reggiano Naturaliſta. Un lontano romoreggiare di acque che ſi ſente alla bocca della caverna, una volta ellittica che conduce dentro di eſſa, alta appena per potere capirvi un uomo a dorſo incurvato, un atrio meno anguſto, e a molti paſſi allungato, ſul piano del quale fluiſce e ſi divalla un picciol rigagnolo, da ultimo una ſpazioſiſſima ſala, adorna d' ogni intorno e rabeſcata di produzioni ſtalattitiche, e flagellata da un canto da una groſſa vena di acque precipitanti dall' alto, e producenti alla bocca quel profondo ſtrepito, ſono ciò che formano l' eſſenziale di queſto ſotterraneo ſpeco. Le novità poi che colà dentro ſon venute appreſſo la viſita del *Vallisneri*, io le giudico una conſeguenza di quel rivolo, che per abbondare di materia tartaroſa, e per le depoſizioni ſtalattitiche che vi ha fatto, e che vi va facendo, non può a meno di non aver prodotto, e di non produrre dei notabili cangiamenti, i precipui de' quali ho voluto notare, e deſcriverò quando oltre a queſta farò parola della grotta Equi e della Carrareſe, come pure d' altre diverſe, che non vi ho accennate, e che reputo degne di ſtoria. Il reſtante poi del viaggio da Forno Volaſtro fino a Caſtelnovo di Garfagnana null' altro mi offerſe che una moltitudine di montagne ſubalterne, e continuamente minori, compoſte tutte o quaſi tutte della conſueta pietra calcare gregaria.

Veduto dalle radici del mare fino alle oppoſte queſto braccio dell' Appennino, volli eziandio vedere quelle parti di eſſo, che chiamano *Alpi di S. Pellegrino*, le quali hanno la baſe ſopra Caſtelnovo, che per l' altezza, e pel loro gran corpo non la cedono punto alle Panie, e che alla parte del nord terminano con le amene pianure del Modaneſe. Dirovvi candidamente ch' io figurato mi era di trovare anche qui la medeſima qualità di pietra, ma mi accorſi che in ciò queſti due tratti dell' Appennino differiſcono eſſenzialmente. Sappiate adunque che l' Alpi di S. Pellegrino dalla loro ſommità fino alle oppoſte radici, ſituate al nord, e al mezzodì, non ſono che un aggregato di pietra arenaria, contando io per nulla alcuni breviſſimi e ſottiliſſimi ſtrati di ardeſia argilloſa, che rade volte vi ſi trovano dentro. Che anzi la maſſima parte di que' montani villaggi, di quelle Chieſe, di quelle capanne non d' altro è fabbricata che di tal pietra. E ſiccome non difficilmente ſi sfalda, e ſi può anche tollerabilmente pulire, così di eſſa ſi ſervono que' montanari e per tegole alle caſe, e per colonnati, e per altrettali lavori. Ma ſe queſta pietra differiſce per natura da quella delle Panie, ne differiſce altresì pel modo con cui viene a formare quella numeroſa ſerie di monti. La pietra calcare delle Panie forma un gran tutto, ſenza avere frappoſti ſtrati di terra, che ſeparino pietre da pietre, e quindi le Panie altro non ſono, che un immenſo ed unico ſcoglio. Per l' oppoſito la pietra arenaria dell' Alpi di S. Pellegrino è a ſtrati, e a filoni ſeparati, di mezzo a' quali ſpuntano più lingue di terra; e da ciò naſce che queſt' Alpi, malgrado l' inclemenza, e la ſalvatichezza del luogo, ſono veſtite verſo la cima di campagne erboſe, di faggi, di abeti, di carpini; e nelle parti meno eminenti di caſtagni, di noci, e di altre ſimili piante fruttifere; quando le Panie, maſſimamente dove guardano il mare, non ricettano per due terzi della ſuperiore loro altezza quaſi niun vegetabile. Finalmente la pietra arenaria è ben lungi dall' avere quella ſtratificazione, che oſſervaſi nella calcare. Ho fatto qualche eſame ſperimentale ſu le parti conſtitutive della pietra arenaria, e ne ho avuto i ſeguenti riſultati. All' occhio nudo, ma più aſſai ajutato dalla lente ſi vede eſſer compoſta di granellini quarzoſi di varia forma, e grandezza inſieme ſtrettamente legati da una terra argilloſa indurita, che rompendo in pezzetti la pietra, ſi fa polveroſa. A queſti due componenti ſi aggiunge un terzo, che è la mica argentea, le cui ſquamette però relativamente alle granella quarzoſe ſono in minor numero. Quindi egli è chiaro che queſta pietra ſi dee collocare fra le compoſte, chiamate *ſaxa* dai Naturaliſti. Atteſa la natura di queſti tre componenti non è punto a maravigliare, ſe queſta pietra non ſoggiace al più picciol moto negli acidi, nè ſi ſcioglie punto da eſſi. S' intende altresì a motivo del quarzo di che abbonda, per che cagione battuta dall' acciajo manda ſcintille. Ad ogni colpo però ne ſalta via qualche pezzetto, e quindi appariſce che non è molto dura. Eſaminata ne' luoghi nativi non ſembra riſentirſi molto alle ingiurie dell' aria: il ſuo colore pende al bigio, a riſerva d' eſſere ſeminato di punti argentini, che ſono le picciole ſquame della mica.

Il prelodato Sig. di *Sauſſure* ha oſſervato (l. c.) che la pietra arenaria trovaſi quaſi ſempre tra le montagne primitive, e le ſecondarie. Come fiſico eſattiſſimo, e che non aſſeriſce ſe non quello che vede, ha voluto modificare queſta propoſizion generale con la particella *quaſi*; per cui dà a vedere che qualche rara volta la pietra arenaria non è dunque frappoſta ai due menzionati generi di montagne. Io poſſo fornire a quel celebre mio Amico una prova novella di tal modificazione, sì nelle Panie guardanti Maſſa, sì nell' Alpi di S. Pellegrino. Nelle prime tra le montagne calcari ſecondarie, e la pietra quarzoſo-micacea primaria, non appariſce certamente giammai l' arenaria, che anzi quelle, come già diſſi, appoggiano immediatamente a queſta. Le ſeconde poi da cima a fondo ſono un compoſto di pietra arenaria, parlando anche delle più baſſe colline, come ſpecificherò meglio altrove, ſenza che mai appariſca indizio d' altra qualità di pietra ſottoſtante.

Nelle montagne arenarie di S. Pellegrino non ho mai trovato corpi ſtranieri. Crederei tuttavia di aver prove dirette, che ſono un lavoro dell'acque. Io lo deduco da certi globi pur arenarj, del diametro talvolta di molti piedi, che in più luoghi ho oſſervato incaſtrati nelle ſuddette montagne arenarie, ſegnatamente in alcune diroccate rupi, dentro cui ſtavano in parte ſeppelliti, ed in parte ſporgevano in fuora, alcuni de' quali globi eſſendo ſtati da me eſaminati, ho trovato che avevano marche le più manifeſte, le più convincenti d' eſſere ſtati una volta fluitati. Ma non è di queſto luogo il diſcendere ai dettagli di queſto raro fenomeno, e l' individuare i luoghi dove ſi oſſerva.

Per gli eſami da me fatti nelle Panie, e nell' Alpi di S. Pellegrino voi vedete adunque, dottiſſimo Amico, che la Natura nella formazione dell' une, e dell' altre ſi è ſervita di materiali diverſi. Là non ha impiegato che calce, qua in maſſima parte che arena. Per conto però di queſt' ultime, ſe dalla linea diritta che da Caſtelnovo di Garfagnana conduce a Saſſuolo (groſſo Borgo poche miglia diſtante da Modena) piegheremo o dalla parte del Bologneſe, o dall' altra del Reggiano, e del Parmigiano, troveremo che la Natura è ricorſa ad altre materie, non oſtante che queſti tratti ſieno una continuazione dell' Appennino. Così molte montagne ſopra Bologna, ſopra Reggio, e ſopra Parma abbondano di pietra calcare, non ſenza una quantità ſterminata di teſtacei, la più parte calcinati. Quella porzione di Appennino, per cui da Fornovo nel Parmigiano ſi va ſino a Pontremoli, e che fu da me eſaminata andando alla Spezia, è ella pure preſſochè tutta calcare. Se poi ſi traverſi lo ſteſſo Appennino, andando da Pavia a Genova, oltre la pietra calcare ſi trovano monti interi di pietra ſteatitica, e asbeſtina. Chi detto avrebbe che la famoſa Bocchetta foſſe in gran parte compoſta di asbeſto, ſiccome io, forſe il primo, ho avuto la contentezza di ſcoprire? Si vede adunque che la Natura nella formazione degli Appennini ſi è compiaciuta della varietà, come uſar ſuole in più altre operazioni dei tre Regni. Pare ſolamente che non abbia meſſi in opera i graniti, quel genere di pietre che per la dibattuta ſua origine, pe' luoghi dove ſi trova, per le conſeguenze che ſe ne deducono, ſa tanto romore preſſo i moderni Geologi. Poſſo almeno accertarvi di non averli mai trovati ne' viaggi da me intrapreſi in diverſi tempi ſu gli Appennini.

Ne' racconti fattivi intorno a queſte due Alpi vi ſarete facilmente aſpettato da me, ch' io vi ragionaſſi delle loro altezze paragonate al livello del mare. La voſtra aſpettazione era giuſta, e mi rincreſce di non avere potuto appagarla per mancanza di un buon barometro, la quale mi ha fatto commettere queſta involontaria ommiſſione. Non ſaprei ſe in qualche rimota e indiretta maniera poteſſi al di groſſo ſupplirvi, coll' accennarvi la temperatura che colaſsù regnava quando io mi ci trovava, confrontandola con quella delle circoſtanti ſoggette pianure. Dirovvi adunque che il giorno 12 di Ottobre il mio termometro alla ſommità delle Panie in luogo ombroſo, e dove non avea luogo la rifleſſione del raggio ſolare, diſceſe ai gradi $13\frac{1}{2}$ ſopra la congelazione; ſull' Alpi poi di S. Pellegrino, dove regna maggior freddo per non ſentirſi quivi l' aria del mare, diſceſe nel ſeguente giorno ai gradi $8\frac{1}{4}$, quando un altro termometro ſimilmente graduato, e poſto all' ime radici delle Panie, marcò all' ombra in que' due giorni per atteſtazione d' un mio Amico, conoſcitore di queſte materie, e degno di fede, i gradi 21 all' incirca.

Stando fuor di Ginevra nella dolce voſtra ſolitudine di Genthod, voi vedete più montagne della Savoja coronate il capo d' eterne nevi. Le cime delle due Alpi, di cui ragiono, ne rimangono prive nella ſtate inoltrata. Non è però che anche allora in più luoghi ſcoſceſi e profondi non vi reſtino vecchie nevi tutti gli anni dalle nuove ritrovate e ſepolte. Finalmente un' altra non equivoca pruova dell' altezza grande di quelle alpeſtri regioni ſul piano del mare ella è, che le ſcarſe biade de' magri terrenelli ſottogiacenti al ſopracciglio dell' Appennino ſogliono maturare un meſe e mezzo più tardi dell' altre ſituate ne' colli Modaneſi, e Reggiani.

§. IX.

§. IX.

Oſſervazioni intorno all' inſolita Nebbia della ſtate proſſima ſcorſa, apparita anche ſu gli Appennini; e ai Temporali inſorti in quella occaſione.

A compimento delle coſe oſſervate nel mio viaggio montano laſciar non voglio di parlarvi di queſte meteore, poichè quantunque eſtranie al ſoggetto, e alla mia profeſſione, ciò non oſtante per eſſermiſi offerte non cercandole, anzi penſando a tutt' altro, io non doveva negligerle. Tutte e due antivennero la mia partenza verſo il mare al di là d' un meſe. Già prima della metà di Giugno l' aere di Lombardia ſi era fatto grandemente nebbioſo, e la nebbia benchè non c' involaſſe l' occhio del ſole, ce lo rendeva però offuſcato d' aſſai, e di buon mattino, e verſo la ſera rubicondo, e come ſanguigno. Spirava allora un picciol ponente, che ſi fece anche ſentire ne' dì ſeguenti, ne' quali inſorſe in Pavia, e ne' ſuoi contorni più d' un temporale, che avea pur la direzione da ponente, accompagnato da pioggia, da tuoni, e da fulmini. Finiti che erano i temporali, ſeguitava come prima a farſi vedere la nebbia, ed il giorno 23 dello ſteſſo meſe eſſendo io partito per Reggio, e ſpeſo avendo in quel viaggio tre giorni in barca per la lunga del Po, oſſervai che in tutto quel tratto d' acqua, e ne' circoſtanti luoghi vi era egualmente fitta come nel Paveſe.

Il celebre Sig. Profeſſore *Toaldo* nell' intereſſante ſua Memoria relativa a queſto ſoggetto oſſerva l' eſtenſione che ebbe da un mare all' altro il temporale del dì 26 di Giugno, e la prodigioſa quantità di ſaette che diede (*a*). In quel giorno a Gualtiere nel Reggiano in riva al Po il cielo fu ſoltanto nuvoloſo, oltre l' eſſere di ſotto ingombrato dalla ſolita nebbia ſoltiſſima. Ma nell' entrante notte inſuriò colà un temporale che durò più ore. Si ſciolſe in ſemplice pioggia,

---

(*a*) Opuſc. di Mil.

e queſta non molto dirotta, ma che continuò fino al romper dell' alba. Non ſaprei dirvi di avere mai ſentito tanti fulmini, quanti ne ſcoppiarono in quella notte. Paruto eſſendomi dapprincipio che l' uno ſuccedeſſe all' altro in tempi eguali o quaſi egùali, volli farne quella prova che trovandomi in letto, e nell' oſcurità poteva eſſer l' unica, voglio dire di ricorrere alle battute del mio polſo, e m' avvidi che non m' era ingannato. Contai ſette fulmini, e tra l' uno e l' altro vi ſi frappoſe ſempre quell' intervallo di tempo che non fu minore di 19 battute, nè maggiore di 22. Sembrava dunque che foſſe una macchina, che per caricarſi d' elettricità atta a fulminare eſigeſſe preſſo a poco un determinato ſpazio di tempo. Sebbene dopo lo ſcoppio di quei ſette fulmini, gli altri moltiſſimi che ſi ſentiron dappoi non ſi ſuccedevano più in quella data proporzione di tempo. Il giorno ſeguente, cioè li 27 Giugno, proſeguì il cielo a reſtar nuvoloſo, ſenza che dopo quella pioggia notturna diradata ſi foſſe nè punto nè poco la nebbia. Il reſtante di quel meſe, e la prima ſettimana dell' entrante Luglio furono nel Reggiano, e nel Modaneſe egualmente caliginoſi, nè andarono eſenti da qualche temporale accompagnato da grandine. Dominò quaſi ſempre lo ſteſſo ponente, più o meno rimeſſo, più o meno forte, e quando ſoffiava anche gagliardamente, la nebbia perſeverava la ſteſſa. Solamente in ſeguito cominciò a farſi meno denſa, e allora raſſerenatoſi con qualche coſtanza il cielo, ceſſò affatto il ponente.

Queſta nebbia che con l' eſtremità inferiore toccava la terra, e che ſollevavaſi ad altezza incommenſurabile all' occhio, era aſciutta in modo, che non bagnava punto gli abiti, nè le piante, nè gli altri corpi terreſtri. Quindi appariſce che compoſta non era di vapori acquei, come le nebbie ordinarie, ma sì bene di eſalazioni ſecche, la qual particolarità era già ſtata avvertita dal mentovato chiariſſimo Profeſſore di Padova. In effetto ſe ſtata foſſe vaporoſa, chi non vede che dopo un vento forte, dopo un roveſcio di pioggia doveva ſvanire? Queſto doppio fatto mi ſi preſenta d' inverno ſoventemente in Pavia, alla quale città per la frequenza delle ſoltiſſime nebbie diuturne non ſaprei quale altra paragonare in Italia. Non ſi può dunque dire che la nebbia, di cui favelliamo, concorreſſe alla formazione di que' nuvoli temporaleſchi. Credo bene che co' ſuoi aliti, eſuberanti probabilmente di fluido elettrico, concorreſſe alla generazione di quel numero innumerabile di fulmini. Tutti i temporali che in occaſione di quella nebbia vennero dove io mi trovava, furono da me con attenzione oſſervati. Li trovai ſempre più abbondanti di fuoco, dirò così, che di acqua, giacchè la pioggia d' ordinario era tenue, e le ſaette copioſiſſime: che anzi per due volte furono pur tali, ſenza che cadeſſe di cielo una ſtilla d' acqua. Eſpiando con occhi attenti la nuvola temporaleſca, o prima che veniſſe ſul noſtro zenit, o dopo che ne era partita, moſtrava chiaro non eſſer lei gravida di molta pioggia, concioſſiachè laddove l' altre nuvole temporaleſche apportatrici di qualche acquazzone ſono d' una conſiderabile groſſezza, e quindi formano quelle apparenti gran torri, quelle biancheggianti montagne, la nuvola accennata ſoleva eſſere piuttoſto ſottile. Un' altra differenza io oſſervai fra i temporali di quella nebbia, e gli altri. Parlando degli ultimi, ſpeſſo cominciano a formarſi a cielo ſereno, ingroſſano a poco a poco, ed allargatiſi ſul noſtro orizzonte verſano un nembo d' acqua, o di grandine, indi o recandoſi altrove, o ſciogliendoſi ridonano al cielo la tolta ſerenità. Per contrario quando dominava quella nebbia un velo nuvoloſo ſtendevaſi ſopra una immenſità di paeſi, produceva ora in un giorno ora in un altro de' più romoroſi, e de' più ſpaventevoli temporali, e dopo che queſti ceſſato avevano non laſciava quel velo di nugoli di coprire il cielo. Non tacerò un' altra ſingolarità relativa ai fulmini, e ai tuoni di quella ſtagione. I primi bene ſpeſſo non erano accompagnati da quel ſuono ſtridulo e allungato, oppur da quell' altro ſomigliante di molto ad uno o a più colpi di cannone, i quali due ſuoni ſembrano formare l' eſtrinſeco diſtintivo de' fulmini ordinarj, ma avevano infinitamente in grande la ſomiglianza del ſuono che produce una canna quando con entrambe le mani fendeſi per lo lungo preſtamente in due: oppur quell' altro che cagiona un violento colpo di baſtone fu d' una tavola. I' tuoni poi che per l' oſcuro lor ſuono pareano altiſſimi, non erano molte volte continuati, ma interrotti da morule che li rendevano come ſtentati, e difficili a farſi ſentire. Una ſimile circoſtanza viene pure marcata dal più volte lodato Aſtronomo Padovano.

Fin qui ho ragionato, illuſtre mio Amico, della nebbia non vaporoſa, e dei fenomeni che la accompagnarono nelle pianure Lombarde. Paſſo ora a farvi parola della medeſima da me oſſervata ne' ſiti montuoſi, quando dalla parte di Parma ſuperai il giogo dell' Appennino per recarmi a Portovenere. Queſto picciol viaggio venne da me fatto in un giorno, che fu il venteſimo terzo di Luglio. La nebbia in quella ſtagione era una metà circa meno denſa di quello che ſtata era in Giugno. Di più il tempo allora era ſereno, a riſerva di alcuni temporali, che a quando a quando inſorgevano da libeccio. In quel tratto di monti era egualmente diradata che alle loro falde, e radici. Quando fui molto inoltrato ſu di eſſi, io era ſopra tutto attento, ſe nelle loro gole, e ne' più baſſi lor fondi vi appariva nel modo ſteſſo, e trovai che sì, di maniera che quel caliginoſo che aveva l' aria ſu le più alte cime, lo aveva pure in que' cupi fondi. In più d' un luogo di quell' alte montagne ſi formavano ſotto i miei occhi degli ammaſſamenti più o meno grandi di nebbia, ma che era di qualità vaporoſa, entrando dentro alla quale io reſtava bagnato, quando l' altra era aſciuttiſſima. Inoltre la prima era di gran lunga più ſpeſſa della ſeconda. Ma il fenomeno più bello e più grandioſo che mi ſi offrì fu ſul giogo altiſſimo di quell' Alpe. Un miglio e mezzo prima di giungervi mi trovai naſcoſto fra un ammaſſo di nuvole, che venivano da libeccio. Proſeguendo il cammino all' insù dopo l' aver fatto un quarto di miglio, cominciai a ſentire qualche colpo di tuono che mi parve viciniſſimo. Andando più alto e ſempre in mezzo alle nuvole mi ſoprappreſe la pioggia con vento; e da' tuoni novelli che attorno a me romoreggiavano, e da' viviſſimi lampi che qua e là vedeva guizzare, m' accorſi non ſenza ribrezzo d' eſſere attorniato dal temporale. Ciò nondimanco feci coraggio, ed avendomi aſſicurato la guida che mi conduceva, che pochi paſſi reſtavano a pervenire al ſommo della montagna, dopo che ſcendendo al baſſo ſe non dalla procella, da quel bujo almen delle nuvole, che mi toglieva la viſta, io mi ſarei liberato, ſpronai il mio cavallo, e in poco d' ora giunſi di fatti alla ſoſpirata cima, chiamata *Ciſa*, che è il luogo dove termina lo ſtato di Parma, e comincia quello della Toſcana. Quivi la pioggia era più rimeſſa, ma il vento più forte, e l'aer freddiſſimo. Quando fui avvolto nel temporale, ſiccome cominciai a ſentire del freddo, così tirai fuori il termometro, che era coſtrutto in maniera, che non ſofferiva punto dalla pioggia, per appoggiare ſu d' una laſtra d' argento, ed è quel deſſo che voi grazioſamente mi regalaſte a Ginevra, e che tra le molte altre coſe voſtre prezioſe e care io conſervo qual dolce pegno dell'amicizia verſo me voſtra. Colaſsù adunque diſceſe in pochi ſtanti fino ai gradi $7\frac{3}{4}$, quando alle radici della montagna marcava i gradi 25 ſopra lo zero. Seguendo la direzion della ſtrada io non potea fare due paſſi ſenza cominciare a diſcendere, e già era ſull'avviarmi all'ingiù, quando un inaſpettato fenomeno mi determinò a cangiare idea. Alzando gli occhi al di ſopra della ſtrada verſo mezzodì vidi un chiarore attraverſo la nuvola tempeſtoſa, il quale a me parve venire da' raggi ſolari che andaſſero a ferire la ſommità di una contigua più elevata montagna. Uſcendo fuor di cammino la Ciſa s' inalzava dolcemente verſo quel luogo dove veniva il chiarore, e però ſenza indugio mi determinai d'incamminarmi a quella volta. A mano a mano ch' io ſaliva colaſsù, diradavanſi i nuvoli che mi attorniavano, creſceva il chiarore, veniva meno la pioggia, ſcemava il freddo, e continuando ſempre più in alto il cammino, a poco andò che ſvelata mi apparve la bella faccia del ſole, trovandomi già tutto fuora del temporale, anzi vedendolo aggirarſi ſotto a' miei piedi. E' ben difficile che nel reſtante de' giorni miei io m'avvenga in altro naturale oggetto per me più ſorprendente di queſto, più dilettoſo, più grande. Standomi adunque ſu quella creſta di monte mi appariva il ſottopoſto temporale in ſembianza d' un immenſo lago nuotante nell' aria, irraggiato dal ſole, e tutto in tempeſta. Erano cioè gli ſtrati ſuperiori delle nubi temporaleſche, che inveſtiti dalla luce ſolare, e dal vento prendeano quel mentito vaghiſſimo aſpetto. Soffiando laggiù un forte libeccio, ſi vedevano correr le nubi all' oppoſta parte piene d' increſpamenti, di onde; ed oltre a quel moto di rapimento e comune ne avevano altri particolari, ed uno diſtintamente di rotazione, per cui s'ingeneravano in eſſe qua e là molti vortici , ed a vicenda ſi diſtruggevano , ſomiglianti a quelli che veggiamo in piccolo nell' acque correnti de' canali, de' fiumi . La cadente pioggia che andava a percuotere que' petroſi ciglioni , e quelle annoſe boſcaglie, cagionava un confuſo non interrotto fragore, che veniva a più doppj accreſciuto, e dal vento che ſcuoteva violentemente le piante , e da' rivi, e torrenti che allora turgidi d' acque, e al baſſo precipitanti frangevano con iſtrepito contro que' moltiplicati dirupi. I tuoni , e i lampi proſeguendo ad eſſer frequenti , mi determinai d' intraprendere qualche rifleſſiva oſſervazione ſu di eſſi, la qual coſa non mi fu conceduta di fare quando io era in mezzo al temporale, per la qualche paura, il confeſſo, che allora mi preſe. Sopra tutto ſtava attento per vedere come producevaſi il lampo, ſe da un' elettrica ſcintilla lancianteſi da un nuvolo nell' altro vicino, come vogliono i più de' moderni Fiſici, allorchè il primo abbonda di elettricità, e ne ſcarſeggia il ſecondo. Ma nulla in ciò di preciſo, nulla di diſtinto mi fu dato di poter vedere, per formare quell' immenſo aggregato di vapori un tutto unito , e come un nuvolo ſolo . A volta a volta vedeva ſoltanto rompere dal ſeno di que' vapori una capace ſcintilla, ora ſemplice, or diviſa in più rami, che in un attimo ſcorreva un ampliſſimo ſpazio , e per lo più non diritta, ma a varj angoli, e a ſvolte compoſta, o a *zigzac* come direbbono i Franceſi , e perciò ſimiliſſima alle elettriche ſcintille che ſchizzano da una macchina aſſai poderoſa. Un momento appreſſo mi feriva l' orecchio il romore del tuono, o piuttoſto del fulmine, ma queſti fulmini che ad ogni balenar di ſcintilla ſcoppiavano , erano piuttoſto piccioli . Per un quarto d' ora fui tacito ammiratore giulivo di quella ſcena , che andò a finire col dileguarſi a poco a poco , e ſvanire le ſottocorrenti nuvole , per cui la proſſima Ciſa, e i circonvicini luoghi d' inviſibili che mi ſi rendevano prima, mi apparirono tutti ſvelatamente . Alle coſe fin qui notate ne debbo aggiugner tre altre , l' una che durante il temporale in que' ſiti più baſſi era colaſsù il vento ſommamente rimeſſo, l' altra che minore ſentivaſi il freddo, mentre il termometro che nel luogo del temporale marcava, come già diſſi, il grado $7\frac{3}{4}$, ſu quella cima era aſceſo all' ombra al grado 12: la terza che la nebbia non vaporoſa, quella che è il precipuo ſoggetto di queſto paragrafo, tanto ſu quella eminenza, che nei monti meno alti dove era piovuto, ſi oſſervava la ſteſſa, ciò a dire l' aere appariva caliginoſo in guiſa, che quantunque non toglieſſe la viſta de' lontani paeſi, la rendeva però molto offuſcata. Ed un ſimile offuſcamento mi ſi diede pure a vedere quando laſciata la Ciſa, e travalicato l' Appennino giunſi a Pontremoli, e il giorno appreſſo alla Spezia. Medeſimamente non ne andava eſente quel golfo, e il mare Liguſtico. Sebbene a poco a poco andoſſi perdendo, e verſo li 5 di Agoſto non reſtava di quella nebbia più apparenza, più ombra. Durante poi il mio ſoggiorno a Portovenere, e in quelle vicinanze, ricomparve due volte, l' una al naſcere d' un libeccio, l' altra d' un ſcirocco, ma tutte e due le volte fu aſſai rara, e di breve durata.

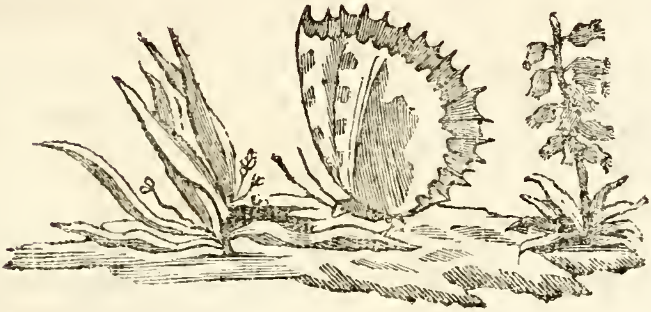
Queſti ſono que' pochi fenomeni relativi a queſta ſtraordinaria meteora, che nel tempo ch' io m' occupava in altri oggetti ho potuto oſſervare. Voi non ignorate probabilmente l' ipoteſi pubblicata intorno alla ſua origine dal Sig. *Toaldo*, il quale opina che ſia ſtata una conſeguenza de' tremuoti della Calabria, in quanto che dopo quelle violentiſſime e diuturne ſcoſſe ſiccome è ſtata oſſervata in quegli sfortunati paeſi una foltiſſima nebbia cagionata probabilmente da un corpo immenſo di eſalazioni ſprigionateſi allora dall' interno della terra, e ſollevateſi nell' atmosfera, così queſta nebbia col favore de' venti è ſtata portata dentro a queſto noſtro cielo Lombardo. Tale ipoteſi viene appoggiata a due ragioni principali, l' una che nel tempo della maggior denſità di quella nebbia preſſo di noi dominavano appunto i venti auſtro-ſciroccali, che traverſato aveano quelle deſolate contrade; l' altra che queſta nebbia non toccava mai terra, ma era ſempre alta, e perciò denotava eſſer venuta dall' alto, e come caduta nella noſtra atmosfera.

Mi era già nota queſta ipoteſi prima di fare le oſſervazioncelle ſopraddeſcritte, e a me parve allora non ſolo ingegnoſa, ma anche plauſibile ed appagante; e adeſſo che le ho fatte, non laſcio neppur di pregiarla. Solamente il rinomato Autore di eſſa, mio grande Amico, potrà vedere, ſe mai ſi abbatteſſe a leggere queſti miei fogli, che qualche circoſtanza acccompagnante quella nebbia è alquanto diverſa da quelle che ſono ſtate notate da lui. Così per atto d' eſempio nella Lombardia Auſtriaca, e nella Modaneſe non era un vento auſtroſciroccale, ma un ponente che dominava, quando l' aria di queſte parti era ſommamente caliginoſa. Solamente una volta a Portovenere ſi offuſcò all'inſorgere del ſcirocco. Di più la nebbia di queſti paeſi non era ſoltanto in alto, come nel Padovano, dove ſoffiavano anche que' venti auſtro-ſciroccali, ſiccome fu oſſervato dal mentovato Profeſſore, ma toccava realmente la terra; e nei dirupi più profondi dell' Appennino appariva, come fu detto, egualmente folta che nelle ſue più elevate cime. Trovandomi nelle colline di Reggio ne' primi giorni di Luglio, quando cioè non eraſi ancor diradata, inſtituii la ſeguente curioſa eſperienza. All' aperto feci piantare in terra una capannuccia di ſarmenti, fornita d' un piciol uſcio, e per ogni banda ſerrata, a riſerva d' un rotondo pertugio in alto, per dove poteva entrare un raggio di luce ſolare, che andava a ferire il ſuolo della picciola capanna. Lo ſcopo era ſe ſtando chiuſo là dentro, e con gli occhi fiſi alla parte del raggio raſente terra, io poteva vedere attraverſo di eſſo la nebbia: la vidi di fatto, e meglio ancora ſotto la lente, per cui attraverſo del ſole diſtingueva le particelle che la componevano, le quali non eran mica di forma globoſa, come i palloncini o le veſcichette vaporoſe, oſſervate sì bene dal chiariſſimo Sig. *di Sauſſure*, ma per l' oppoſito avevano figura irregolare, e quale appunto ſuole eſſer quella delle eſalazioni terreſtri. Notai di più che tali particelle, almeno molte, uſcivano dalla terra, e ſi ſollevavano in alto. La qual' ultima circoſtanza, ſe ſtata foſſe univerſale, avrebbe dato a credere che quella nebbia non era foreſtiera, ma locale. Ma io intorno all' origine di tal meteora non ardiſco decidere, e laſcierò a quel dottiſſimo mio Amico, e a voi il portare quel ſavio giudizio ſu queſte mie paſſaggiere oſſervazioni, che verrà riputato più confacente alla verità.

Prima di finir la Lettera non v' increſca ch' io aggiunga una parola ſu i temporali. Quando io mi trovava preſſo le Panie, rari eran que' giorni, che non ne inſorgeſſe qualcheduno

duno verſo la loro ſommità. Più volte appoſtatamente ho cercato che mi ſi rinnovaſſe la ſcena, che aperta mi ſi era ſopra la Ciſa, ma ſempre inutilmente, poſciachè giunto io a quelle cime, o il temporale era omai ſvanito, o ſi era recato altrove, o le nuvole temporaleſche ſi erano ſollevate a ſegno che più non toccavano la montagna. Privo di queſto ſpettacolo, non me ne mancò un altro analogo, che non laſciava eſſo pure di avere il ſuo iſtruttivo, il ſuo bello. Riguardava eſſo la formazione dei temporali. Verſo la metà del mattino ſu quelle nude roccie aridiſſime cominciavano qua e là ad apparire a non molta lontananza dal doſſo dell' Alpe piccioli ammaſſi di vapori, a ſomiglianza di fumi. Talvolta ſembravano ripoſar ſu la terra, e tale altra erano da eſſa alquanto ſollevati, e pendenti in aria. Queſti ammaſſamenti vaporoſi venivano accreſciuti in numero da altri di freſco prodotti o appariti. Il loro moto in generale ſoleva eſſer lentiſſimo, e quello di aſcendere. Via via che aſcendevano, facevanſi di maggior corpo, quantunque però taluno o calaſſe di mole, od anche del tutto ſvaniſſe. L' aggrandimento nel volume era cagione che fra loro ſi avvicinaſſer di più, e che in progreſſo di tempo arrivaſſero anche a toccarſi. Quindi dopo qualche ora, e ſpeſſo verſo il mezzodì, o poco più tardi que' piccioli aggregamenti di vapori inſieme unitiſi venivano a formarne un ſolo grandiſſimo. Allora la nuvola (che così chiamerò quell' aggregato totale di vapori) con le ſue parti più alte cominciava a ſopraſtare alla cima delle Panie, e queſte parti che rappreſentavano varie e bizzarre figure, erano ſempre bianchiſſime, per eſſere inveſtite da' raggi ſolari, quando l' altre ſottoſtanti apparivan nere oppur bigie, per la maggiore o minor privazione di luce. Intanto la nuvola ſi faceva più eſteſa e più denſa, varj ondeggiamenti, e moti vertiginoſi a ſomiglianza d' un aſpo naſcevano dentro di lei, e cominciava ella ben toſto a lampeggiare, e a tuonare. Era regola ch' io non ho mai trovata ſoggetta a eccezioni, che ſu le prime quando il temporale era naſcente, le ſcintille elettriche eran cortiſſime, e breviſſimi, e piccioliſſimi i tuoni. In ragione poi che creſceva il temporale, quelle ſi facevan più lunghe, e queſti più romoroſi, e di maggiore durata. Aggranditoſi così il temporale, cominciava a verſar acqua o gragnuola, ed ora eſſo finiva ſu que' deſerti, dove era nato, ora abbandonate le Panie venía dal vento recato ſopra altri paeſi. Sebbene queſto vento pareva che aveſſe la primaria ſua origine dalla nube temporaleſca. Quantunque, come ho già detto, io non abbia mai avuto il piacere di trovarmi ſu le Panie dentro al temporale, mi ſono però abbattuto più d' una volta a' ſuoi lembi, e quivi il vento ſoffiava gagliardamente, e aveva tutte le apparenze di venir proprio dal ſeno della nuvola tempeſtoſa. Oſſervava di più che ſcioltaſi queſta, oppure allontanataſi, quello altresì andava a finire. E queſte ſono alcune delle principali circoſtanze che viaggiando io nelle Panie ho veduto accompagnare la formazione di que' frequentiſſimi temporali. Ma altrove io vi vi parlerò forſe di altre mie oſſervazioni relative a un tal genere di meteore, e allora non laſcierò di ſottoporre al lucidiſſimo voſtro intendimento alcune mie filoſofiche congetture, da me ora taciute, null' altro eſſendomi io propoſto nel ragionare dei temporali che il far le parti di ſemplice Storico.

Ma è tempo ch' io termini queſta ſeconda mia Lettera. Nella prima, che ebbi già il compiacimento di ſcrivervi, m' ingegnai di abbozzarvi un compendio delle coſe più principali da me oſſervate ſul mare. In queſta ſeconda voi lo avete di quelle, che ho eſaminate ſu i monti. Quando le circoſtanze mel permetteranno proccurerò nella mia Opera di ſviluppare tutte queſte materie, e di corredarle delle neceſſarie pruove, bene ſpeſſo ſoppreſſe in queſte due Lettere, per ſervire alla brevità. Dalla promeſſa Opera comprenderete anche meglio che dalle due Lettere, che in queſto viaggio, nel quale ſono ſtati da me impiegati tre meſi compiuti, non ho al certo riſparmiato fatiche, nè ſudori, e dirò anche danaro, ſtato non eſſendo indifferente un tal viaggio alle limitate finanze d' un Filoſofo. Ciò nondimanco ove queſte mie fatiche vengano coronate dall' approvazion voſtra, e di quella del Pubblico, io mi terrò contentiſſimo, e queſta avrà luogo preſſo di me della più ſplendida ricompenſa. Oltre il ſincero deſiderio di apportare in queſta occaſione qualche utilità alla ſcienza che profeſſo, ho cercato di non eſſere infruttuoſo al Regio Imperiale Muſeo di Pavia, cui ho l' onore di preſedere, coll' arricchirlo di più eſemplari di tutte quelle naturali produzioni, sì marine, che terreſtri, le quali ſono ſtate il ſoggetto di queſte due Lettere. Tali eſemplari in queſto pubblico onorevoliſſimo Luogo eſiſtenti, ed oſtenſibili a chicheſſia procaccieranno anche maggior credenza alle coſe fin qui narrate.



APPENDICE

ALLA MEMORIA

Sopra i Fuochi de' Terreni e delle Fontane ardenti in generale, e ſopra quelli di Pietra-Mala *in particolare.*

Del Sig. ALESSANDRO VOLTA Profeſſore di Fiſica Sperimentale nell' Univerſità di Pavia.

HO avuto occaſione in un giro da me fatto lo ſcorſo Maggio in compagnia d'altre dotte perſone, e delle naturali coſe ſingolarmente ſtudioſe (*a*), di oſſervare le fiamme d' un altro terreno ardente; le quali ho riconoſciuto eſſere dell' iſteſſa natura delle già deſcritte di Pietra-mala, e ſubire le ſteſſe vicende: cioè null' altro eſſere, che aria infiammabile ſorgente copioſamente in alto attraverſo una terra ſecca, e ſcrepolata, ſprovveduta di qualſiſia bitume. Queſto terreno ardente ſi trova alcune centinaja di paſſi ſolamente lontano dalla famoſa città di *Velleja* già da molti ſecoli ſepolta, e ſcopertaſi ha pochi anni nelle montagne del Piacentino (*b*). Siccome a quello di Pietra-mala, così pure a queſto di *Velleja* ſi dà nome molto impropriamente di vulcano: ciò che potrebbe farlo incolpare dell' eccidio di coteſta antica nobile città. E' però da oſſervarſi riguardo al primo, che non v'ha in tal luogo il minimo veſtigio di eruzione, nè alcuna produzione vulcanica vi s' incontra; e riguardo alle rovine, la ſemplice iſpezione locale ne

---

(*a*) Il Sig. Marcheſe Pompeo *Cuſani*, Cavaliere nella ſua freſca età ricco di cognizioni d'ogni genere; il Sig. Abate Don Carlo *Amoretti*, Secretario della Società Patriotica di Milano; e il Sig. Canonico Don Gio: Serafino *Volta*, Cuſtode del Muſeo di Storia Naturale della R. I. Univerſità di Pavia.

(*b*) Del 1757 vi è ſtata trovata a caſo la celebre *Tavola Trajana*; e negli anni ſuſſeguenti furono intrapreſi gli ſcavi, che hanno ſcoperto buona parte della città, un circo ecc.

moſtra che un pezzo di montagna argilloſa, come ſon tutte quelle che ivi ſovraſtano, ſoggette a ſmottare, laſciataſi giù d' improvviſo, oppur anche ſucceſſivamente, ha riempiuto di terra e coperto la città in un colle vicinanze. Simili frane o ſcoſcendimenti di terra ſono frequentiſſimi in tutta quella catena di montagne argilloſe o margacee, e chiamanſi dagli abitanti *libie* o *lavine*. Se ne veggono qua e là di recenti, e veſtigi ne rimangon dappertutto. Ci fu anzi moſtrato un luogo diſtante men di due miglia da Velleja medeſima, dove rimaſer ſepolte, non ſon che tre o quattr' anni, alcune caſe. Or ſul luogo propriamente della città anch' eſſa ſepolta trovaſi un ampio rialzo di terreno, che non ſiegue l' andamento dell' altre montagne, ma è gettato di traverſo, e che dechina verſo un torrente chiamato *Chero*. Il ſito delle fiamme trovaſi verſo il fine di queſta china, direttamente ſotto Velleja, e aſſai vicino al nominato torrente.

Non poſſo a meno di far qui una rifleſſione. Parlando dei fuochi di Pietra-mala affatto ſimili a queſti, e convenendo aver ricorſo a qualche ſuppoſizione per intendere come tant' aria infiammabile poteſſe colà trovarſi raccolta in vaſte cavità ſotterranee, quanta ſe ne ricerca per ſomminiſtrar l'alimento continuo a tali fiamme, la prima idea che mi venne alla mente, e che propoſi per la prima, fu quella di una palude e di un ammaſſo qualunque di ſoſtanze vegetabili od animali, rimaſto ſepolto per una di quelle rivoluzioni, che è facile, io dicea, d' immaginare: il disfacimento delle quali ſoſtanze ſepolte ſappiamo qual prodigioſa quantità d' aria infiammabile produce. Or qui per il terreno ardente di Velleja una tal rivoluzione non ho più biſogno di proporla indovinando, non è ſuppoſizione o congettura, ma fatto certo, di cui eſiſte un monumento pur troppo parlante.

Eran due i luoghi, da cui s' alzavan le fiamme, e fiamme ben alte e veementi, quando noi li viſitammo; un viciniſſimo al torrente, l' altro alcuni paſſi più in ſu; quello piuttoſto riſtretto, queſto conſiderabilmente più ampio. Ci diſſer le perſone che ſeguivano accompagnandoci, tralle quali il Parroco del luogo, uomo di molta intelligenza nè ignaro di Fiſica, che non ſempre ardono ambedue, ſendo ſoggetti a ſpegnerſi, ſingolarmente il più picciolo; ma che ſi riaccendon toſto al gettarvi ſopra un ſolſanello, un mazzetto di paglia, o qualſivoglia altro corpo acceſo; che il vento piuttoſto che la pioggia li ſpegne; che queſta anzi d' ordinario fa ſorger le fiamme più alte; finalmente che il più picciolo di quei terreni ardenti, che è più abbaſſo, rimane ſoventi volte coperto d' acqua; e che allora ſorgon da eſſa copioſiſſimi gorgogli, che la fan tutta ribollire, ſebben ſi ſenta fredda tuffandovi la mano, come ogn' altr' acqua. Tali gorgogli, ci diceva il noſtro bravo Curato, ſono gorgogli d' aria, che ſi può con un cerino infiammare a pelo dell' acqua medeſima, e ſi può anche raccoglierla in veſciche per mezzo d' un imbuto, com' egli aſſeriva aver praticato più d' una volta, ed accenderla quindi a bell' agio ſpingendola contro la fiamma di una candela. Tanta è la copia, ſoggiungeva, di queſt' aria che ſcappa fuori dall' acqua, ch' io vorrei provarmi a riempirne un pallone aeroſtatico, ſe l' aveſſi, ſicuro di riuſcirci in poco d' ora.

Troppo ci avean detto, perchè dubbio più rimaner poteſſe intorno alla natura di queſti fuochi. Ma anche prima di tal relazione da quel poco ch' io aveva ſentito raccontarne in confuſo, e dall' eſempio di quelli di Pietra-mala, era più che perſuaſo che procedevano anche queſti da null' altro che da aria infiammabile, cui per raccogliere aveva portato meco da Pavia e boccie e imbuti. Aveva anzi di più prevenuto i compagni di ciò che avremmo ſicuramente veduto; uno de' quali pareva tuttavia più inclinato a credere, che tali fiamme traeſſero il loro alimento immediatamente o mediatamente almeno da qualche vena di petrolio, tantochè ſi prometteva quaſi di poter raccoglierne in ſoſtanza, o di ricavare almeno della terra pregna di ſimil bitume.

La prima coſa che propoſi di fare, dopo ch' avemmo data un' occhiata alle fiamme, e veduto che eran roſſigne (tali appariano per lo ſplendor viviſſimo del ſole che vi dava addoſſo), ſenza fumo o fuliggine ſenſibile, e che tramandavano appena un leggeriſſimo odore, il quale non ſi potea neppur dire oleoſo, la prima coſa, dico, che fu propoſta e fatta ad oggetto di verificare le mie idee, è ſtata quella di allagare uno dei terreni ardenti. Si ſcelſe per ciò fare più comodamente e più preſto il men grande; ſi cavò alquanto di terra; e vi ſi verſarono alcuni ſecchj d' acqua. Queſto baſtò ad eſtinguere le fiamme in tutto il ſito allagato; ma non a togliere l' eruzione ſpontanea copioſa dell' aria, la quale ſalendo attraverſo l' acqua medeſima in groſſi e frequenti gorgogli ribollir la faceva in varj ſiti. Allora io feci vedere a tutti, come preſentando un candelino acceſo alle bolle che ſi preſentavano a galla dell' acqua, tutte vi prendean fiamma. Queſta fiamma non durava, è vero, nè ſi eſtendeva ſu tutta la ſuperficie dell' acqua, come avviene in altre fontane ardenti, e come ſuccede talora anche quivi, per la ragione ch' erano i gorgogli, ſebben copioſi, come s' è detto, troppo ancora diſtanti un dall' altro, e che varj ſoffrivano delle interruzioni o pauſe: e ciò naſceva da che al primo inzupparſi del terreno molti ſcrepoli e feſſure avean dovuto chiuderſi, ond' era l' aria ſgorgante prima in piena copia rattenuta ora in gran parte. Il trovarſi per tal modo chiuſe o ingorgate ſul fondo del noſtro laghetto molte vie all' aria, faceva che tutt' intorno ſul labbro ancor ſecco o appena tocco dall' acqua uſciſſe eſſa aria con maggior impeto, e fiſchiando. Intanto noi facevam verſare nuov' acqua, onde ſoffocare in parte anche queſti getti, tantochè allagato più ampiamente il terreno, non avea ormai più l' aria altra ſtrada che quella di uſcir ſu per il terren bagnato e attraverſar l' acqua. Infatti andavan mano mano creſcendo i gorgogli in vigore e in frequenza, e per qualche larga via apertaſi infine ſtabilmente ſul fondo eran già divenuti parecchi non più interrotti e vaganti, ma continui e permanenti. Di maniera che non v' ha dubbio, che durando più lungo tempo a covarvi ſopra l' acqua, veduto avremmo ſortirne le bolle d' aria in quella ſtrabocchevole copia, che al riferire del noſtro valente Parroco vi ſi oſſerva negli allagamenti portativi talora dalle pioggie; e avremmo potuto diffondere col candelino la fiamma ſu tutta o quaſi tutta la ſuperficie dell' acqua. Ma ſe non era così copioſa l' uſcita ſpontanea dell' aria da dare queſto bello ſpettacolo, lo era abbaſtanza perchè poteſſimo riempirne a talento, ſiccome fu fatto, le noſtre boccie: una delle quali feci vedere ad accenderla un' ora dopo, eſſendo di là partiti; le altre ben cuſtodite me le recai a Pavia ad oggetto di eſaminar quell' aria a più bell' agio, e con maggior attenzione. Avrei deſiderato per compimento, e per dare un bello ſpettacolo ſul luogo, di avere un imbuto di ferro aſſai largo con canna ſtretta ed alta; perchè coprendo con queſto le fiamme del terreno ancora aſciutto, ciò che ſpente le avrebbe, avrei meſſo fuoco col candelino all' aria ſulla cima del cannello, da cui uſcendo eſſa affollata con impeto formato avrebbe un altiſſimo e vaghiſſimo getto di fiamma.

Quello de' compagni, cui le ſperienze mie comunque deciſive non finivan di appagare, perchè prevenuto per il ſuo petrolio, faceva intanto ſcavare d' attorno, e incontrata una terra nericcia, credette aver trovato quel che cercava, e ſenza neppur eſitare, ci moſtrò detta terra come pregna di un tal bitume. L' odore già era per lui di vero petrolio, agli altri ſembrava pure che annunciaſſe qualche coſa di ſimile; a me pareva, e non pareva. Si ebbe dunque cura di raccogliere varj pezzi di queſta terra nera d' attorno all' un ſito e all' altro dove ardevan le fiamme, e a diverſa profondità, per quindi analizzarla. Ma quale ſorpreſa poi quando fu trovato, che gettata ſui vivi carboni punto non metteva fiamma? E come rimaſe più ſorpreſo ancora il noſtro Mineralogo, quando ſottopoſta avendola alla diſtillazione, preſenti noi tutti che fummo compagni nel viaggio, non paſſò neppur una goccia di olio? Ecco quali furono i prodotti di 6 oncie di tal terra: 1.° dan. $4\frac{1}{2}$ di acqua limpida con un odore accoſtanteſi a quello dell' acido marino. 2.° dan. 7 di acqua ſimile con un poco di odore empireumatico. Nè l' una nè l' altra fece efferveſcenza cogli acidi. 3.° dan. 2 di flemma gialliccia con odore empireumatico più forte. Efferveſcenza cogli acidi. 4.° $\frac{1}{2}$ dan. di ſpirito volatile acquoſo ed empireumatico: efferveſcenza più forte. 5.° rimaſero in fine nella ſtorta oncie 4 dan. 17. di terra nera abbruciata ſolubile in parte nell' acqua forte. Vi furono 17 dan. di perdita, non eſſendoſi raccolti i prodotti aeriformi, che debbono eſſere ſtati in parte aria fiſſa, e in parte aria infiammabile. E' notabile, che prodotti poco diſſimili ebbe il Sig. Baron *Dietrich* dalla terra nera da lui raccolta intorno ai fuochi di Pietra-mala (*a*); e già io

---

(*a*) *Lettres ſur la Mineralogie ecc.* pag. 421.

credo che non molto diverſi ſi ottengano da ogni terra graſſa.

Poniamo ora il caſo che quella noſtra terra di Velleja aveſſe realmente fornito del petrolio, in vece che non ne ha dato nè punto nè poco, certo i ſuoi ſautori, i ſoſtenitori dell' antica comune ſentenza avrebber menato feſta, avrebbero ſe non relegata del tutto la mia aria infiammabile, poichè la ſo vedere e toccare, l'avrebbero laſciata in diſparte, poco o nulla conceſſo avrebbero a quella, e tutto al diletto loro bitume: ſenza forſe cercare ſe tale terra ne conteneva abbaſtanza per ſomminiſtrar l'alimento alle fiamme di cui ſi tratta; ſenza troppo badare ſe dette fiamme raſſomiglino a quelle del petrolio, o piuttoſto a quelle della mia aria infiammabile. Io però avrei fatto loro rimarcare, che nel luogo medeſimo ove ardon le fiamme, non ſi trova neppure la detta terra nera, bensì una terra arida e ſecca mezzo calcinata; che quelle fiamme non dan fumo nè fuliggine ſenſibile, e quaſi nulla di odore, quando all' incontro il petrolio, ſiccome ogn' altro bitume, produce fiamma molto fuligginoſa e fetente. Dovendo pertanto convenire che non può eſſere il petrolio in ſoſtanza che bruci a fior di terra, o entro la medeſima, ſarebber ricorſi ai vapori di eſſo provenienti da maggiore profondità. Ma è forſe il petrolio volatile come gli olj eſſenziali delle piante? Anzi no. E poi o queſti vapori ſono condenſabili, e rimaner dovrebbero nell' acqua quando vien allagato il terreno che li tramanda, e ſoprannuotarvi offerendoci uno ſtrato di petrolio, il che non ſi oſſerva; o non ſono condenſabili, ma permanentemente elaſtici, tal che ſcappano dall' acqua in forma di gallozzole, che è quello che ſi oſſerva di fatto; ed ecco, ripiglio, un vero fluido aeriforme, ecco la mia aria infiammabile. E che m' importa in fondo, quando è provato che ivi eſiſte, e ch' è deſſa che arde, d' onde provenga? Io ſteſſo non ho attribuito ſempre l' origine dell'aria infiammabile, che chiamo nativa, alla lenta decompoſizione delle ſoſtanze vegetabili ed animali, di que' corpi inſomma da' quali anche per diſtillazione ſi ricava una ſimile aria (*a*)? Tra queſti corpi ſon certamente gli olj e i bitumi. Che anzi opino eſſere appunto la parte oleoſa delle anzidette ſoſtanze vegetabili ed animali o la ſola o la principale che forniſce tanto col proceſſo naturale quanto coll' artificiale l' aria di cui ſi tratta. Non eſcludo io dunque il petrolio: eſſo, come gli altri olj, come ogn' altra ſoſtanza infiammabile può decomponendoſi produrre aria infiammabile; e quando quella, che ſi trova in quantità ſtrabocchevole ſotto i terreni ardenti di Pietra-mala, e ſotto quelli di Velleja, di che non v' è più luogo a dubitare, foſſe così prodotta, vorrebbe dirſi per queſto che è petrolio quel che ivi arde e fiammeggia? A queſta maniera quando io accendo l' aria che proviene da uno ſtagno, ſul cui fondo trovanſi legni ed erbe infradiciate che l' han prodotta, potreſte dire che ſono i legni e l' erbe che dan la fiamma che vi fo vedere; ma chi ha ſano ſenſo, chi non ama la confuſione, diſtinguerà l' ardere immediato di tali corpi, e l' ardere dell' aria infiammabile già eſtratta da eſſi e raccolta a parte.

Così avrei incalzato queſtionando i partigiani del petrolio, ſe foſſe loro riuſcito d' incontrarne ne' luoghi de' terreni ardenti, o lì preſſo; ma dubito che ſi foſſero ancora arreſi, tanto può una preconcetta opinione. Ora però che per quanto ſi ſia cercato non ſe n' è rinvenuto punto nè poco, è finita ogni quiſtione, e la cauſa della mia aria infiammabile, che mi ſi dà vinta dal compagno ormai convertito, dovrà finalmente trionfare di quanti aderenti poſſano ancora trovarſi all' antica opinione.

Ho detto ch' io mi proponeva di eſaminare più attentamente ritornato a caſa l' aria infiammabile raccolta ſopra il terreno ardente di Velleja: or ſia pregio dell' opera il qui eſporre brevemente quello che ho trovato. Queſt' aria dunque arde con una fiamma lambente azzurrognola, un po' più chiara e più grande però di quella che dà ordinariamente l' aria cavata dai fondi d' acqua ſtagnante. Come queſta, e forſe più, è dura ad accenderſi colla ſcintilla elettrica; e com'

(*a*) Vegganſi le mie *Lettere ſull' aria infiammabile nativa delle paludi*, e le note all' articolo Aria infiammabile nel Dizionario di Chimica del Sig. *Macquer* tradotto dal Sig. *Scopoli*.

eſſa vuol eſſer miſta per lo meno a otto volte tanto d' aria atmosferica. Non manda odore ſenſibilmente diverſo da quello dell' aria infiammabile dei foſſi; bensì dà qualche poco di fuliggine, che queſta non dà. Per tale proprietà, e per quella della fiamma più chiara e più grande s' accoſta un poco all' aria infiammabile che ſi ricava colla diſtillazione ſia dagli olj puri, ſia dalle ſoſtanze vegetabili ed animali. Intorno a che ſe ſi riflette come l' aria infiammabile medeſima della diſtillazione, la quale ha un puzzo empireumatico inſopportabile ed è eſtremamente ſuligginoſa, va perdendo di quel puzzo e di quella ſuligginoſità a miſura che ſi lava e ſi sbatte nell' acqua, come ho ſcoperto, accoſtandoſi ſempre più anche pel colore della fiamma all' aria nativa delle paludi, che è prodotta da una lenta e ſpontanea decompoſizione delle medeſime ſoſtanze; ſe ſi riflette, dico, a ciò ſi verrà a comprendere che non differiſcono ſoſtanzialmente tra loro queſte arie, e che quella del noſtro terreno ardente già molto più vicina all' aria nativa delle paludi che all' altra della diſtillazione, ſe aveſſe come la prima i ſuoi natali e la culla nell' acqua, terrebbe con eſſa una perfetta raſſomiglianza; e che l' acquiſterebbe fors' anche dopo, ove ſol le toccaſſe di ſoggiornare ſott' acqua lungo tempo.

FINE del Tomo Secondo.

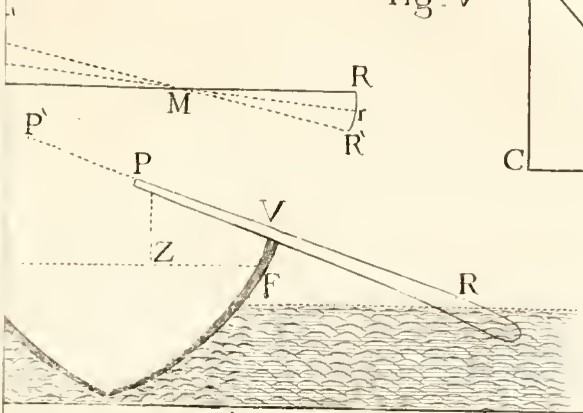
AVVERTIMENTO.

LE Tavole diſegnate per la Parte I. debbono collocarſi unite in fine del I. Volume di queſto II. Tomo coll' ordine delle pagine chiamate in teſta, e quelle della Parte II. in fine del II. Volume; e la Tavola contraſſegnata per la Parte I. e II. è comune ad entrambi i Volumi, e va meſſa in calce d' ambidue.

SEMPER
EADEM

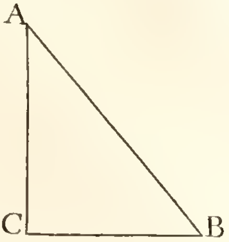
NATURAL HISTORY

g: 463. *LORGNA* Parte II

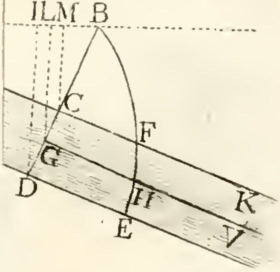


R
M
r
P`
R`
P
V
Z
F
R

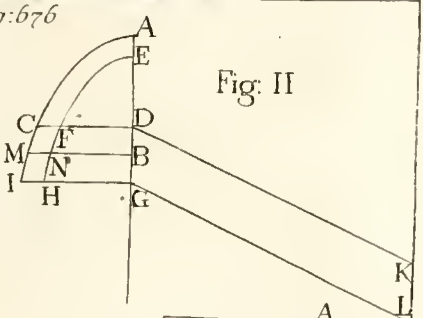
Fig: V



BONATI Tom: II pag: 676



ILM B
C
F
G
D
H
K
E
V



A
E
Fig: II
C
D
F
M
B
N
I
H
G
K
L

g: III

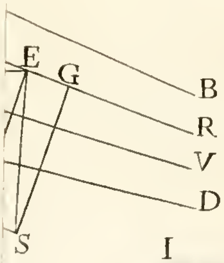


Fig: IV

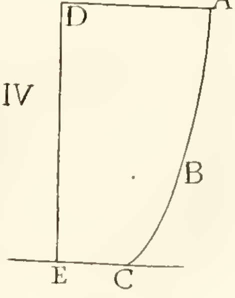
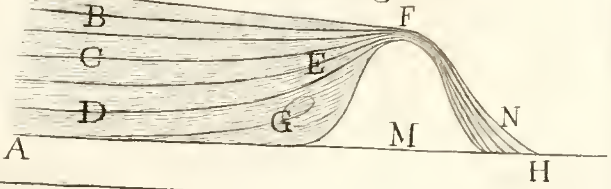


Fig: V



I
B
F
C
E
D
G
N
A
M
H

Fig. III

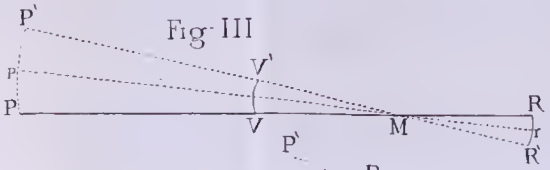


Fig. V

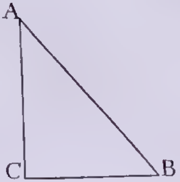
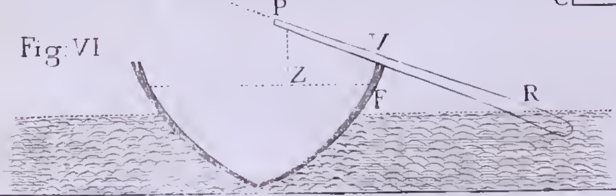


Fig. VI



BONATI Tom: II pag: 676

Fig. I

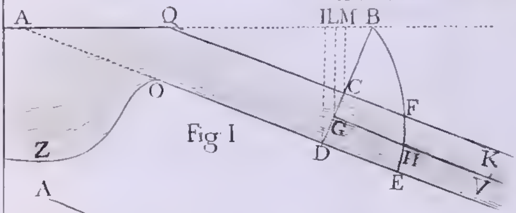

A
Q
ILM
B
O
C
F
G
Z
D
H
K
E
V

Fig. II

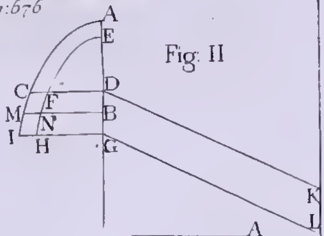

A
E
C
D
F
M
B
N
I
H
G
K
L

Fig. III

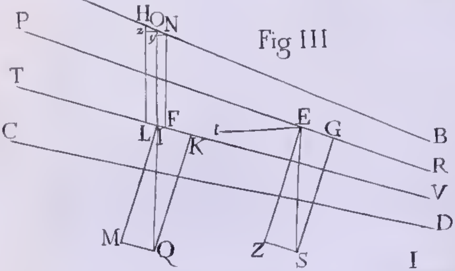

A
H
O
N
z
y
P
T
F
E
G
t
C
L
I
K
B
R
V
D
M
Q
Z
S

Fig. IV

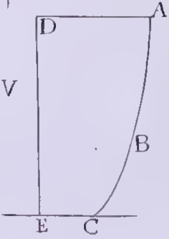
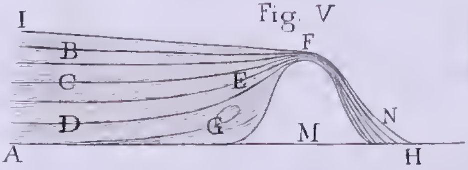


Fig. V


I
F
B
C
E
D
G
N
M
A
H

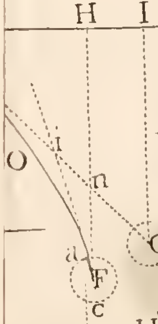
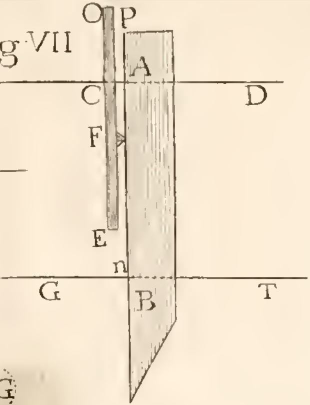


Fig: VII


O
P
A
C
D
F
E
n
G
B
T

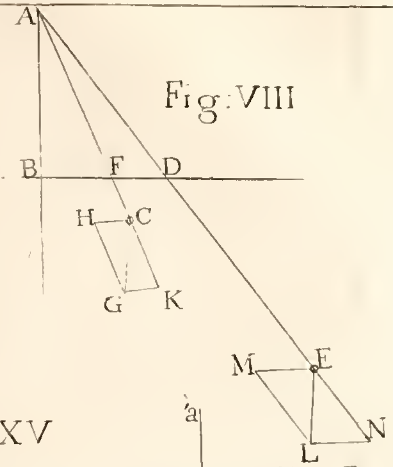

A
B
F
D
H
C
G
K
M
E
L
N

Fig: VIII

Fig: XV

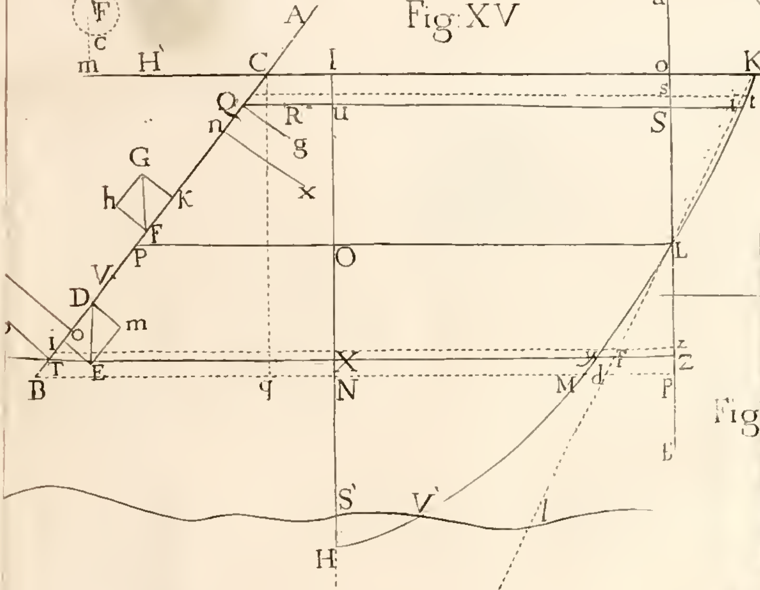

A
a
m
H`
C
I
o
K
P
s
Q
R
u
S
t
n
g
x
G
h
K
F
P
O
L
V
D
m
i
o
T
E
X
y
r
z
B
q
N
M
d
p
b
S`
V`
l
H

Fig XIV

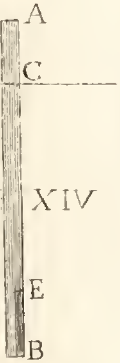
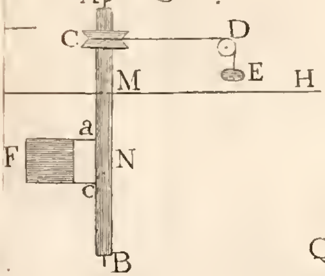


Fig: XI


A
C
D
E
M
H
a
F
N
c
B

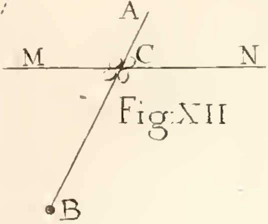


Fig: XII

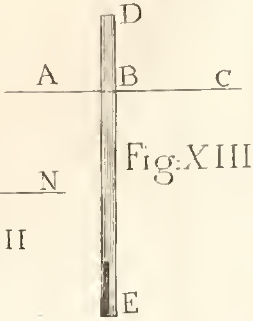


Fig: XIII

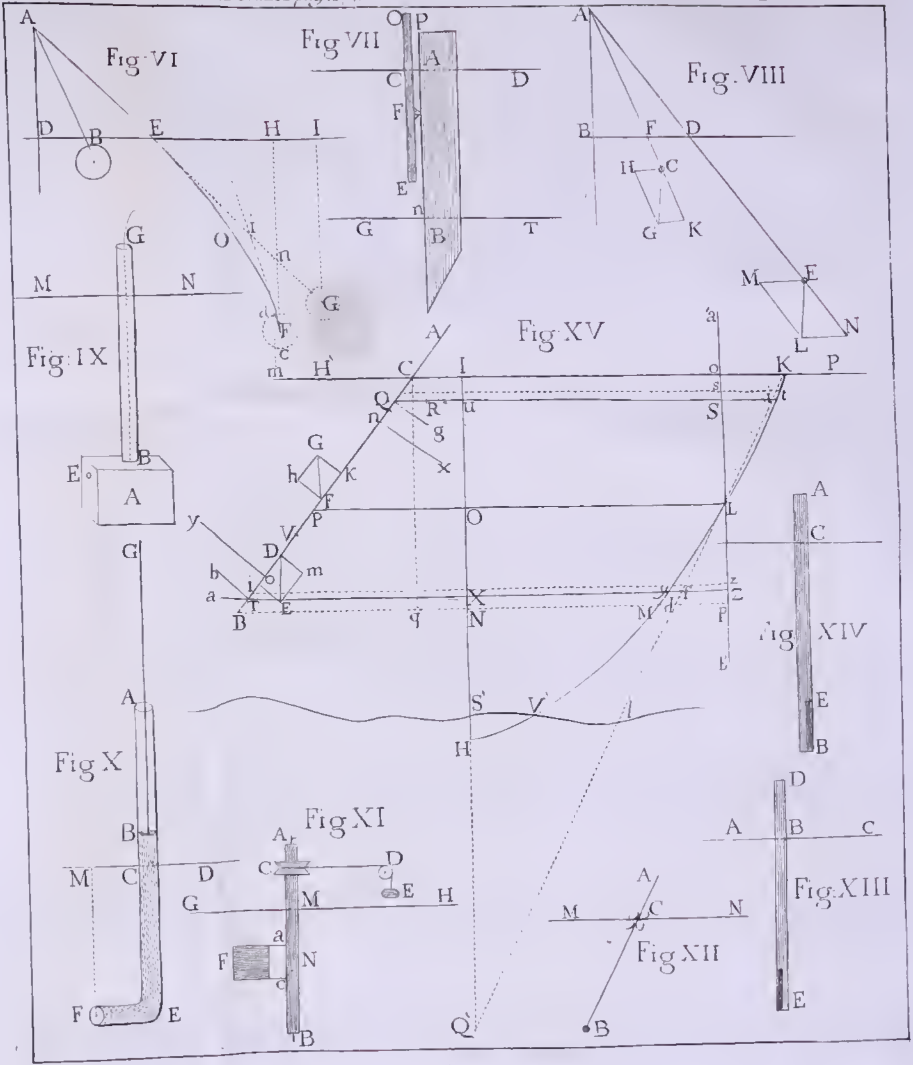
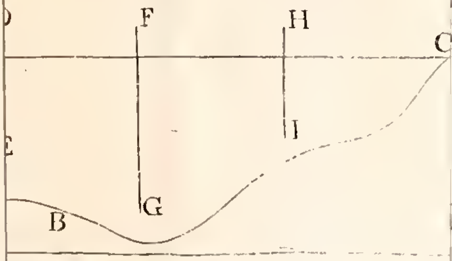
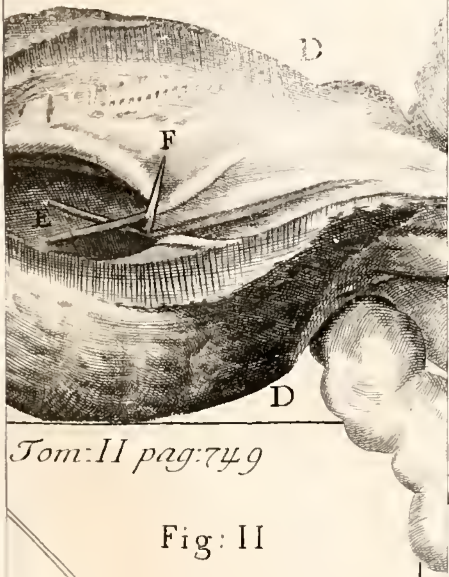


Fig. VI
A
D
B
E
H
I
O
i
n
G
d
F
c
m
Fig. VII
O
P
A
C
D
F
E
n
G
B
T
Fig. VIII
A
B
F
D
H
C
G
K
M
E
N
L
Fig. IX
G
M
N
B
E
A
Fig. XV
A
C
I
H
o
K
P
a
s
Q
R
u
S
t
n
g
x
G
h
k
F
P
O
L
y
V
D
m
b
i
o
a
T
E
X
y
r
z
Z
B
q
N
M
d
p
b
S
V
l
H
Q
Fig. X
G
A
B
M
C
D
F
E
Fig. XI
A
C
D
E
G
M
H
a
F
N
c
B
Fig. XII
A
M
C
N
B
Fig. XIII
D
A
B
C
E
Fig. XIV
A
C
E
B

Parte II

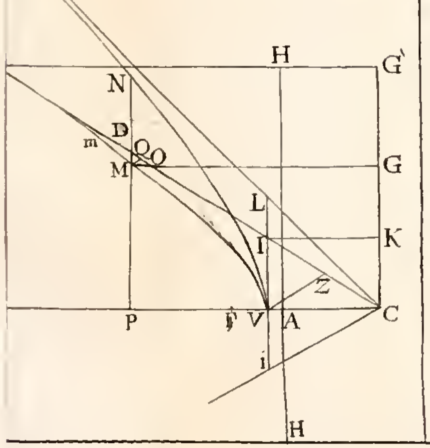
Fig·XVII

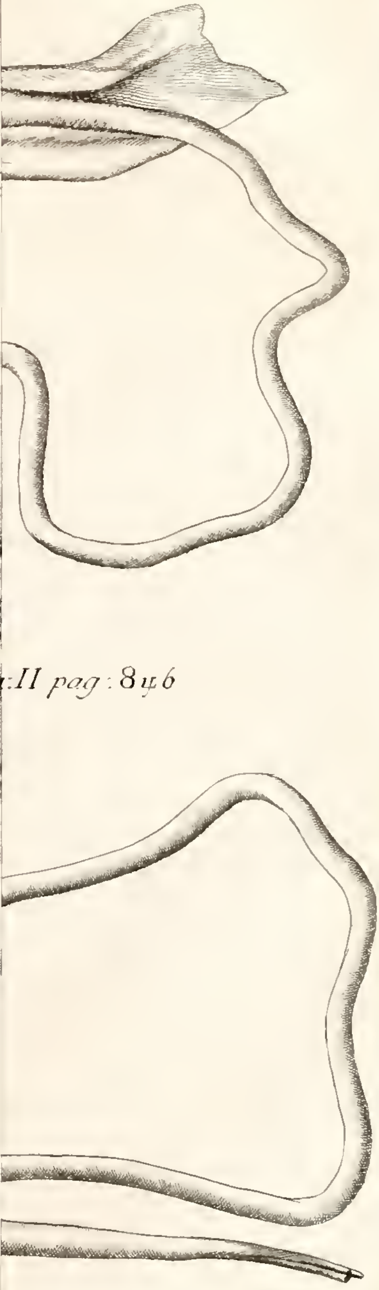




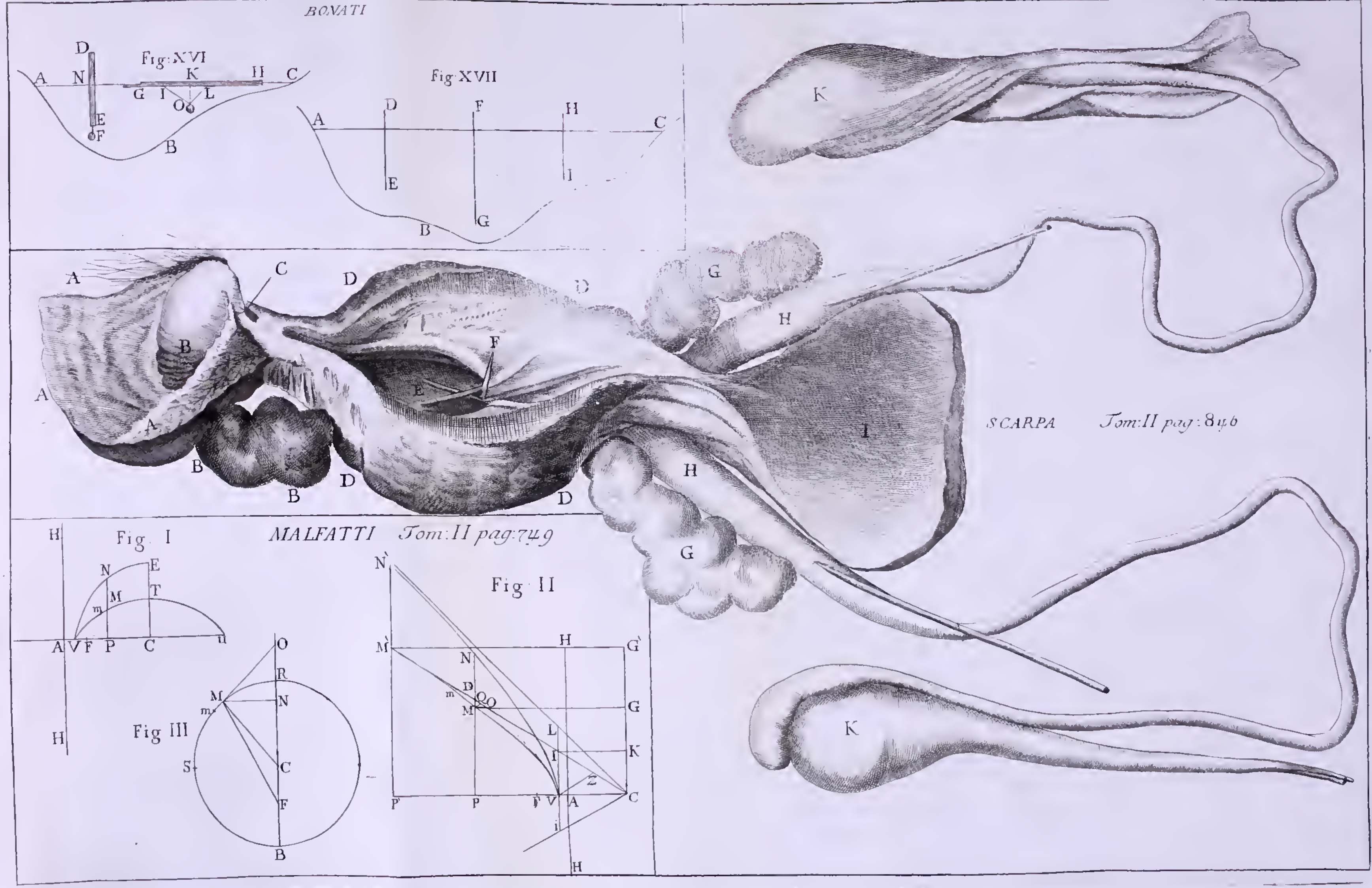
Tom:II pag:749

Fig: II


H
G
N
D
m
QQ
M
G
L
K
I
Z
P
f
V
A
C
i
H



:II pag: 846



BONATI

Fig:XVI

Fig·XVII

SCARPA Tom:II pag:846

MALFATTI Tom:II pag:749

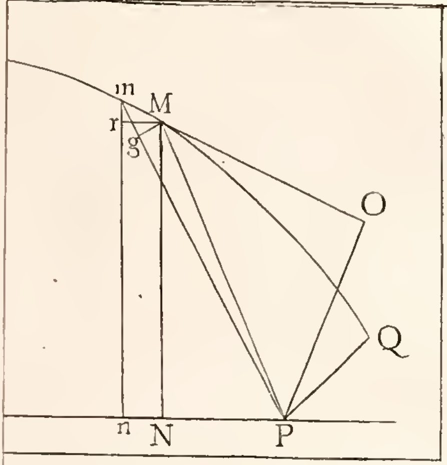
Fig I

Fig II

Fig III

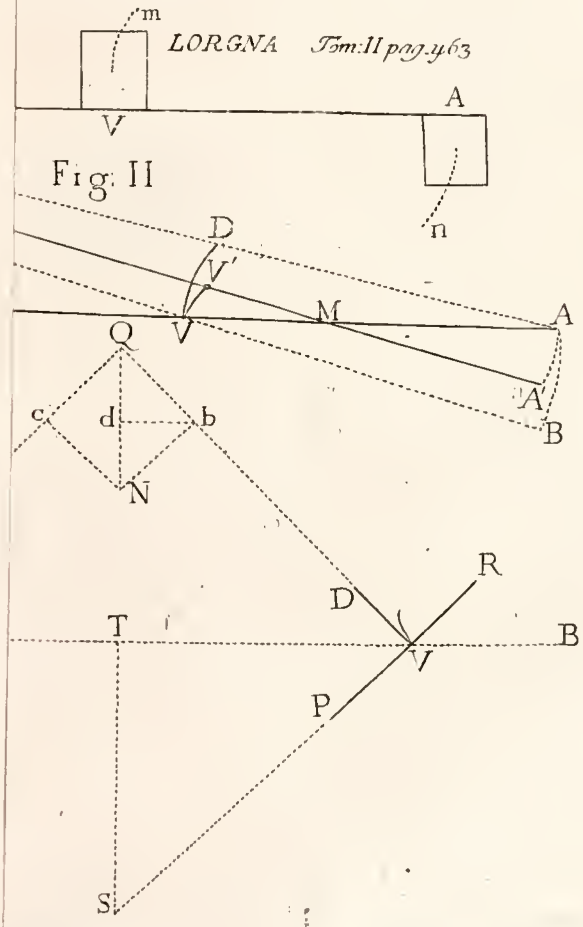
D
A
N
K
H
C
G
I
O
L
E
F
B
A
D
F
H
C
E
I
G
B
A
C
D
B
D
A
F
E
A
B
B
D
D
K
G
H
I
H
G
K
H
N
M
E
T
m
A
V
F
P
C
u
H
O
R
M
m
N
S
C
F
B
N
M
H
G
N
D
m
O
O
M
G
L
K
I
Z
P
P
F
V
A
C
i
H

FONTANA



LORGNA *Tom: II pag. 463*

Fig: II


m
V
A
n
D
V′
M
A
Q
V
c
d
b
A′
B
N
D
R
T
B
V
P
S

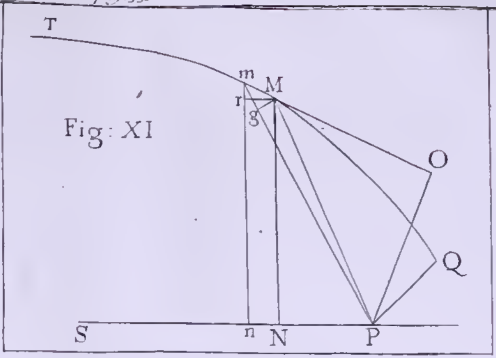


Fig: XI
T
m
M
r
g
O
Q
S
n
N
P

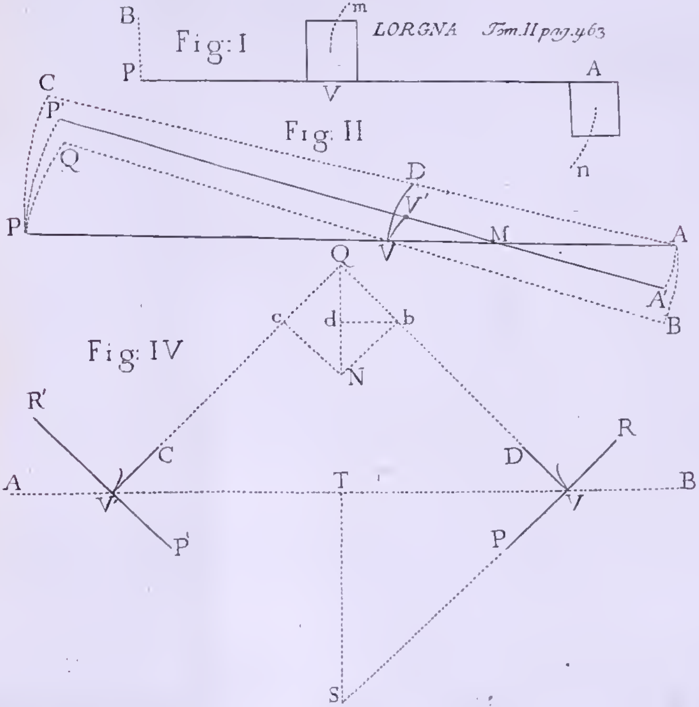


Fig: I

LORGNA *Tom.II pag.463*

Fig: II

Fig: IV
B
m
P
V
A
n
C
P'
Q
D
V'
P
M
A
V
A'
B
Q
c
d
b
N
R'
C
A
V
T
D
R
B
V
P'
P
S